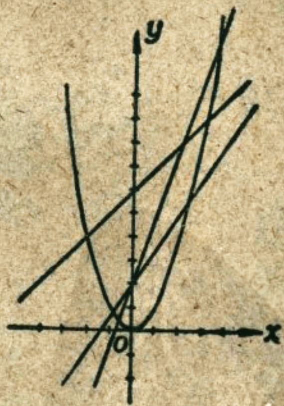
九年一貫制試用課本

（全 日 制）

初等函数

CHUDENG HANSHU



人 民 教 育 出 版 社

九年一貫制試用課本

（全日制）

初等函数

北京师范大学数学系普通教育改革小組編

北京市書刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

新华书店发行

北京京华印书局印装

統一书号：K7012·948 字数：247 千

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：$11\frac{7}{16}$ 插頁 1

1960 年第一版

第一版 1960 年 5 月第一次印刷

北京：1—10,000 册

定价 0.64 元

前　言

在党的总路綫的光輝照耀下，随着 1958 年以来的連續大跃进，人民公社的建立与蓬勃发展，我国已經进入了一个持續跃进的新的历史阶段．今年，我国又出現了两个高潮：一个是技术革新和技术革命的高潮，一个是农村和城市大办人民公社的高潮．这两个高潮对教育事业提出了一系列新的問題，广大工农群众要求迅速改变我国"一穷二白"的落后面貌，迅速攀登科学文化高峯，加快我国社会主义建設的速度，但是現行中小学数学教学內容陈旧落后，脫离实际，存在严重少慢差費現象，与現代科学技术飞跃发展的形势极不相称，远远不能滿足社会主义建設的迫切需要，因此，中小学数学教学必須改革．

北京师范大学数学系，在党的領导下，发动了广大师生，深入地进行了这次根本性的改革．大破数学教学的旧体系，建立新体系，在 1958 年以来的調查研究及实际工作經驗的基础上，根据"适当縮短年限，适当提高程度，适当控制学时，适当增加劳动"的精神，1960 年寒假中，我們又深入到工厂、人民公社、学校、科学研究机关等处进行調查訪問，編出了一套"九年一貫制（全日制）学校数学教学改革草案（初稿）"，根据这个草案編出了一套九年一貫制（全日制）学校数学課試用教材．这套教材分成代数、初等函数、微积分学、概率論与数理統計、制图学五科．代数中包括算术內容，但因从始至終貫穿代数因素，故定名代数．

这套数学教材的編写尽量遵循以下四点要求：

（一）教材內容及体系为社会主义服务，特别是为現代化生

产和尖端科学技术服务。

二、教材体系要貫彻辯証唯物主义观点，理論联系实际的精神，以函数为綱，尽量作到数与形的結合。

三、教材中要貫彻概念与計算相結合的精神。

四、教材的分量与难易程度要适合学生实际接受能力和認識发展的客观过程。

这套数学教材还沒有經过实驗，希望教师能創造性的使用，必要时也可以适当增减一些材料，特别是希望教师能根据情况增加一些例题与习题，以便学生能更巩固地掌握各种概念，熟練地进行各种計算，教材中对各种計算工具作了集中介紹，希望教师能特别注意分散使用，在作习题及課外活动中，尽量要求学生使用学过的計算工具进行計算。

初等函数的內容包括一次函数、二次函数、有理函数、无理函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、坐标变换与参数方程以及复数、排列組合等，共分八章。

在一次函数、二次函数中以函数的观点研究了一次方程組、二次方程、二次方程組以及直綫、二次曲綫的性質，形成一个完整的有机联系的整体，具体体現了以函数为綱，数形結合的精神。

在对数函数与三角函数中，着重培养学生計算和測量的能力，使学生会熟練地运用計算尺、計算图表等計算工具，解决实际計算問題。

在講授这部分教材时，需要补充足够的練习题。

在編写过程中，我們得到了許多单位的帮助，給我們提出了許多宝貴的意見，最后在教育部直接領导下，組織了北京、天津、

辽宁、山西、河南等地区的专家和优秀大、中、小学教师对这套教材进行了討論研究．我們对于这些单位的同志們在此表示衷心感謝．人民教育出版社和印刷厂也給予了热情无私的帮助，发揮了共产主义大协作的精神，在此一并致謝．

