计量三级工技术补课教材

误差理论入门

辽宁省计量局科教处 编

计 量 出 版 社

计量三级工技术补课教材

误 差 理 论 入 门

辽宁省计量局科教处　编

计 量 出 版 社

1983·北京

内 容 提 要

本书是计量三级工技术补课教材中误差理论的初级教材。该书应用浅显的数学知识，紧密结合计量检定与测试工作，介绍了常用的误差分析和数据处理方法。内容简要，文字通俗，本书也适合于具有初中文化程度的计量、测试人员自学。

计量三级工技术补课教材

误差理论入门

辽宁省计量局科教处 编

责任编辑 栾桂芬

计量出版社出版

（北京和平里11区7号）

北京计量印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32 印张 2

字数 41 千字 印数 1—20 000

1984年 1 月第一版 1984年 1 月第一次印刷

统一书号 15210·308

定价 0.29 元

编审委员会

前　言

计量测试技术是发展国民经济的一项重要技术基础。它涉及到自然科学基础理论、工程技术、法制和科学管理等方面。它与工农业生产、交通运输、国防科研、商业贸易、医疗卫生、环境保护以及人民日常生活等方面都有密切的关系，并在提高经济效益和产品质量方面都有着重要的作用。

为贯彻党的十二大提出的，在本世纪末实现工农业总产值翻两番的战略目标，计量测试技术工作必须发挥技术基础的作用。为此，调动和充分发挥计量战线青壮年职工的聪明才智，是做好这一工作的重要保证。

中共中央、国务院做出了《关于加强职工教育工作的决定》，中央五委、局发出了《联合通知》，要求在"六五"计划期间完成青壮年职工的文化技术补课的特定历史任务，使他们成为合格的生产技术业务骨干。为了解决辽宁省计量系统青壮年职工技术补课的需要，我们编写了计量三级工技术补课教材，并聘请了东北工学院有关专业的教授、讲师和省内计量专业的有关工程技术人员组成了计量三级工补课教材编审委员会（详见于后）。

计量三级工的标准（即应知应会的内容），是参照原一机部技术工人等级标准和上海市计量技术工人等级标准编写而成的。

此次出版的教材有：长度计量、温度计量、电学计量和误差理论入门四种。内容以文化补课合格为起点，从基础知识入手，循序渐进，主要包括计量技术初级理论、量值传递、标准量具和仪器、检定规程、测试方法的选择，以及检定中

的有关技术问题的处理等。力求体系完整文字简洁、联系实际、深入浅出，以适应具有初中文化程度补课对象的需要。本系列教材，长度计量由史伟萍同志执笔；温度计量由邢书田同志执笔；电学计量由朱祯学、潘铁义、张树波、王吉祥同志执笔；误差理论入门由杜汉玉同志执笔。

为了更好的提高补课效果，在不同的计量专业补课中，还要结合必修的基础课，如初级电工原理、机械原理、机械零件、制图等等。

我们在编写过程中，承蒙计量出版社及有关同志的热情帮助和支持。对此，我们深表谢意。

此教材涉及的内容较广，更由于时间的紧迫和水平所限，书中不妥之处和错误力难避免，希望读者给予指正。

编　者

一九八三年四月

目　录

第一章 误差理论常用数学

1.1 绝对值与不等式

1.1.1 绝对值

在初等数学里，我们已经学过了数的概念，并且还知道数可以用数轴上的点来表示，也就是说，实数和数轴上的点之间具有一一对应关系，即实数集对应了数轴上的点集.

在数轴原点的两旁，离开原点距离相等的两个点所表示的两个实数，叫做互为相反的数。实数 a 和 $-a(a\neq 0)$ 是互为相反的数. 零的相反数还是零. 实数的绝对值，就是表示一个数在数轴上离开原点的距离. 关于绝对值，它有如下重要性质：

正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数。也就是：

$$|a|=\begin{cases} a, & (a>0) \\ 0, & (a=0) \\ -a, & (a<0) \end{cases}$$

以上关于绝对值的重要性质，我们以后经常用到，务必不能混淆.

