JINGZHENG ZHONG DE JUECE FANGFA

竞争中的决策方法

——对策论初步

李树仁

陕西科学技术出版社

竞争中的决策方法

——对策论初步

李树仁 编

陕西科学技术出版社

责任编辑　赵生久

竞争中的决策方法
——对策论初步
李树仁　编

陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　小寨印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　4.125印张　80千字
1985年7月第1版　1985年7月第1次印刷
印数 1—10000
统一书号：13202·73　定价：0.90元

前　言

在人们的社会实践中，既需要协作，也需要竞争。在经济体制改革的今天，为了克服吃大锅饭的弊端，更需要提倡竞争。那么在竞争中应当采取何种行动才能有把握地使自已一方损失最小而所得最大呢？这是一个值得研究的问题。在这本小册子里，我们试图结合实例向读者介绍一些竞争（尤其是经济竞争）中的基本决策方法，以回答上面提出的问题。

考虑到某些读者数学知识的不足，书中对那些读者可能会感到难以理解的数学概念都作了简要的解释。书末还有一个附录，主要介绍矩阵（包括向量）概念，矩阵运算和线性规划的基本知识，以供读者参阅。这样以来，只要具有中学的数学水平就能够顺利阅读全书内容，因此，读者不必为读这本小册子而去专门啃那些抽象的数学问题。在正文之后，编选了少量习题（包括答案），可供读者在阅读时练习。

本书成稿后，曾由陈开周副教授进行了审查，提出了宝贵的修改意见，在此，表示衷心的感谢。由于时间仓促，作者水平有限，错误之处在所难免，望读者指正。

编　者

一九八五年元月

目　录

一　竞争现象及其特点

在文体活动中，我们常常可以看到下棋、赛球等两方参加的竞赛性活动。在这类竞赛中，参加竞赛的双方追逐着相互冲突的利益，表现出一种对抗的竞争行为。其实，这种竞争现象不仅存在于文体活动之中，而且存在于军事斗争、经济活动等社会现象中。下面是军事方面的一个子。

曹操的去路问题　三国时期，赤壁大战之后，曹操率领残兵败将仓惶逃往南郡，途中来到一个三岔路口，前面有两条去路：一条是小路（华容道），窄险难行；另一条是大路，便于行军，但比小路要多走五十里路。两条路都可能有诸葛亮的伏兵。在这紧急关头，曹操盘算着对策：诸葛亮的伏兵到底会在哪条路上？曹军到底走哪条路较妥？若走小路，如果遇到诸葛亮的伏兵，曹军将会全军覆没；如果没有伏兵，曹操虽能顺利地到达南郡，但因山路险窄，兵马辎重损失较大。若走大路，因大路不便于伏兵，且便于冲杀突过，所以，遇到伏兵也不至于全军覆没；若大路没有伏兵，曹军将能顺利地到达南郡，重整旗鼓，再次决战。那么，曹操应取何种策略（走大路还是小路？）才能保证自己损失最小呢？

在经济方面，这种利益冲突，互相竞争的活动更是屡见不

鲜。如各国间的贸易判谈，各企业间的订货加工，生产安排等，都可以看成双方的对抗竞争问题。下面的招揽乘客问题就是这方面的一个例子。

招揽乘客问题 有两家汽车客运公司A和B，同时服务于西安——临潼这一区间。每年在这个区间流动的乘客数为一个常数。因此，其中一家乘客增多，则意味着另一家乘客减少。在这种情况下，两家都力图采取某种措施以招揽更多的乘客，假定每个公司采取措施的情况有以下三种：

1、不做任何招揽乘客的工作；

2、在行车期间对乘客进行口头宣传；

3、在报纸上登广告。

由于各公司可能采取的措施不同，总共含有$3\times 3=9$种组合，每种组合都将对各家招揽的乘客数目产生影响。如公司A采取登广告的措施，而公司B不做任何工作，这种情况下A公司的乘客数每年将增加700名（即B公司将减少700名）。又如A公司采用登广告的措施，而B公司采用口头宣传，则A公司的乘客数每年将增加250名（即B公司减少250名），等等。对于这九种组合中的每一种组合，都可以确定A公司每年增加的乘客数（即B公司失去的乘客数）。全部结果如下表所示。表中的正数表示A公司增加的乘客数，即B公司减少的乘客数。表中负数表示A公司减少的乘客数，即B公司增加的乘客数。