由于时間仓促，調查了解工作做得还很不够，加上我們水平較差，一定还存在許多缺点和錯誤．我們热情的希望教师和讀者提出意見，使本書不断地得到修改、补充和完善．在教育战綫上开出灿烂之花，結出丰碩之果．

北京师范大学数学系普通教育改革小組

1960年4月25日

目　录

第一章　一次函数 …… 1

§1　函数的概念 …… 1

§2　一次函数及其图象 …… 8

§3　直綫方程 …… 11

§4　二元一次方程組 …… 19

§5　三元一次方程組 …… 30

习題 …… 39

第二章　二次函数 …… 43

§1　二次函数的概念 …… 43

§2　二次函数的图象 …… 43

§3　二次函数的性質 …… 49

§4　一元二次方程 …… 51

§5　一元二次不等式 …… 62

§6　二次曲綫 …… 70

§7　二元二次方程組 …… 84

习題 …… 90

第三章　有理函数无理函数 …… 94

§1　有理函数 …… 94

§2　无理函数 …… 105

习　題 …… 110

第四章　冪函数指数函数对数函数 …… 113

§1　冪的概念推广 …… 113

§2　冪函数 …… 116

§3　指数函数 …… 117

§4　对数函数 …… 123

§5 計算尺及其应用 ……144
§6 算图(諾謨图) ……158
习題 ……202
第五章 三角函数 ……209
§1 角的概念的推广、弧度 ……209
§2 三角函数的概念及图象 ……212
§3 基本公式 ……226
§4 三角函数表 ……233
§5 三角函数尺 ……238
§6 二角和,差的三角函数,倍角、半角公式,和差化积,积化和差 ……244
§7 斜三角形解法 ……251
§8 反三角函数 ……270
§9 簡單三角方程 ……279
习 題 ……281
第六章 極坐标和参数方程 ……301
§1 极坐标 ……301
§2 极坐标方程及作图 ……304
§3 曲綫的参数方程 ……307
§4 坐标軸的平移和旋轉 ……314
习 題 ……318
第七章 复数 ……320
§1 复数概念和它的运算 ……320
§2 复数的几何表示 ……323
§3 复数的三角函数表示式 ……328
习題 ……332
第八章 排列組合、数学归納法、二項式定理、等差級数与等比級数 ……333
§1 排列、組合 ……333

§ 2 数学归納法 ……343
§ 3 二項式定理 ……347
§ 4 等差級数和等比級数 ……350
习 題 ……356

第一章　一次函数

§1. 函数的概念

1. 在生活和生产实际中，我們常常碰到各种各样变化着的量．例如溫度、压力、速度、时間、气体的体积等等．这些量并不是孤立存在着的，它們之間存在着这样或那样的联系．通过这些联系，一个量发生了变化，另外一个量也跟着发生一定的变化．人們为了更好地認識与改造自然，和解决生产实际問題，就必須研究量与量之間的互相联系．

例 1. 某一生产队有一台拖拉机，平均每小时耕地 a 亩．那么 t 小时后就能耕地 at 亩，我們用 A 来表示这个亩数，有下列关系：

$$A=at.$$

例 2. 某工厂制造一件农具，需要生鉄 3 公斤．假設生产 x 件农具需要生鉄 y 公斤．不难看出需要生鉄的公斤数 y，和农具件数 x 之間存在着如下的关系：

$$y=3x.$$

例 3. 我們如果知道矩形的长为 5，寬为 u，那么矩形的面积 S 和矩形的寬 u 之間有下列关系：

$$S=5u.$$

例 4. 有一个立方体，它的边长为 x，那么这个立方体的体积就是：

$$V=x^3.$$

从例 1 可以看出，由于时間的变化，拖拉机耕地的亩数也跟着发生变化。在例 3 中如果矩形的寬变化，那么矩形面积也跟着发生变化。在問题所考慮的过程中，我們把数值可能发生变化的量，叫做**变量**。例 1 里的时間 t 和耕地亩数 A 都是**变量**。同样，例 3 里矩形的寬 u 和矩形的面积 S 也是变量。

此外，在例 1 里拖拉机每小时所能耕地的亩数 a，和例 2 里的生产每一件农具所需要的生鉄的公斤数 3，都是不改变的量。在問题所考慮的过程中，我們把数值保持不变的量叫做**常量**。

