平行四边形

平行四边形

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

平 行 四 边 形

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

一九五八年·上海

平　行　四　边　形

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市书刊出版业营业許可証出015号

上海国光印刷厂印刷　新华書店上海发行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：3 3/4　字数：86,000
1957年9月第1版　1958年2月第3次印刷
印数：80,001—100,000本

統一書号：13076・88
定　　价：(7) 0.34元

序　言

本会为了帮助教师学习苏联先进教学經驗，积极提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定編写一套有关初高中数学各科包括算术、代数、几何、三角的教学参考讀物，陆續出版，以便中学数学教师进一步研究和了解教材，从而更好地掌握教材的目的性．同时，这套小册子也可供初高中学生作为課外补充讀物．我們希望通过这套小册子的出版，能促进数学界同志对中学数学教材共同进行研究，并使教学經驗得到广泛的交流．

“平行四边形”这本小册子是根据“中学数学教学大綱”（修訂草案）及初級中学課本平面几何“平行綫”与“四边形”兩章教材內容加以深入和提高而編写的．它对平行綫与平行四边形的基本概念作了較詳細的叙述，指出了平行公理在研究平行綫及几何图形性質中的作用；簡明地介紹了第五公設和罗巴契夫斯基几何．它系統地討論了由平行綫和平行四边形所推导的其他四边形图形的性質，并詳細地分析了中心对称图形的性質及它与軸对称图形的关系．然后研究了决定平行四边形图形及特殊平行四边形图形的条件，并通过一些例題来說明平行綫与平行四边形等图形性質的应用．

本会在編写本册前，曾拟就編写計划，經編輯組討論确定編写提綱．然后由李承福同志提供材料，由黃松年同志执笔写成，再經楊荣祥同志校訂，最后由楊荣祥、黃松年兩同志作了修正．虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正．

中国数学会上海分会中学数学研究委員会

1957年6月

目　录

一　平行綫的教学目的及其理論基础

以前我們研究直綫性質的时候，知道两条直綫如果有两个公共点，那么从两点之間只能連接一条直綫的公理，可知这两条直綫是重合的，而重合的两条直綫实际上只是一条直綫.如果两条直綫只有一个公共点，那么这两条直綫是相交了．我們要問，在同一平面上的两条直綫的位置关系，除开有重合与相交的两种情况以外，是否还有其他的位置关系呢？我們知道几何图形是从客观实际中抽象出来的.在客观实际中常見到一种几何图形，例如电車或火車沿着直綫行駛的两条鉄軌，矩形的桌面或書本封面上相对的两条边，直立在地面上的两根电杆木等等，这些給予我們的印象，都看作是不相交的两条直綫，因此在几何学里也就有研究这种图形性質的必要了.

在平面几何学里，对于不相交的两条直綫，系指同在一平面上的关系而言，又常称为平行綫.

平行綫一章是欧几里德几何組成部分之一，它是进一步研究三角形性質的重要基础．举凡三角形内角和的問題，銳角为30°的直角三角形中这銳角对边与斜边長度关系問題，三角形两边中点連綫的問題等等，均須利用平行綫性質来解决.同时由平行綫性質导出了平行四边形及特殊平行四边形的研究．且它也为今后研究圓与直綫关系，三角形内特殊綫段交点的性質，相似形的概念，多边形面积等等問題創造了条件.

欧几里德“几何原本”从卷一的第27命題开始討論平行綫理論問題，它首先从平行綫定义出发的，它定义：“在同一平面内

两条向两边无限延長而不相交的直綫称为平行綫."

在几何学里,对于两条互相平行的直綫,常用符号"//"来表示平行的关系. 同时我們从几何图形和邏輯推理的方法中可以确定在几何图形里有平行綫的存在的.

垂直于同一条直綫的两条直綫不能相交.

設: $AB \perp EF$, $CD \perp EF$, A、D 为垂足.

求証: AB 和 CD 不能相交.

証明: 假定 AB 与 CD 相交于某一点 P, 那就是过 EF 直綫外一点 P 可以引 EF 的两条垂綫 PA 及 PD, 这样就与过已知直綫外一点向这已知直綫只能引一条垂綫的性質矛盾, 显然是不可能的. 故 AB 与 CD 不能相交.