1.1.2 不等式

在初等数学里，我们学过许多数学式子，如 $a=2b$，$y=3x+1$ 等等，这样的式子所表达的数量关系称为等量关系，而象这样用等号连起来的两个式子则称为等式，这是我们最为常见的数学式子. 然而在客观现实中，数量关系并不完全都是等量关系，即并不是用等式就能完全表达的。如在检定

与测试中，我们常会碰到如下一些问题，如在检定中要求标准的误差一般应小于被测误差的 1/3—1/10，某检定装置的综合误差应不大于 $3/10^4$ 等等。以上这些问题所代表的数量关系就不是等量关系，如果写成数学表达式，就必须使用不等式来描述上述数量关系，在代数中我们把用不等号“>”（读作大于）或“<”（读作小于）连接起来的两个代数式，称为不等式。

例如：

$$a^2+b^2+2>1$$

$$3x+4>2x-5$$

$$3^x<3^{2x-1}$$

上面这些式子都是用不等号来连接的，所以它们都是不等式。

如果一个不等式，用任何数值（只要是允许的）代替其中的字母，它都能成立，这样的不等式叫做绝对不等式。如果只用某些特定的数值代替其中的字母，它才能够成立，这样的不等式称为条件不等式。在使用中，为叙述问题的方便，统一称其为不等式。在检定与测试的数据处理过程中，我们经常用到的是条件不等式。

在实践中，我们还经常碰到用符号“≥”（读作大于或等于）或者“≤”（读作小于或等于）把两个解析式连接起来的式子，这种式子也叫不等式，为了区别前面介绍的不等式，习惯上就把它称为非严格不等式。相应的，把前面介绍的不等式称为严格不等式。关于不等式，它有如下一些重要性质：

性质 1：如果 $a>b$，那么 $b<a$；反过来，如果 $b<a$，那么 $a>b$，这个性质叫做不等的对逆性。

性质 2：如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$，反之亦成立，这个性质叫做不等的传递性。

性质 3：如果 $a>b$，且 c 为任意实数，那么，$a+c>b+c$，这个性质叫做不等的单调性。

性质 4：如果 $a>b$，且 $c>0$，则有 $ac>bc$。反之，若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$。

由以上不等式的基本性质，还可以推出不等式的其它一些性质，应用这些性质，可以对不等式进行四则运算。或乘方、开方及其它运算。由基本性质可以得出以下一些推论：

推论 1：如果 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$。

一般说：几个同向不等式分别相加，其结果仍为同向不等式。

推论 2：如果 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$。

推论 3：如果 $a>b$，$c>d$，且 a、b、c、d 都是正数，则 $ac>bd$。

一般地说：几个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，仍得同相不等式。

推论 4：如果 $a>b$，a、b 都是正数，那么 $1/a<1/b$。

推论 5：如果 $a>b$，$c<d$，a、b、c、d 都是正数，那么 $a/c>b/d$。

推论 6：如果 $a>b$，a、b 都是正数，n 是大于 1 的整数，那么 $a^n>b^n$。

推论 7：如果 $a>b$，a、b 都是正数，n 是大于 1 的整数，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

关于不等式的解法，限于篇幅，在本书就不做介绍了。

1.2 幂的基本概念

在初等代数里，我们已经学过，在 $a\neq0$ 的时候，n 个 a 的连乘可以用 a 的 n 次幂来表示，记作：

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n个}$$

其中 a 叫做底数，n 叫做幂指数。当 $n>0$ 的时候，$a^n = a^n$；当 $n=0$ 的时候，$a^n = a^0 = 1$。并且我们规定 0^0 没有意义。当 $-n<0$ 的时候，$a^{-n} = 1/a^n$。上述这些等式成立的条件是 $a \neq 0$，且 n 为整数。上述概念可以推广到 n 为分数时的情形。以上正整数指数幂，负整数指数幂，零指数幂，分数指数幂统称为有理数指数幂。