这两个公司各应采取何种措施（方案），才能有把握招揽最多的乘客？

B公司 A公司增加的客数 A公司	什么也不做	口头宣传	登广告
什么也不做	0	-200	-600
口头宣传	200	0	-200
登广告	700	250	100

诸如此类的竞争现象，明显地存在着以下三个特点：

1　竞争是由两方且仅由两方构成（实际碰到的竞争问题当然可能是由三方、四方或更多方面构成的，但这种问题不在我们讨论的范围之内）；

2　一方所得即为另一方所失，双方利益完全冲突；

3　任何一方的输赢得失并不全由自己的行动决定，而是一部分决定于对方。

二　要善于运用策略

在竞争中，能否稳操胜券，决定于参与竞争者采取什么样的行动。

在现实生活中，经常会遇到这样一种态度：车到山前必有路。持这种态度的人，事到临头才去解决，而且事前从不考虑如何预防可能发生的问题。这种态度显然是不可取的。正确的的态度应当是全面深入地分析客观形势，积极主动地

采取应对措施，以保证自己最终获胜。这就要求竞争者必须讲究策略。正确地运用策略，则可以避免盲目，使损失尽可能减少、收益尽可能大。相反，如果不能正确地运用策略，则可能采取错误行动而造成不应有的损失。

假定你由甲地去乙地参加一次会议，汽车公司规定：到乙地的单程车票要3.5元，来回车票要5元。根据以往召开这类会议的情况估计，在会上你很可能会碰到你所熟悉的一位开车的朋友，你可以乘他的车一起回来，而不必乘公司的车。因此，你面临的情况是：或者买单程车票，或者买来回车票。买单程车票若遇到你的朋友只需花3.5元车费。若遇不到你的朋友则要再花3.5元买一张回程车票，总共要花7元车费。买来回票，不论是否遇到朋友都得花去5元车费。那么到底买程车票好呢？还是买来回车票好？如果从最坏的情况考虑（即碰不到你的朋友，这时你必须乘汽车公司的汽车返回），你的最好策略是买一张来回车票，共花5元钱。当然，当你从最坏的情况出发决定购买5元的来回车票时，可能会碰到朋友而乘顺车返回。在这种情况下，买来回车票似乎是不必要的。和单程票相比，似乎浪费了1.5元。但是，当你不采取买来回车票这一策略而是买一张单程票时，你有可能会碰不到朋友，这时你必须再花3.5元买一张回程票，总共要付出7元。从最坏的情况出发，用5元购买来回票，正是为了避免可能付出7元。多付出1.5元，正是为了避免可能多付出2元。因此，从策略的观点看，你的决策是正确的。

上面说过，从最坏的情况出发，正确的策略是用5元购

买一张来回车票。然而，问题的讨论并不止此。如果你事先掌握有比较可靠的信息，知道你的朋友参加这次会议的可能性很大（如90%以上），那么你最好的决策倒是可以买一张单程票。因为这样做你有90%以上的机会节约1.5元，而失误的机会不到10%。这时你是愿意冒点风险的。由此可见，在制定正确策略时，掌握信息是十分重要的。

在我们这本小册子中，将向读者介绍各类竞争现象的特点，分析竞争现象的规律，并在这个基础上掌握竞争中的决策方法，象一个精明的棋手进行比赛那样，予测对手可能的走法，正确地制订自已比赛的策略，达到竞争中取胜的目的。

三　竞争问题的数学模型

——矩阵对策

满足第一节所述的三个特点的竞争现象统称为**矩阵对策问题**，也称为**对抗对策**问题。矩阵对策就是描述这类竞争现象的数学模型。研究矩阵对策问题的主题是：竞争双方应采取怎样的理智行动才能使自已有把握取得最大的利益。或者说，竞争的双方应采取何种策略才能保证自己赢得最多？

凡矩阵对策都含有以下三个要素：

1 **局中人**：凡是竞争，总要有对立面，如下棋时两位棋手就是对立面；战斗中，交战双方就是对立面；生产中，人和大自然构成对立面等等。我们把竞争的对立面称为局中人。