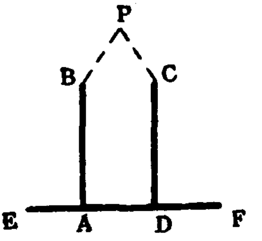

图 1

对于同在一平面上的两条直綫, 除具有同垂直一直綫时可判定为平行綫的关系外,我們还可以得出其他的判定方法,但討論以前,須先研究下面的一些名詞的概念.

当两条直綫 AB 及 CD 被第三条直綫 EF 所截时,則圍繞两个截点組成八个角(如图 2). 如果以这两条直綫之間的四个角称为內角,而其他的四个角称为外角,并在每个截点周圍各取一个角相配,这样两两相配的角, 有下面的一些特殊名称.

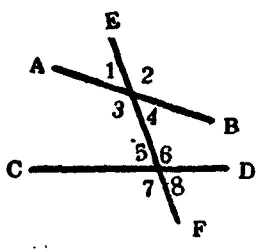

图 2

1. 当所取相配的两个角,它們在截綫上的一条边方向相同, 而另一条边在截綫的同側时, 就称这两个角为同位角, 如图 2 中 $\angle 1$ 与 $\angle 5$, $\angle 2$ 与

$\angle 6$，$\angle 3$ 与 $\angle 7$，$\angle 4$ 与 $\angle 8$.

2. 当所取相配的两个角，它們在截綫上的一条边方向相反幷且互相交叠，而另一条边則在截綫的异側时，就称这两个角为內錯角，如图 2 中 $\angle 3$ 与 $\angle 6$，$\angle 4$ 与 $\angle 5$.

3. 当所取相配的两个角，它們在截綫上的一条边方向相反但幷不相互交叠，而另一条边在截綫的异側时，这两个角称为外錯角，如图 2 中 $\angle 1$ 与 $\angle 8$，$\angle 2$ 与 $\angle 7$.

4. 当所取相配的两个角，它們在截綫上的一条边方向相反且相互交叠，而另一条边在截綫的同側时，这两个角称为同旁內角，如图 2 中 $\angle 3$ 与 $\angle 5$，$\angle 4$ 与 $\angle 6$.

5. 当所取相配的两个角，它們在截綫上的一条边方向相反但不相互交叠，而另一条边在截綫的同側时，这两个角称为同旁外角，如图 2 中 $\angle 1$ 与 $\angle 7$，$\angle 2$ 与 $\angle 8$.

上面三条直綫所組成的八个角的几何图形又簡称为"三綫八角"．为什么我們要在这里提出"三綫八角"的图形呢？因为以前我們曾研究过三角形外角大于不相鄰內角的性質，而这三角形外角的图形也就是三綫八角的一种特殊图形，只不过这三条綫是兩兩相交．現在我們可以运用三角形外角的性質来研究平行綫的确定的問題．

当兩直綫被一直綫所截，若具有下列条件之一：

（1）任何一組同位角相等，

（2）任何一組內錯角或外錯角相等，

（3）任何一組同旁內角或同旁外角互为补角，

則这兩条綫必平行．

对于判定兩直綫平行的定理，我們可采用归謬法来証明．

設直綫 AB 及 CD，被第三条直綫 EF 所截，且 G、H 为截点，其中任一組同位角 $\angle 1=\angle 5$.

求証：$AB\parallel CD$.

証明：假定 AB 与 CD 不平行，則它們必相交．交点不在 EF 的左側就在 EF 的右側．若相交于左側 S 点，則組成一个三角形 GSH，而 $\angle 1$ 是 $\triangle GSH$ 的外角，从三角形外角大于不相鄰的內角性質，可知 $\angle 1>\angle 5$，这样就与題設 $\angle 1=\angle 5$ 相矛盾．