有理数指数幂有以下一些主要性质：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

(4) $a^m/a^n = a^{m-n}$

以上所讨论的只是与我们在处理数据时有关的一些性质。在检定测试与数据处理过程中，我们经常用到的是10的正整数次幂和10的负整数次幂的情形。在上述四条性质中，限定条件为，a、b 都是正实数，m、n 都是有理数。

如某检定装置的综合误差为万分之三，若写成3/10000则既占地方又不简便，一般应写成 3×10^{-4}。又如某仪器的分辨率为百万分之一，写成10的整数次幂的形式，就是 1×10^{-6}。

1.3 数列的基本概念

在日常生活中，我们常常会发现这样的现象：如时钟的摆，一秒钟它摆动2下，2秒钟摆动4下，3秒钟摆动6下，一般地说，n 秒钟摆动 $2n$ 下，从而得到一串数：

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots$

又比如，一个人做一件事，如2人来做，就各做1/2；

3人来做，各做1/3；这样下去，一般地说：n个人来做，各做$1/n$。从而也就得到一串数

$$1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots$$

象上面这样，依照某种法则排列的一列数，称为数列。

在数列里的每一个数，叫做数列的一项，在第n个位置上的数叫做第n项（或者叫通项），通项常用符号a_n表示。如果一个数列的通项a_n和项数n之间的关系可以用一个公式表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式。下面简单介绍一下等差数列和等比数列：

1.3.1 等差数列

定义 如果一个数列，从第二项起，每一项减去它的前项所得的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫这个等差数列的公差。

等差数列的公差通常用字母d表示。

首项为a_1，公差等于d，通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

等差数列前n项的和S_n为：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

由此可见，等差数列前n项的和等于这个数列的第一项与第n项之和的一半的n倍。

1.3.2 等比数列

定义 如果一个数列，从第二项起，每一项和它前项的比都等于同一个常数，那么，这个数列就叫做等比数列。这个常数就叫这个等比数列的公比。

等比数列的公比通常以q表示。

首项为a_1，公比为q的等比数列的通项公式为：

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

等比数列前 n 项和 S_n 为：

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

上式的意义为，公比不为 1 的等比数列，前 n 项的和等于第一项乘以 1 减去公比的 n 项幂的差，再除以 1 减去公比的差。

例 1：已知 1，2，3，4…n 组成一数列，问该数列是什么数列？写出通项公式，并求出第 100 项的值。

解：因为该数列的每一项与前一项之差却都等于 1，所以该数列是等差数列。它的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$。

即 $a_n = n$

则第 100 项的值为：

$$a_{100} = 1 + (100-1) \times 1 = 100$$

实际上，上述数列就是自然数集。

已知：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，… $\frac{1}{2^n}$ （$n \geqslant 0$）组成一等比数列，求公比 q 和前 4 项的和。

解：按公比的定义，则

$$q = a_2/a_1 = a_3/a_2 = 1/2 \Big/ 1 = 1/4 \Big/ 1/2 = \frac{1}{2}$$

按等比数列求和公式 S_4 为：

$$S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1 \times \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

1.4 变量和函数

在日常生活和检定、测试中，我们常常碰到一些变化着的量，譬如：一昼夜的温度；对某量进行多次测量所得数据

等。这种在某一过程中可以取不同数值的量，称做变量。与此相反，还有一些量在某一过程中保持相对不变的数值，如基准电池，基准铂电阻温度计等，称为常量。

一个量究竟是常量还是变量，并不是绝对的，同一个量在某种情况下是常量，可是在另外一种情况它可能又成了变量。所以，确定一个量是常量还是变量，要依当时当地具体情况而定。

那么，什么是函数呢？函数就是变量之间的依赖关系。确切的说，也就是：设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随着变量 x 变化，对于变量 x 在变化过程中取得的每一个值，按照一定的规律，变量 y 总有一个确定的值与之对应。这时，我们就说 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量。f 是个函数符号，表示 x，y 之间具有某种函数关系。$f(x)$ 可以代表 x 的任何函数，如代表 x^2，$\sin x$ 等等。即 $f(x)=x^2$，$f(x)=\sin x\cdots$。注意：f 与 (x) 之间没有乘的意思。