应强调一下，矩阵对策有且仅有两个局中人，通常称为局中人甲和局中人乙。如第一节第一个例子中的曹操、诸葛亮；第二个例子中的A和B两个汽车客运公司都是局中人。

2 策略：每个局中人在竞争中总希望自已取得尽可能大的利益。因此，他必然要选择对付对手的“办法”，也就是在各种可行方案中选择符合自已需要的方案，我们把这种“办法”或“方案”称为局中人的策略。如第一节第一个例子中对曹操来说“走大路”或“走小路”；对诸葛亮来说，把兵“埋伏在大路”或“埋伏在小路”；第二个例子中，A、B两公司采取什么措施，是“什么也不做”，“作口头宣传”或“在报上登广告”都是各局中人的策略。

3 支付：竞争的结局双方必然各有“得失”，该“得失”通常是用数字来表示的。它的大小体现了“得失”的多少。我们称这种表示得失的数字为支付。因为竞争双方的利益是完全冲突的，所以，甲、乙双方得失之和为零。即局中人之一的所得数正是另一个局中人的所失数（或少得的数）。例如，假定支付是用人民币表示的话，则当甲方的支付x是一个正数时，便意味着甲方得到x，或乙方失掉x。当甲方的支付x是一个负数时，便意味着甲方失掉x，或乙方得到x。正因为矩阵对策有这个特点，所以矩阵对策又称为**二人零和对策**或**二人对抗对策**。

下面将要看到，凡是矩阵对策都可以用一个极为简明的矩阵来表示，这就是这种对策其所以被称为矩阵对策的原因。

举一个一目了然的例子。

猜硬币游戏　甲、乙两个小孩玩猜硬币游戏，甲出一枚硬币平放在桌面，并用手掩盖，然后由乙猜测是正面向上（记为H），还是反面向上（记为T）？若乙猜对了，则乙赢1分（即甲输1分）；若乙猜错了，则乙输1分（即甲赢1分）。

这个例子虽极简单，但却充分体现了竞争的意义，显然，它是一个矩阵对策问题。

在这个对策中，局中人甲有两个策略可供选择：出正面H或出反面T；局中人乙也有两个策略可供选择：猜正面H或猜反面T。整个对策中的局中人、策略、支付可用矩阵表示如下：

$$\begin{array}{cc} & \text{乙：} \\ & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ \text{甲：}\begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

其中，矩阵的元素表示甲的支付（即甲的赢得数），如第1行、第2列交叉处的－1，它表示甲出H，乙猜也H时甲得－1分（实际上是甲输1分，乙得1分）。第1行、第2列交叉处的1表示甲出H，乙猜成T时甲得1分。至于乙的支付，矩阵中没有直接标出，但因是二人零和对策，所以将矩中的元素反号便是乙的支付。

一般地，假定G是一个矩阵对策，甲有m个策略$r_1, r_2, \cdots, r_m$；乙有n个策略$b_1, b_2, \cdots, b_n$。再设a_{ij}是甲取策略r_i，乙取策略b_j时甲的支付。那么，对策G可用一个$m \times n$阶矩阵表示如下：

$$A=\text{甲:}\begin{array}{c}\\ r_1\\ r_2\\ \cdots\\ r_i\\ \cdots\\ r_m\end{array}\overset{\displaystyle\begin{array}{c}\text{乙:}\\ \begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_j & \cdots & b_n\end{array}\end{array}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}$$

A称为对策G的支付矩阵。再强调一下：A中所列支付乃是局中人甲的所得。如a_{ij}为正，则表示甲得到a_{ij}（即乙失掉a_{ij}）；a_{ij}为负则表示甲失去a_{ij}（即乙得到a_{ij}）。正因为局中人甲和局中人乙的得失相反，所以根据局中人甲的支付矩阵易知局中人乙的支付矩阵必为

$$A^*=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots\cdots -a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots\cdots -a_{mn}\end{pmatrix}$$

但由于A^*是由A确定的，所以我们用矩阵表示对策时没有写出A^*的必要。

容易看出，第一节所举两个竞争的例子都是矩阵对策，它们可分别用矩阵表示如下：

汽车公司招揽乘客问题：

$$\begin{array}{ccc} & & \text{B公司}\\ & & \begin{array}{ccc}\text{什么也不做}b_1 & \text{口头宣传}b_2 & \text{登广告}b_3\end{array}\\ \text{A公司} & \begin{array}{c}\text{什么也不做}r_1\\ \text{口头宣传}r_2\\ \text{登广告}r_3\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -200 & -600\\ 200 & 0 & -200\\ 700 & 250 & 100\end{pmatrix}\end{array}$$

