主编 王力群

全国高等教育自学考试辅导丛书

高等数学（工专）（上下合订）

GAODENGSHUXUE

自学考试指导与题解

知识出版社

全国高等教育自学考试辅导丛书

《高等数学(工专)》自学考试指导与题解

(上、下册合订)

主　编　王力群

副主编　胡守龙

知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学(工专)》自学考试指导与题解/王力群主编. －北京:知识出版社,2002.1

(全国高等教育自学考试辅导丛书)

ISBN 7-5015-3285-0

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学－高等教育－自学考试－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 093326 号

知识出版社出版发行

(北京阜成门北大街 17 号　邮编 100037)

http://www.ecph.com.cn

河南长城印刷厂印刷

新华书店经销

开本:850×1168　1/32　印张:19.625　字数:490 千字

2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷

印数:1～5000 册

定价:32.00 元

前　　言

为满足广大自学应试者复习要求，我们编写了这本《〈高等数学(工专)〉自学考试指导与题解》。

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会审定的《高等数学(工专)自学考试大纲》和指定教材——高等教育出版社出版的《高等数学(工专)》(上、下)(陆庆乐 马知恩主编)编写的。全书分四部分:第一部分自学指导意见,第二部分综合练习,第三部分模拟自测题,第四部分近两年考试试卷选编。其中,综合练习包括单项选择、计算与证明等题型,基本上涵盖了本课程的考试内容。各章附有参考答案,供学员复习时参考。

编写分工:王力群负责编写第一部分、第三部分和第二部分的5~11章,胡守龙负责编写第二部分的1~4章。全书由王力群审核定稿。

由于编写时间紧,书中疏漏之处在所难免,望考生在使用时结合学习《高等数学(工本)》教材,对本书提出宝贵意见,以便我们修订时参考。

编　者

2002年1月

目　　录

第一部分　自学指导意见

一、本书的特点

本课程是为培养和检验自学者高等数学专业理论和应用能力而设置的一门专业课程.为了方便广大考生的自学、复习与考试,我们根据全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学》(工专)自学考试大纲及编教材,编写了这本自学考试的同步配套指导用书.本书的编写,着重突出以下特点:

1.针对性强,紧扣大纲

本书专门针对高等教育自学考试需要设计,各章内容均紧扣考试大纲的编排所列考核点,体系完整而又清晰;所列综合练习针对课程应用题型设计,力求突出重点,兼顾一般.

2.重点精炼,练习适当

各章考核点提示均围绕大纲编写,体系完整清晰,要点精炼,方便考生复习使用.为了使考生能够根据考试要求的层次准备应考,本书适当增加了综合练习题的比重.此外,本书附有模拟练习题,以强化提高学生的应试技能.

二、学习方法指导

习惯于中学学习方法的读者,在开始自学时,往往会感到困难,一时不能适应,但自学能力的培养对获取知识是十分必要的.自学者如能注意以下几点,将会起到事半功倍的效果.

1.通读结合简读与精读

通读就是对全书内容从头到尾系统地学习.根据教材内容还应把通读与精读结合起来,需了解的一般内容,可采用简单重复读

数遍的学习形式.需反复研读,细读的重点部分,要深刻理解内容的本质,弄懂弄通、学深学透.

2.熟练大纲内容与要求

自考大纲是自学、助学及考试命题的依据,自学时先了解大纲的学习目的与要求以及考核点提示,然后再有重点地学习,避免平均使用力量.

3.加强练习,巩固知识点,锻炼应试解题能力

自学考试的特点是命题覆盖面很大,遍及章、节、目,因此,孤立地抓重点.搞突出,绝不可能取得满意的成绩.所以,在系统地根据大纲学习教材的基础上,认真完成各章的综合练习题,巩固知识重点,锻炼应试能力是十分必要的.

三、自学和应试中应注意的问题

自学时,首先,应兼顾重点与一般,二者不能截然分开,考生须全面系统地掌握教材中的重点与难点,了解一般,切勿孤立地抓重点,甚至猜题、押题.其次,要在理解基础上记忆,切勿死记硬背.第三,答题时要先易后难,先放行难以回答的题目,接着往下做,待全部会做的题目答完之后,再做不会的,以免延误答题时间.

四、试卷结构、题型示例及答题方法

1.试卷结构

按大纲要求,《高等数学》(工专) 试卷在内容上,根据大纲所规定的课程和考核目标来确定考试范围及考核要求,考试范围覆盖到各章,并适当突出重点章节,体现课程内容的重点.在不同能力层次要求上,其分数比例一般为:识记占 15%,领会占 30%,简单应用占 35%,综合应用占 20%,在难易结构上,其比例结构为易占 10%,较易占 20%,一般占 40%,较难占 20%,难占 10%.试卷的难易度与能力层次不属同一概念,在各能力层次上都会存在不同

难度的问题.