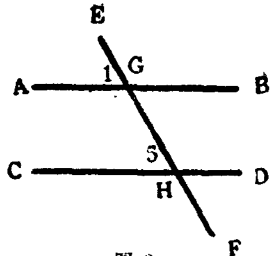

图 3

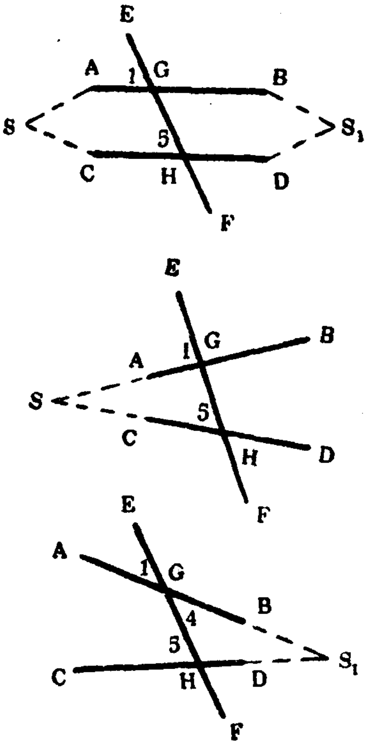

图 4

若 AB 与 CD 交于 EF 的右側点 S_1，則組成一个三角形 GS_1H，而 $\angle 5$ 是 $\triangle GS_1H$ 的外角，同样从三角形的外角性質，可知 $\angle 5>\angle 4$，但 $\angle 4=\angle 1$，即 $\angle 5>\angle 1$，这样也与題設 $\angle 1=\angle 5$ 相矛盾．

故当同位角 $\angle 1=\angle 5$ 时，AB 与 CD 不能相交，

$\therefore\quad AB\parallel CD.$

我們从同位角相等的兩条直綫必平行的存在，用对頂角相等及鄰补角的性質，可导出其他兩条判定定理的成立．对于它們的証明，在現行中学課本中說明很詳，不作重复．

上面这条平行綫存在的

判定定理的証明方法，也就是欧几里德“几何原本”中的証法(見欧氏“几何原本”命题 27—28)．但对它的逆命題的确定，欧几里德是从平行公理出发的．这条平行公理是：“**一直綫截兩直綫，如果截綫某側所成兩同旁內角之和小于兩直角，則无限延長兩直綫，必相交于截綫的兩同旁內角和小于兩直角的一側**”．**这条公理，在欧氏“几何原本”中称为第五公設**．由于它的措辞很冗長，故現行中学几何課本中采用一种与它有同样作用的几何术語来代替，即：“**过已知直綫外的一个已知点，只能作一条直綫使它和已知直綫平行**”．

現在讓我們来証明它的逆命題：

凡兩条平行直綫被第三条直綫所截，則

(1) **同位角相等；**

(2) **內錯角(或外錯角)相等；**

(3) **同旁內角(或同旁外角)互为补角．**

我們只要証明这条定理的第一部分，其余部分同样可从对頂角及补角性質推导出来．

設 $AB \parallel CD$，EF 为截綫，G、H 为截点．

求証：同位角 $\angle 1 = \angle 2$．

証：假定 $\angle 1$ 不等于 $\angle 2$，那末 $\angle 1 > \angle 2$ 或者 $\angle 1 < \angle 2$．

当 $\angle 1 > \angle 2$ 时，我們可以在 $\angle 1$ 內作 $\angle B_1GB = \angle 2$，这样就得到了兩条不相重合而相交的直綫 AB 及 A_1B_1．从題設 $AB \parallel CD$ 的，但又因为 $\angle B_1GB = \angle 2$，故从平行綫的判定定理可知 $A_1B_1 \parallel CD$，这样即为过一点可作一已知直綫的兩条平行綫了，显然这与平行公理“过一点只能作一

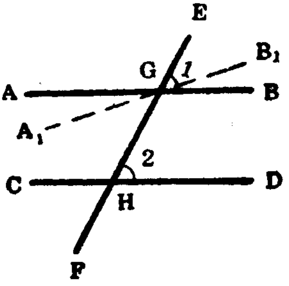

图 5

条已知直綫的平行綫"相矛盾的．因此当$AB /\!/ CD$时，$\angle 1 > \angle 2$是不可能的．

用同样方法也可証得$AB /\!/ CD$时，$\angle 1 < \angle 2$也不可能．

既然$\angle 1 \gtrless \angle 2$都不成立，那么只有$\angle 1 = \angle 2$．

这样也就証明了"凡两条平行直綫被第三条直綫所截，則同位角相等"的正确性．至于这条逆定理的第(2)、(3)部分，可分别利用第一部分的性質并結合对頂角及补角性質来推导，是不难証出的，故証明从略．

