微分几何
学习指导与习题选解

梅向明 王汇淳 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

微分几何学习指导与习题选解

梅向明　王汇淳　编

高等教育出版社

内容简介

本书是学习《微分几何》(第三版,梅向明,黄敬之编)的配套参考书。书中第一部分是学习指导,指出各章节的理论要点,并通过例题提高对概念、定理的认知水平,第二部分是习题解答,书中对各类习题给出了详尽的分析和规范的题解,以期提高读者的解题能力。

本书可供研读《微分几何》(第三版,梅向明,黄敬之编)的在校生、教师以及自学本课程的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何学习指导与习题选解/梅向明,王汇淳编.
—北京:高等教育出版社,2004.1
ISBN 7-04-012946-9

Ⅰ.微… Ⅱ.①梅…②王… Ⅲ.微分几何-师范大学-教学参考资料 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 090433 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京印刷二厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2004 年 1 月第 1 版
印　　张	6.875	印　　次	2004 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	9.10 元

前　言

这是配合即将出版的《微分几何》(第三版)的教学参考书。《微分几何》自从1987年出版以来,被国内许多高等院校的数学专业作为教材,我们深表感谢。但是由于国内的高等院校数学专业的师资条件和学生质量很不平衡,而我们的教材又力求用近代的观点来讲授微分几何的基础内容,所以这样一本与教材配套的教学参考书对于部分教师和学生,使他们能更好地掌握教材的内容,是必要的。

我们这本书的主题思想有两个:一是学习指导,二是习题选解。在"学习指导"部分,我们突出了《微分几何》教材中的重点和难点以及解题所需要的基本概念和基本公式。不过,为了尽量避免和教材重复,对于基本概念,我们只列出名词,具体内容读者可以查阅原教材。读者使用这本辅导书时,必须紧密结合原教材,"学习指导"只起加深对原教材的理解和复习巩固作用,同时为解题做好准备。"习题选解"分成两部分:一部分是习题,除了教材中的习题以外,我们还选了一些其他教材中的习题,它们分散列于有关章节的后面;另一部分是习题选解和解题指导,放在这本书的最后。

这本书是我和首都师范大学数学系王汇淳副教授共同编写的。他负责前两章,我负责后两章。我们希望使用这本书的高等院校数学专业的同志对本书中的错误和不足之处,予以批评指正。

梅向明

2003年5月于首都师范大学

目　　录

第一部分　学习指导及习题

第二部分 解题指导与答案

第一部分　学习指导及习题

微分几何的发展,就其使用的数学方法而言可以分为三个阶段.第一阶段由牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)创立微积分开始,直至18世纪初,在此期间,欧拉(Euler)作出了巨大贡献.到了1827年,高斯(Gauss)在曲面论的研究方面有了重大突破——发现曲面的高斯曲率的内蕴性,开始了微分几何发展的第二阶段.这一阶段基本形成了经典微分几何的内容和体系,使用的数学方法是向量分析的方法.1885年,德国数学家黎曼(Riemann)把高斯的内蕴几何思想进一步发展,并使用和发展了一套完整的张量分析的算法,展开了黎曼几何的一般理论.微分几何发展的第三个阶段是以法国数学家嘉当(Cartan)发展外微分法和活动标架理论为标志,数学大师嘉当精巧地把李群论与微分几何结合起来,外微分和活动标架法就成为这一阶段研究问题的重要数学方法.

《微分几何(第三版)》教材首先应用向量分析的方法介绍曲线与曲面的理论.篇首作为预备知识,先讲向量函数的概念和性质,尔后用两章的篇幅介绍曲线和曲面的一般理论.第三章介绍外微分形式和活动标架法,第四章讲述了整体微分几何中的一些重要定理.本参考书将对教材中习题作出选解,并增补少量习题供读者练习.

第一章 曲 线 论

§1 向 量 函 数

1.1 向量函数的极限

(1) 主要概念:向量函数的定义,向量函数的极限.

(2) 主要定理:

命题 1 如果 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{s}(t)$是两个一元向量函数,$\lambda(t)$是一个实函数,并且当 $t\to t_0$ 时,这些函数的值趋向于极限 $\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{b}$,$\lambda(t)\to m$,则有

① $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$;

② $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\to m\boldsymbol{a}$;

③ $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

④ $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

1.2 向量函数的连续性

(1) 主要概念:向量函数的连续.