当我们把一个具体的函数，如

$$y=2x^2+5x+1$$

用 $y=f(x)$ 的函数关系来表示时就有：

$$f(x)=2x^2+5x+1$$

这时函数"$f(x)$"表示这样的对应规律：对应的 y 值，是由括号内的 x 值经过如下运算得到的，即

$$2(\quad)^2+5(\quad)+1$$

当自变量 x 取某一个定值 x_0 时，对应的函数值用符号表示为：

$$f(x_0) \qquad \text{或} \qquad y|_{x=x_0}$$

例如：对于函数 $y=2x^2+5x+1$

当 $x=0$ 时，$f(0)=2(0)^2+5(0)+1=1$；
当 $x=2$ 时，$f(2)=2(2)^2+5(2)+1=19$；
当 $x=-2$ 时，$f(-2)=2(-2)^2+5(-2)+1=-1$；
当 $x=x_0$ 时，$f(x_0)=2x_0^2+5x_0+1$。

由上面的例子我们可以看出，只要用 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x，就可以得到函数 $y=f(x)$ 在一点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$。

在介绍了函数的基本概念的基础上，我们再来介绍增量的基本概念。

我们先举一个例子。有一钢轨，在温度为 t_1 时，测得其长度为 L_1；当温度增加到 t_2 时，钢轨由于受热膨胀，测得其长度为 L_2，我们将它们的变化表示为：

$$t_2-t_1=\Delta t$$
$$L_2-L_1=\Delta L$$

Δt、ΔL 称为温度、钢轨长度的增量。所谓增量，就是某一物理量从一种状态变化到另一种状态时的变化量。

一般来说，对于函数 $y=f(x)$，当自变量从 x_0 变到 x_1 时，相应地函数从 y_0 变到 y_1，我们就称 x_1-x_0 为自变量增量，记为 Δx；y_1-y_0 为函数增量，记为 Δy。增量的几

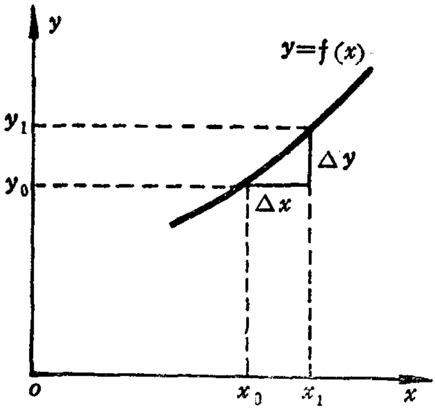

图 1　增量的几何意义

何意义如图1所示

1.5 关于Σ符号的意义

在数据处理的过程中，我们常常碰到求某一数列的和。

例如：求和 $1+2+3+4+\cdots+n$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

为了书写简便，我们就以希腊字母Σ(读作“西格玛”)来表示和。据此，上边的两个式子可分别写为

$$\sum_{A=1}^{n} A=1+2+3+\cdots+n$$

$$\sum_{m=1}^{n} A_m=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

这就是说，$\sum\limits_{A=1}^{n} A$，$\sum\limits_{m=1}^{n} A_m$ 表示依次用 $A=1,2,3\cdots n$ 及 $A_m=a_1, a_2, a_3\cdots a_n$ 代入后全部加起来。

例 1：计算下列和式的值

(1) $\sum\limits_{i=1}^{6} 2i$; (2) $\sum\limits_{i=1}^{5} 3i^2$

解：(1) $\sum\limits_{i=1}^{6} 2i=2(1)+2(2)+2(3)+2(4)+2(5)+2(6)$

$$=2+4+6+8+10+12=42$$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{5} 3i^2=3(1)^2+3(2)^2+3(3)^2+3(4)^2+3(5)^2$

$$=3+12+27+48+75=165$$

例 2：写出下列和式的各项

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} 2i$; (2) $\sum\limits_{i=1}^{n} 3i^2$