2.题型示例与答题方法

《高等数学》(工专) 试卷共设计五种题型:

(1) 填空题:要求将有关内容填入空白处,使之完整、合理.要答好这类题,关键要系统掌握书中的基本概念和基本知识等.

例如:正项级数收敛的充分必要条件是________.

(2) 单项选择题:这类题目要考生结合基本概念和有关知识仔细分辨比较选出一个正确的、通常可采用排除法.

例如:直线 $x = t = z$ 与平面 $2x + y + z = 1$ 的位置关系是(　　).

A.互相平行　　　　B.互相垂直

C.相交　　　　D.直线在平面内

(3) 计算题:这类题目要求考生根据所掌握知识,写出重点步骤,求出答案、演算步骤要清楚,使人看了一目了然.

例如:求 $\int xe^{1-x}\mathrm{d}x$

(4) 证明题:这类题目要求考生根据定理和其他知识点,写出证明过程,条理要清楚,明白因果关系.

例如:设 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续函数,证明:

$$\int_0^{2\pi}(\sin x + x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(2\pi + x)f(x)\mathrm{d}x$$

(5) 应用题:这类题目要求考生根据所学知识结合生活中的实际情况,求出正确答案.

例如:一条长为 L 的金属丝,把它折成两段,一段弯成正方形,另一段变成一个圆,问怎样折法,使正方形的面积与圆面积之和最小.

第二部分　综合练习

第一章　函　　数

考核点提示

1.一元函数的定义,要求达到"领会"层次

(1) 熟知并会叙述函数的定义,知道定义的两个要素 —— 定义域和对应规则.

(2) 认知函数记号 $y = f(x)$ 中 $f(\ \ )$ 的含义.

(3) 能区分 $f(x)$ 与 $f(a)$(a 为常数).

(4) 能区分单值函数与多值函数.

(5) 会计算函数值.

2.函数的表示法,要求达到"识记"层次

(1) 知道函数的三种表示法(包括分段表示法).

(2) 能说出三种表示法各自的优缺点.

3.函数的简单性态,要求达到"简单应用"层次

(1) 知道四种简单性态 —— 有界性、单调性、奇偶性、周期性的含义.

(2) 会判定一些比较简单的函数是否具有某些简单性质.

4.函数的增量,要求达到"领会"层次

(1) 理解函数增量的概念,写出它的表达式,并会计算函数的增量.

(2) 知道增量的几何意义.

5.反函数及其图形,要求达到"领会"层次

(1) 弄清反函数的概念.

(2) 知道在同一坐标系中如何从函数 $y = f(x)$ 的图形作出其反函数 $y = \phi(x)$ 的图形.

6.复合函数,要求达到“综合应用”层次

(1) 弄清中间变量在函数复合中的作用.

(2) 会求复合函数的定义域.并会求复合函数的值.

(3) 会把两个函数复合成一个函数,反之也会把一个函数分解成两个比较简单的函数的复合.

7.基本初等函数与初等函数,要求达到“领会”层次

(1) 牢记基本初等函数的定义域、性态及其图形.

(2) 牢记反三角函数的主值范围.

(3) 知道初等函数的构成.

重点:函数概念与初等函数.

难点:复合函数.

例题解析

单项选择题

1.函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} + \lg(3x - 8)$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{8}{3}, +\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{8}{3}, +\infty\right)$

C. $(3, +\infty)$　　D. $(-\infty, -2)$

解:选 C

由 $x^2 - x - 6 > 0$,得 $x > 3$ 或 $x < -2$;由 $3x - 8 > 0$,得 $x > \dfrac{8}{3}$,所以函数的定义域为 $(3, +\infty)$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 2 & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$,则 $f(x-2)$ 的定义域是

(　　).

A. $[-1,3]$　　　　B. $(-1,3]$

C. $[1,5]$　　　　D. $(1,5]$

解:选 D

因为　$f(x)$ 的定义域是$(-1,3]$,故由 $-1<x-2\leqslant 3$,得 $1<x\leqslant 5$,所以 $f(x-2)$ 定义域为$(1,5]$.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[-1,2]$,则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$ 的定义域是(　　).

A. $[-3,0]$　　　　B. $[-3,1]$

C. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　　　D. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$

解:选 D

因为 $f(x)$ 的定义域为$[-1,2]$,所以有

$$\begin{cases}-1\leqslant x+2\leqslant 2\\ -1\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}\quad 得\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 0\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

故 $F(x)$ 的定义域为$\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

4. 设 $y=f(\lg x)$ 的定义域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$,则 $y=f(x)$ 的定义域为(　　).

A. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　　　B. $[\sqrt{10},100]$

C. $[-\lg 2,\lg 2]$　　　　D. $[0,1]$

解:选 C

因为 $\lg x$ 为单调增函数,所以在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上 $\lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 2$,故 $f(x)$ 的定义域为$\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$,即$[-\lg 2,\lg 2]$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=(\quad)$.

A. $\dfrac{1}{2+x^2}$ B. $\dfrac{1}{1+(1+x^2)^2}$

C. $1+x^2$ D. $1+(1+x^2)^2$

解: 选 B

因 $\dfrac{1}{f(x)}=1+x^2$,

所以 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=f(1+x^2)=\dfrac{1}{1+(1+x^2)^2}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\leqslant 2\\ 1 & |x|>2\end{cases}$,则 $f[f(x)]=(\quad)$.

A. 2 B. 1

C. $f(x)$ D. $[f(x)]^2$

解: 选 A

$$f[f(x)]=\begin{cases}2 & |f(x)|\leqslant 2\\ 1 & |f(x)|>2,\end{cases}$$

由假设,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$|f(x)|\leqslant 2$,

故 $f[f(x)]=2$.

7. 设 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$,则 $f(x)=(\quad)$.

A. $1+\dfrac{4}{1-x}$ B. $1-\dfrac{4}{1-x}$

C. $1-\dfrac{2}{1-2x}$ D. $1+\dfrac{2}{1-2x}$

解: 选 B

令 $1-2x=t$,则 $x=\dfrac{1-t}{2}$,由 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$

得 $f(t)=1-\dfrac{2}{\dfrac{1-t}{2}}=1-\dfrac{4}{1-t}$,故 $f(x)=1-\dfrac{4}{1-x}$.

另法:由 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}=1-\dfrac{4}{1-(1-2x)}$

得 $f(x)=1-\dfrac{4}{1-x}$.

8. 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$,则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=(\quad)$.

A. $1-\cos x$　　B. $-\cos x$

C. $1+\cos x$　　D. $1-\sin x$

解: 选 A

$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=1+1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$,

所以 $f(x)=2-2x^2$

故 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\dfrac{x}{2}=2-(1+\cos x)=1-\cos x$.

9. 下列各对函数中、是相同函数的是(　　).

A. $f(x)=x\sqrt{x-1}$,　$\phi(x)=\sqrt{x^4-x^2}$

B. $f(x)=\arcsin(\sin x)$　$\phi(x)=x$

C. $f(x)=\lg x^2$,　$\phi(x)=2\lg x$

D. $f(x)=1-\cos 2x$,　$\phi(x)=2\sin^2 x$

解: 选 D

因为 A、C 中两函数的定义域不同,B 中两函数的对应规律不同,例 $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\dfrac{\pi}{2}$,$\phi\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{3}{2}\pi$.

10. 设 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 都是单调减函数,则 $f[\phi(x)]$(　　).

A. 单调增　　B. 单调减

C. 有增有减　　D. 不增不减

解: 选 A

因为当 $x_1 < x_2$ 时，$\phi(x_1) > \phi(x_2)$，$f[\phi(x_1)] < f[\phi(x_2)]$.

11. 函数 $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内(　　).

A. 单调减　　　B. 单调增

C. 有增有减　　　D. 不增不减

解: 选 B

由函数的图形不难看出函数图形是沿 x 轴正向上升的曲线.

12. 设函数 $f(x) = \dfrac{x(e^x - 1)}{e^x + 1}$ 则该函数是(　　).

A. 奇函数　　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　　D. 单调函数

解: 选 B

函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 且

$$f(-x) = \frac{-x(e^{-x} - 1)}{e^{-x} + 1} = \frac{-x\dfrac{1 - e^x}{e^x}}{\dfrac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{x(e^x - 1)}{e^x + 1}$$

$= f(x)$ 所以 $f(x)$ 为偶函数

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义且为奇函数，若当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，$f(x) = x(x - 1)$，则当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$f(x) =$ (　　).

A. $-x(x + 1)$　　　B. $x(x - 1)$

C. $x(-x + 1)$　　　D. $x(x + 1)$

解: 选 A

因为 $f(x)$ 为奇函数，故当 $x > 0$ 时

$f(x) = -f(-x) = -[-x(-x - 1)] = -x(x + 1)$

14. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，若 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则 $g(f(x))$ 为(　　).