从上面的例子中，我們看到，在某些变量之間存在着一定的关系。通过这个关系，給定其中某个变量的任意一个值，另外一个变量的值也就随之确定。比如在例 1 中，給定时間 t 的任何一个值，那么拖拉机耕地的亩数也就跟着确定。象这样的变量之間的关系，叫做**函数关系**。我們把前一个变量（如时間 t）叫做**自变量**，后一个变量（如拖拉机耕地亩数 A）叫做**因变量**，或叫做自变量的**函数**。在例 3 中矩形的寬就是自变量，而矩形的面积 S 就是矩形的寬的函数。

函数定义：如果对于变量 x 的每一个所能取的値都有变量 y 的一个确定的值与它对应，那么称变量 y 是变量 x 的一个函数注，用符号 $y=f(x)$ 表示。

注 作为一个例子，我們考慮飞机飞行的过程，飞机上乘客的数目，行李的重量在飞行过程中是不变的，就是它們不随时間的变化而变化。所以是常量。另一方面乘客的数目，行李的数目也是自变量时間 t 的函数。因为在每一个时刻 t，乘客的数目，行李的重量都有一个确定的数与 t 对应。因此，在我們所考慮的过程中常量也是某一个变量的函数。

但是必須指出：在函数关系中，自变量的取值是有限制的，

譬如在例1里时間 t 只能取正数，而不能取負数．在例2里农具件数 x 就只能取正整数．

我們把自变量所能取的值的全体叫做函数的**定义域**.例如，函数 $y=\frac{1}{x-2}$ 的定义域为不等于2的一切实数．

2．函数关系的表示法

两个变量之間的函数关系，通常有下列三种表示方法：

(1) 解析法

用公式来表示函数关系的方法叫**解析法**．譬如例1和例2中我們用式子 $A=at$ 和 $y=3x$ 表示量之間的关系，这种表示方法就是解析法．

解析法对函数关系的确定起着很大的作用．它的最大优点是：使人能很清楚地看出变量之間的对应关系，对函数的定义域上每一个自变量的值，都能很方便地求出它所对应的函数值来，这就使我們有可能更进一步地研究这函数关系的性質．但是在实际問題中，变量之間的函数关系，并不是都用数学公式表示的．在不同的場合，常常采用不同的表示法．除了解析法，还有以下两种方法．

(2) 图表法

用图表表示变量間的函数关系的方法叫做**图表法**．这是我們已經学过的．

图表法是社会科学、自然科学、工程技术和国民經济統計等方面应用最广泛的一种方法．因为在实用上若采用解析法，对于每一种情况都要进行一系列的計算，这常常是很复杂的．在工程建設中常常因为要进行这些复杂的計算，而不能迅速地完成設計任务．因此我們就事先把与自变量的值相对应的函数值

算出来列成表，这样就大大地縮短了計算的时間，从而更快地完成工程的設計工作。我国社会主义建設需要編制大量的图表。

例如我們可以把我国解放十年来鋼产量的发展情况用图表法表示出来：

年　份	1949	1952	1957	1958	1959
鋼产量（万吨）	15.8	135	535	800（不包括土鋼）	1335（不包括土鋼）

图表法的优点是：从表中所列出的自变量的值，立刻就能找出对应的函数值；它的缺点是对于表中所沒有列入的自变量的值，我們就无法确切地求出这些自变量所对应的函数值。

我們也常常用統計图来表示函数关系，例如根据剛才的列表法得到的函数关系就可以用图形表示出来。这种統計图表我們过去也是学习过的。

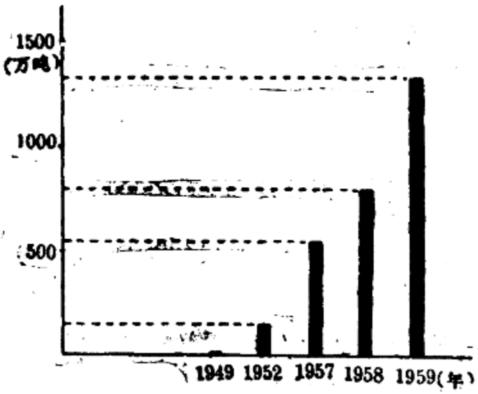


图 1-1

从上图中可以看出我国解放后的鋼产量上升的情况．这是旧中国和資本主义国家从来沒有的，也絕对不可能有的高速度．

(3) **图象法**：关于这个方法我們将在下一节的最后加以介紹，因为要为它作一些准备．

3．直角坐标系

在研究函数时，为了更能够直观的了解它的性質，我們常常需要画出这个函数的图象．为了这个目的，我們在平面上作两条互相垂直的直綫 $X'X$ 和 $Y'Y$，把它們叫做**坐标軸**．直綫 $X'X$ 叫做**横軸**或叫 **X 軸**，規定向右的方向为它的正向；$Y'Y$ 叫做**縱軸**或 **Y 軸**，規定向上的方向为它的正向；这两条直綫的交点 O 叫做**坐标原点**．我們再取定一个长度单位．这样就建立了一个平面上的**直角坐标系**，記作 $O—XY$．