(2) 主要定理:

命题 2 如果 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{s}(t)$是在 t_0 点连续的向量函数,而 $\lambda(t)$是在 t_0 点连续的实函数,则向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)$, $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}(t)$和实函数 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$也都在 t_0 点连续.

1.3 向量函数的微商及泰勒(Taylor)展开式

(1) 主要概念:向量函数的**微商**,C^0 **类函数**,C^k **类函数**,C^∞ **类函数**,C^ω **类函数**.

(2) 主要性质:

命题 3 设 $\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{s}(t)$,$\boldsymbol{u}(t)$分别是可微的向量函数,$\lambda(t)$是可微的实函数,则 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)$,$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$,$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$,$(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{u}(t))$都是可微的,并且

$$(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda'\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{r}',$$

$$(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\pm\boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}').$$

命题 4 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数,则向量函数所对应的三个实函数 $x(t)$,$g(t)$,$z(t)$在$[t_1,t_2]$上也是 C^k 类函数.

定理 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_0,t_0+\Delta t]$上是 C^{k+1}类函数,则有泰勒展开式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{1}{2!}(\Delta t)^2\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}(\Delta t)^n\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{1}{(n+1)!}(\Delta t)^{n+1}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)],$$

其中 $\Delta t\to 0$ 时,$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to\boldsymbol{0}$.

当 $\boldsymbol{r}(t)\in C^\infty$时,可以展成泰勒级数.即

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{1}{2!}(\Delta t)^2\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}(\Delta t)^n\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\cdots.$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)\in C^\omega$ 类,则上述泰勒级数是收敛的.

1.4 向量函数的积分

(1) 主要概念:**向量函数的积分**.

(2) 主要性质:

命题 5 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$是区间$[a,b]$上的连续函数,则积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$$

存在,且

① $a<c<b$ 时有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \int_a^c \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t + \int_c^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

② m 是常数时有

$$\int_a^b m\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = m\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

③ $\boldsymbol{m}$ 是常向量时有

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{m}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{m}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

④ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t\right] = \boldsymbol{r}(x)$.

命题 6 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$具有固定长的充要条件是对 t 的每一个值,$\boldsymbol{r}'(t)$都与 $\boldsymbol{r}(t)$垂直.

定义 对于函数 $\boldsymbol{r}(t)$,给 t 以增量 Δt,用 $\Delta\varphi$ 表示由向量 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$所组成的角,作比值$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$,当 Δt 趋于零时,$\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$的极限称为向量函数$\boldsymbol{r}(t)$对于它的变量 t 的旋转速度.

命题 7 单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$关于 t 的旋转速度等于其微商的模$|\boldsymbol{r}'(t)|$.

习题 1.1

1 求证常向量的微商等于零向量.

2 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}(t)}{\rho(t)}\right)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\rho(t)-\boldsymbol{r}(t)\rho'(t)}{\rho^2(t)}.$$

3 利用向量函数的泰勒公式证明:如果向量函数在某一区间内所有点处的微商都是零,则此向量函数在此区间内是常向量.

4 证明 $\boldsymbol{r}(t)$具有固定方向的充要条件是

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}.$$

5 证明 $\boldsymbol{r}(t)$平行于固定平面的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))=0.$$

6 求下列向量微分方程的解:

(1) $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$;

(2) $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{a}$;

(3) $\boldsymbol{r}'(t)=t\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{r}'(t)=a\boldsymbol{r}(t)$.

7 试举例说明对于向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,一般不成立中值定理:

$$\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}'(\xi)(b-a),a<\xi<b.$$

§2 曲线的概念

(1) 主要概念:曲线的定义、曲线的参数方程、曲线的向量参数表示、光滑曲线、C^k 类曲线、曲线上的正常点、正则曲线、曲线的切线和法面、曲线上的自然参数、曲线的弧长.

(2) 主要公式:

设曲线(C)的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,其上一点 P 所对应的参数为

t_0，曲线(C)在 P 点处的切向量为 $\boldsymbol{r}'(t)$. 在 P 点处的切线方程为:

$$\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(t_0) = \lambda \boldsymbol{r}'(t_0),$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = \{X, Y, Z\}$ 是切线上任一点的向径，λ 是切线上点的参数.