关于它的否命題及逆否命題，同样可成立的．

当两条直綫被第三条直綫所截，若具有下列条件之一：

(1) 任一組同位角不相等，

(2) 任一組內錯角(或外錯角)不相等，

(3) 任一組同旁內角(或同旁外角)不互为补角，

則这两条直綫不平行．

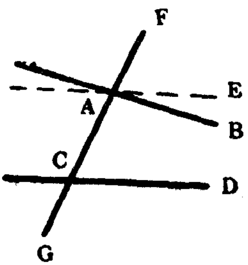

图 6

設直綫AB及CD被第三条直綫FG所截，A、C为截点，而$\angle FAB \neq \angle ACD$．

求証：AB不平行CD．

証：$\because$ $\angle FAB \neq \angle ACD$，故过$A$点可以作一个角$\angle FAE = \angle ACD$，从平行綫的判定定理，可知$AE /\!/ CD$．因为$AE$及$AB$为相交的两直綫，由平行公理，当$AE /\!/ CD$时，則$AB$不平行$CD$．

同理，我們可証得这条否定理的第(2)、(3)部分都正确的．

当两条直綫被第三条直綫所截，若这两条直綫不平行，則

(1) 同位角不相等，

(2) 內錯角(或外錯角)不相等，

（3）同旁內角（或同旁外角）不互为补角.

对于这条平行綫定理的逆否命題，它的眞实性，同样可用归謬法証明的．茲証明如下：

設 AB 不平行于 CD，FG 为截綫交 AB 及 CD 于 M 及 N.

求証：（1）$\angle FMB \neq \angle MND$，

（2）$\angle AMN \neq \angle MND$（或$\angle FMA \neq \angle DNG$），

（3）$\angle BMN + \angle MND \neq 2d$（或$\angle FMB + \angle DNG \neq 2d$）.

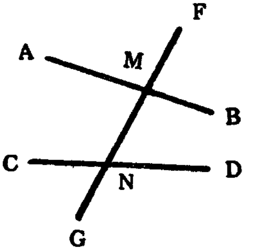

图 7

証明：（1）$\angle FMB$ 与$\angle MND$ 只有相等和不相等的兩种情况．当$\angle FMB = \angle MND$时，則从平行綫性質的逆定理可知，$AB /\!/ CD$，这样与題設 AB 不平行于 CD 相矛盾的.

故当 AB 不平行于 CD 时，則$\angle FMB \neq \angle MND$.

这样就証明了本命題第一条性質的成立．至于第（2）及（3）兩条的性質，可用同理推导或运用本命題的性質（1）結合对頂角或鄰补角性質也可証得的.

从上面所討論的一些平行綫的基本性質中可以看出，它們完全是建筑在平行綫定义及平行公理基础上的；象这种以平行綫定义及平行公理为基础来研究平行綫性質的問題，也就是欧几里德几何平行理論的体系.

我們知道，几何学是以邏輯推理为手段来研究几何图形性質的学科．为了体現邏輯的严密性，因此几何学是建筑在公理系統之中，就是从少数的定义和公理出发，推导出对于几何图形具有普遍性質的定理，再从定义、公理和已証得的定理又推导出其他更多的新的定理．欧几里德几何直到今天仍有很大的影响和

作用，就由于它的名著“几何原本”初步奠定了公理系統的邏輯結构，这本書可以說是千古不朽的名著，它为整个几何学的发展奠定了良好基础．欧氏的丰功偉績是值得千秋万世的人所敬仰的．反过来講，我們虽然不否認欧几里德在整个几何史上的偉績，但从今天眼光来評价，他在邏輯結構上仍是有缺点的．这是由于当时时代背景所致，当时是公元前300多年，人类的物質文明剛才萌芽，自然不可能將几何学中一切推論的基础毫无漏洞地整理出来．但从欧氏的著作来分析，他是企图以庄严的姿态希望邏輯上完美无缺地建立几何学的完整系統的．

欧几里德在邏輯結構上的缺点，表現在所給予的公理公設比較貧乏而不够完备，所給予的定义，有些不是从邏輯的意义来下定义，而只是一些直观性的描写．例如，欧氏对点或綫定义說：“点是沒有部分的”，“綫是有長度而沒有寬度的”，显然这两个定义都只是几何形象的直观描写，沒有絲毫的邏輯意义．再如，欧氏所給予的公理公設比較貧乏，又体現在邏輯推理中要借助于直观的感覺，如他的公理系統中缺少了关于图形位置的公理，就容易造成一些似是而非的問題．例如，“凡三角形都是等腰三角形”，这个命題是不存在的，但如果純粹用欧氏公理系統进行推理證明，又可以證得这个命題存在的．