X 軸和 Y 軸把平面分成四个部分：XOY、YOX'、$X'OY'$ 和 $Y'OX$，依次叫做**第一象限**、**第二象限**、**第三象限**和**第四象限**．

設 P 是平面上的任意一点，过 P 点作 PM 和 PN 分别与 Y 軸和 X 軸平行．我們把 OM 所对应的数 x 叫做 P 点的**横坐标**；把 ON 所对应的数 y 叫做 P 点的**縱坐标**．横坐标 x 和縱坐标 y 叫做 P 点的**坐标**，用符号 (x, y) 来表示(图 1-2)．

例如：在图 1—3 中：P 点的坐标是 $(2, 3)$；P_1 点的坐标是 $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$；$P_2$ 点的坐标是 $(-1, -3)$；P_3 点的坐标是 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$；$M$ 点的坐标是 $(2, 0)$；N 点坐标是 $(0, 2)$；O 点的坐标是 $(0, 0)$ 等等．

相反地，如果給出任意一对 x, y 的值 (x, y)，那么在平面上就能确定一个点，使它的坐标为 (x, y)．

平面上的两个点，若是它們横坐标相同，縱坐标絕对值相

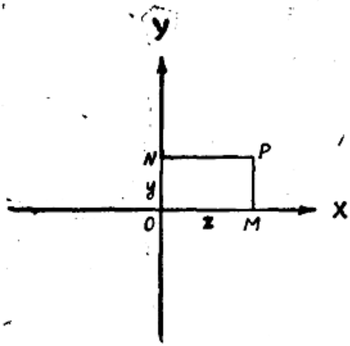


图 1-2

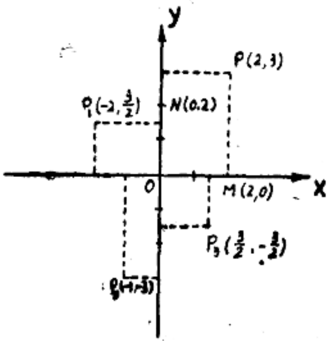


图 1-3

等符号相反，那么我們就說这两个点关于X軸对称．若是它們的縱坐标相同，横坐标絕对值相等符号相反，那么我們就說这两个点关于Y軸对称．

例：P_1点的坐标是$(2, 3)$，P_2点的坐标是$(2, -3)$，那么P_1、P_2两点关于X軸对称（图1-4）．

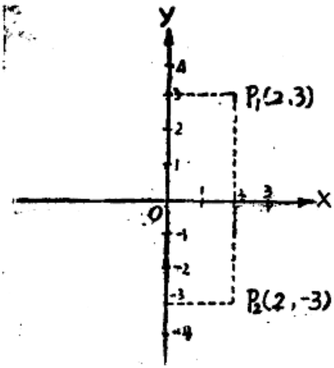


图 1-4

4．函数的图象

建立了直角坐标系，我們就可以很直观地来研究一个已知函数的性質．

$y=f(x)$是一个函数，那么对于自变量x的每一个值，就有一个确定的函数值$y=f(x)$和它对应．把自变量x的值作为横坐标，函数y的对应值作为縱坐标，就得到一点(x, y)．当

自变量 x 連續变化时，这些点就描繪出一条曲綫，这条曲綫叫做函数 $y=f(x)$ 的**图象**；函数的表示式叫做这条曲綫的**方程**．图象上每一点坐标 (x, y)，都滿足 $y=f(x)$；反过来，坐标滿足 $y=f(x)$ 的点必在这条曲綫上．

要作一个函数 $y=f(x)$ 的图象，一般是先作出图象上的一些点，然后用光滑曲綫把它們連接起来．当点作得越多的时候，得出的图象也就越精确．

例：作出函数 $y=\frac{1}{8}x^3$ 的图象．

我們对于 x 的值 0、±1、±2、±3 和 ±4 分别求出 y 的对应值是：0、$\pm\frac{1}{8}$、±1、$\pm\frac{27}{8}$ 和 ±8．于是就得出下面的数值表：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