切线方程的坐标表示为:

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

t_0 点处的法面方程为:

$$[\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(t_0)] \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0.$$

用坐标表示为:

$$[X - x(t_0)]x'(t_0) + [Y - y(t_0)]y'(t_0) + [Z - z(t_0)]z'(t_0) = 0.$$

曲线从 $\boldsymbol{r}(a)$ 到 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长为:

$$\sigma(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)| \mathrm{d}t \quad (t > a).$$

曲线的自然参数为:

$$s = \sigma(t).$$

将

$$t = \sigma^{-1}(s)$$

代入曲线(C)的方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),$$

称为曲线的自然参数方程. 由于

$$|\boldsymbol{r}'(s)| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right| = 1,$$

所以曲线(C)的方程在引入自然参数后，切向量 $\boldsymbol{r}'(s)$ 是单位向量. $\boldsymbol{r}'(s)$ 特别记为 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$.

(3) 例题:

求双曲螺线 $\boldsymbol{r} = \{a\cosh t, a\sinh t, at\}$ 从 $t = 0$ 起计算的弧长.

解 $\boldsymbol{r} = \{a\cosh t, a\sinh t, at\}$,

$$\boldsymbol{r}' = \{a\sinh t, a\cosh t, a\}.$$

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2\cosh^2 t + a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\,a\sinh t.\end{aligned}$$

习题 1.2

1 证明圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,t\}$ 是正则曲线，并求它上面的点 $(1,0,0)$ 处的切线和法面.

2 求三次挠曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\{at,bt^2,ct^3\}$ 在 t_0 点的切线和法面.

3 证明：$\boldsymbol{r}(t)=\{\sin 3t\cos t,\sin 3t\sin t,0\}$ 是正则曲线，并求曲线在 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

4 下列哪些是正则曲线，求每条曲线在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

(1) $\boldsymbol{r}_1(\theta)=\{\cos\theta,1-\cos\theta-\sin\theta,-\sin\theta\}$;

(2) $\boldsymbol{r}_2(\theta)=\{2\sin^2\theta,2\sin^2\theta\tan\theta,0\}$;

(3) $\boldsymbol{r}_3(\theta)=\{\cos\theta,\cos^2\theta,\sin\theta\}$.

5 证明圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta\}(-\infty<\theta<\infty)$ 的切线与 z 轴作固定角.

6 设 $\boldsymbol{r}(\theta)=\{e^\theta\cos\theta,e^\theta\sin\theta,0\}$，证明 $\boldsymbol{r}(\theta)$ 与曲线的切向量成定角（具有这种性质的曲线称为对数螺线）.

7 设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是一正则曲线. 假定有一点 $A\in\mathbf{R}^3$，使得对所有的 t，$\boldsymbol{r}(t)-\overrightarrow{OA}$ 正交于 $\boldsymbol{r}'(t)$. 证明 $\boldsymbol{r}(t)$ 在球面上.

8 证明曲线 (C)：$\boldsymbol{r}=\{2t,\sqrt{3}t^2,t^3\}$ 的切线与直线 $y=z-x=0$ 交于定角.

9　求曲线(C):$\boldsymbol{r}(t)=\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$在 $t=0$ 点的切线方程.

10　求曲线(C):$F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 的切线与法面的方程.

11　求曲线(C):$x^2+y^2=1, y^2+z^2=1$ 的法面方程.

12　求悬链线(C):$\boldsymbol{r}=\left\{t, a\cosh\frac{t}{a}, 0\right\}(-\infty<t<\infty)$,从 $t=0$ 起计算的弧长.

13　求抛物线 $y=bx^2$ 对应于 $-a\leqslant x\leqslant a$ 的一段弧长.

14　求星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$一段的弧长.

15　求旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$在 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 一段的弧长.

16　求圆柱螺线 $x=3a\cos t, y=3a\sin t, z=4at$ 从它与 xOy 平面的交点到任意点$M(t)$的弧长.

17　求曲线 $x^3=3a^2y, 2xz=a^2$ 在平面 $y=\frac{a}{3}, y=9a$ 之间的弧长.

18　求双曲螺线 $x=a\cosh t, y=a\sinh t, z=at$ 从 $t=0$ 到 $t=t$ 之间的弧长.

19　求曲线 $x=2a(\arcsin t+t\sqrt{1-t^2}), y=2at^2, z=4at$,从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 之间的弧长.

20　求曳物线 $\boldsymbol{r}(\varphi)=\{a\cos\varphi, a\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)-a\sin\varphi, 0\}(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2})$从 $\varphi=0$ 算起的弧长.并证明:在它的每一条切线上,从切点到 y 轴间的一段长总等于a(参数 φ 是切线和x 轴所成的角).

21　求封闭曲线 $\boldsymbol{r}=\{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$的全长.

22　若曲线由 $F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 给出,试求这