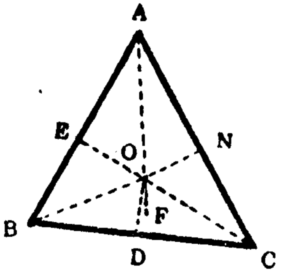

图 8

設 $\triangle ABC$．

求証：$AB=AC$．

証：作 $\angle A$ 的平分角綫 AF 及 BC 的垂直平分綫 OD，使 OD 与 AF 相交于一点 O．連接 OB 及 OC，并过 O 作 $OE\perp AB$，$ON\perp AC$．$\because$ 直角 $\triangle AEO\cong$ 直角 $\triangle ANO$，$\therefore$ $OE=ON$，$AE=AN$．$\because$ OD 为 BC 的中垂綫，

$\therefore\ OB=OC$， $\therefore$ 直角$\triangle OEB\cong$直角$\triangle ONC$， $\therefore\ BE=CN$.
$\therefore\ AE+EB=AN+NC$，即 $AB=AC$.

象这个問題的証明，在邏輯性上是沒有錯誤的.关鍵在于平分角綫 AF 及中垂綫 OD 的交点的位置。若正确地作图，其交点 O 应在$\triangle ABC$ 的形外，即 BC 边的另一側。若 $AB>AC$，則 E 点在 AB 上，而 N 点在 AC 的延長綫上了，这样也就不能得到 $AN+NC=AC$ 的結論。这种錯誤的結論，是由于欧氏几何对于"在某綫段上"或"某綫段延長綫上"只凭人們的直观，缺乏邏輯的論証.其次，在欧氏几何中还缺乏連續公理.例如，已知三边作三角形，是先取一綫段等于已知長，然后以它的兩个端点为中心，另兩个已知長为半徑作圓弧，得出这兩个圓弧的交点，以定求作三角形的第三个頂点，从而作出图来.但是这兩个圓弧为什么一定相交呢？实际上，这交点的存在必須以圓的連續性为前提；反过来說，假如这圓是不連續的破裂的曲綫时，則这交点可能不存在的，但欧氏几何对于連續性的公理是沒有的，它又建筑于人們的直观，这点显然又缺乏严密的邏輯性.这些都足以說明欧氏几何所給予的公理公設不够完备；相反的，有些命題不必作为公理的，而欧氏又將它采用. 例如，"凡直角均相等"是可以推理証明的，而欧氏將它当作公理，虽然这种公理是多余的.

作为一个富有邏輯結構的公理系統，对采用的公理必須具备下列的一些条件：

1. 公理的显而易見性，

2. 公理无矛盾性，

3. 公理的个数最少，

4. 公理的完备性.

从上述四方面来对照欧氏几何的公理体系，它对于公理无矛盾性是处理得很优越的，沒有將互相矛盾的兩个公理放在它

的公理系統中，但对于其他三方面就做得不够，如欧氏第五公設（即平行公理）就冗長而繁瑣，缺乏显而易見性。可能在这方面欧氏本人当时已有所感覚。他对平行公理提出很迟，直到在第一卷命題29中为了証明这个命題（这个命題即为平行綫判定定理的逆定理）的成立才采用它，而且以后就沒有再用到第五公設。由此可見欧氏本人对这条公理并不滿意，而是沒有办法才采用它的。

正由于这样，在整个几何学的发展史上，从欧几里德以后兩千多年以来，就有許多数学家都曾經尝試地企图从其他更明显的几何命題中导出欧氏的第五公設的命題来，也就是希望証得欧氏的第五公設是一条定理而不是公理，但結果所获得的只是与第五公設具有等价性的命題，并沒有証得第五公設成为定理的可能。反过来講，由于兩千多年以来許多数学家辛勤劳动的尝試，对几何学的发展起了很大的作用，为近代的几何公理累积了丰富的材料。下面列举兩个和第五公設等价的命題。但在这里又須先談談"等价的命題"这一句几何术語的意义。什么叫做等价呢？如果有兩个命題，若將命題甲看成公理，則可以推証出命題乙的眞实性；反过来講，若將命題乙当作公理，則也可以从命題乙推証出命題甲的眞实性来；也即指出这兩个命題只要有一个眞实，那么这兩个命題都眞实，因而我們將这兩个命題看成是等价的。"价"意味着"作用"，"等价"意味着兩个命題的作用相等。同样，如果有三个命題，甲命題与乙命題等价，而乙命題与丙命題等价，則甲命題与丙命題也等价，这就是等价的傳递性。

1．三角形諸內角之和等于兩个直角。

对于这个命題，在欧氏几何中是从平行公理推导出来的定理。假定不以第五公設为基础可以确定其眞实性的話，那么第五

公設就可倒过来依靠这一条定理而証出，也就是第五公設可成为定理了.