作出对应的点，然后用光滑曲綫連接起来，就得出函数 $y=\frac{1}{8}x^3$ 的图象(图 1-5a)．

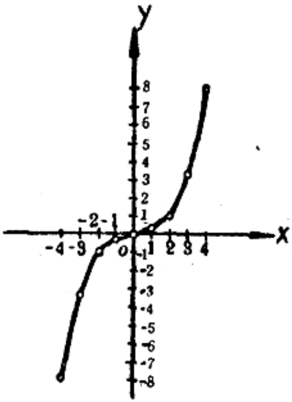


图 1-5a

給了一个函数，我們就可以建立坐标系，把函数的图象描繪出来．但也有这样的时候，一个函数关系事先不能由解析法或图表法給出来，而是用其他方式給出．例如，有一种仪器可以記录一天中不同时間的溫度变化的情况，得到的是一条曲綫，它是时間

t 的函数的图象. 又如一架机器工作，它所作的功也可以用一种仪器記录下来，得到的也是一条曲綫，它也是时間 t 的函数的图象.

一般地說,直角坐标系上的一条曲綫(也可以是直綫),如果每一条与 y 軸平行的直綫都与这曲綫相交于一点，那么这条曲綫表示一个函数.

用图形表示函数这一方法，就是我們在前一节中所說的**图象法**. 它有很大优点，使我們往往可以一眼看出函数的变化情况，而要用解析法表示这个函数則常常需要很复杂的計算. 下图就表示一个函数 $y=f(x)$.

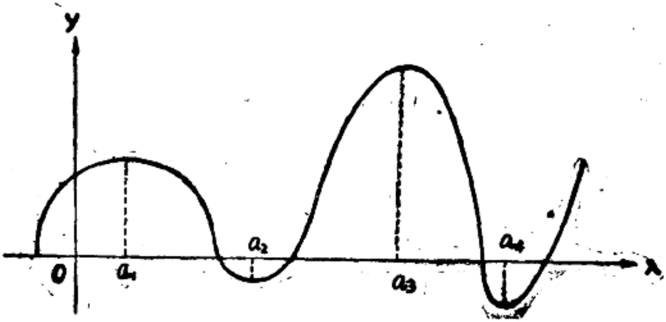


图 1-5b

§2. 一次函数及其图象

1. 函数 $y=kx$ 及其图象

我們看下面的两个例子: (1)汽車以每小时 30 公里的速度匀速前进,則汽車开过的路程与时間的关系是 $s=30t$; (2)生产一件农具需要生鉄 3 公斤，則生产的农具的件数 x 与需要生鉄的公斤数 y 之間有关系 $y=3x$. 由上面两个例子可以看出它們

的一个共同特点：就是自变量增加几倍时，函数值也随着增加同样的倍数。以后在实际中还会碰到大量这样的例子。这类函数的一般表达式是 $y=kx$(k 是比值)，用图象表示出来就是一条过原点的直綫。

例如：$y=2x$。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

它的图象就是过原点的直綫(图 1-6)。

2. 一次函数 $y=kx+b$ 及其图象

上面所講的函数 $y=kx$，虽然在实际中有很多用处，但在实际中往往会遇到一些比 $y=kx$ 更一般的函数，我們看下面这个例子：

汽車每小时走 30 公里。汽車由离某工厂 3 公里的地方开出 t 小时后，汽車离此工厂有多远？

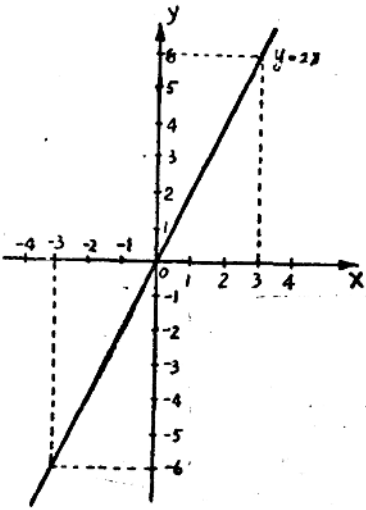


图 1-6

这时我們就不能只計算$30t$，而应当再加上出发点离某工厂的距离 3 公里，所以这个問題的解答是 $s=30t+3$