至于第一个例子（曹操的去路问题），我们可以在对实际情况分析的基础上，将诸葛亮一方的“得失”用适当的数字表示（打分数），如诸葛亮伏兵小路，曹军也走小路，这时曹军覆没，诸葛亮全获大胜，可打100分；若诸葛亮伏兵小路，而曹军走大路，曹军虽也到达南郡，但路途较远，可打－90分；若伏兵在大路，曹军走小路，这种情况下，曹军虽能到达南郡，但损失较大，可打－80分；最后一种情况可打80分。这样，整个对策问题可用矩阵表示如下：

$$\begin{array}{ccc} & & \text{乙（曹操）} \\ & & \begin{array}{cc} \text{小路} & \text{大路} \end{array} \\ \text{甲（诸葛亮）} & \begin{array}{c} \text{小路} \\ \text{大路} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 100 & -90 \\ -80 & 80 \end{array}\right) \end{array}$$

今后为了方便于起见，我们常常将某一具体的对策G记成如下更简明的形式：

$$G=\{S_1, S_2, A\}$$

其中S_1是局中人甲的所有策略组成的集合；S_2是局中人乙的所有策略组成的集合；A是（甲方的）支付矩阵。

四　关于三要素的进一步说明

1 局中人含义的扩展

在竞争现象中，局中人并不一定都是具体的人。它可以是由人组成的团体，如工厂、球队等，也可以是非人的客观状态，如天气状况、政治、经济形势等。后一种情况，局中人

只有一方是明显地存在着，而另一方（客观状态）不是明显存在着的。下面是这类竞争问题的一个例子。

种植方案问题 某农场确定了两种种植方案：一个是种植小麦，另一个是种植谷物。估计未来的气候可能有寒冷、一般、较暖三种情况，并估计出相应的收入（折合人民币）如下表所示：

（单位：万元）

气候 收入 生产方案	寒冷	一般	较暖
种麦子	10	8	6
种谷物	8	9	11

试问农场应采取何种方案才能取得最大收入？这里，生产组织者和大自然之间是利害冲突的，生产安排问题就可以看成以生产组织者为一方，以大自然为另一方的竞争问题。

当我们处理这种竞争问题时，对客观状态仍可按有理智的具体的人一样对待，无需特别处理，只要对抗的一方关心并防备着所有可能事件即可。当然，对后一种局中人来说，它对得失是不感兴趣的，这时，我们将不强调一方所得正是另一方所失这种提法。以上面所举种植方案问题为例，农场获得一万元，并不意味着天气失掉一万元。

由于局中人可以是由人组成的团体或客观状态，所以，两方竞争问题的理论也可以用于某些并非只有两方参加的竞

争现象。如竞争的一方是某个企业，而另一方则可以是其它全体企业。这可以说是对二人竞争问题的一个有意义的扩充。当然，事情也不就这么简单，在第十九节，我们还要作进一步的说明。

2 局中人选用策略时的“合理”行为问题

在每一桩竞争现象中，竞争着的双方都有权根据自己的意愿确定自己的策略(当然,当局中人是被动的客观状态时,我们没有必要强调这一意愿)。那么局中人采取什么行动才被认为是“合理”的呢？比如,有一方在竞争中有意让着对方,不想取得最大的利益,这一行为是“合理”的呢?还是不合理?

对策论的鼻祖冯·诺依曼和摩根斯特恩在《竞赛论与经济行为》一书中指出：试图取得最大效用或利润的局中人，其行为被认为是“合理”的。这里“效用”一词可以解释成希望取得的任何“满足”。这种关于合理行为的假定对竞争行为是完全必要的，同时也是客观存在的,因为,在竞争中，任何一方总是希望自己取得最大的效益。如不然，则不成为竞争行为，也就无所谓竞争了。因此,不想取得最大利益的行为在对策理论中认为是不合理行为，是双方选取策略时不可取的。

3 以货币作为支付的问题

在竞争中，支付矩阵中的各项都是甲得到的客观报酬，也就是乙所付出的客观报酬。这些报酬是以可以数的量表现的。这一要求完全是出于理论上的需要，因为只有这样，对策理论中的分割、交换、总合等概念才有意义。但是，在实际的竞争行为中，局中人想要得到的东西往往并不是可数