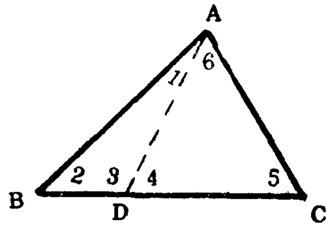

图 9

現在讓我們来不利用第五公設証明这命題.

假定三角形内角和为x，从图 9 中則：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=x$，$\angle 4+\angle 5+\angle 6=x$.

$\therefore\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=2x.$

$\because\quad BDC$ 是一直綫，

$\therefore\quad \angle 3+\angle 4=2d.$

即 $\quad \angle 1+\angle 2+\angle 5+\angle 6+2d=2x.$

$\because\quad \angle 1+\angle 2+\angle 5+\angle 6=x,$

$\therefore\quad x+2d=2x.$

$\therefore\quad x=2d.$

这个証明沒有用到第五公設，粗看起来，好象是正确的，实际上是不正确的，因为在推理过程中首先肯定了三角形内角和等于定值的概念.为什么会知道三角形諸内角和不变呢？这无形中就以三角形諸内角和不变作为公理代替了平行公理，显然它与第五公設是等价的.

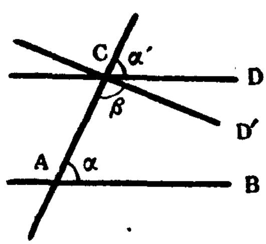

图 10

2. 在平面上通过点 C 只可能引一直綫 l 使与定直綫 AB 不相交.

假定这个命題是一条已知公理，則从它来証明第五公設是可以推証的.

令 AB 与 CD' 是任意兩条直綫，而$\angle\alpha$ 和$\angle\beta$ 是截綫 AC 的同旁

内角，且$\angle\alpha+\angle\beta<2d$.

那么，过C点可以作直綫CD使与AC綫所成$\angle\alpha'=\angle\alpha$，这样$\angle\alpha'+\angle\beta=\angle\alpha+\angle\beta<2d$，$\therefore$ CD与CD'不重合．从平行綫的性質，可知CD与AB不相交．又从本命題的性質，过C点只可能引一直綫l使与定直綫AB不相交，$\therefore$ CD'与AB必相交．这样就証明了第五公設．

事实上，假如第五公設是已知公理的話，那么这个命題同样可从第五公設来証明的．

設C为直綫AB外任一点，連接CA．过C作直綫CD使与AC所成之角$\alpha'=\alpha$，則从平行綫的性質，可知$CD\parallel AB$．过C点引任意直綫CD'使CD'在$\angle DCA$的內部，$\because$ $\alpha'+\beta<2d$，这样$\alpha+\beta<2d$，根据第五公設CD'与AB必相交，故过C点只能引一条直綫与AB不相交．即証明了本命題．

这个命題，称为勃烈忽命題．显然这命題本身的成立，旣可借助于第五公設来推証，它就不可能成为一条公理．如果当作公理，也只是与第五公設有等价性質的公理．事实上現行中学教材所采用的平行公理的措辞就是勃烈忽命題．

上面所介紹的兩条第五公設的等价命題，只不过是一部分，因限于篇幅不再作一一介紹了，讀者如有兴趣，可閱“几何学基础”(В. И. 科士青著，商务印書館出版)一書．

对于第五公設的証明，直到19世紀20年代杰出的俄罗斯数学家罗巴契夫斯基得出了結論．他認为証明第五公設成为一条定理是不可能的．相反的，罗巴契夫斯基从証明第五公設的不可能性中发現了一种与欧几里德几何不同的新的几何学．他采用了欧氏几何第五公設以外的公理，將廢置的第五公設代之以另外一条罗巴契夫斯基的平行公理．这条公理就是：“过已知直綫外一点至少可作兩条直綫和已知直綫不相交”．由于这条公