

符号逻辑基础

宋文滢 著

北京师范大学出版社

前 言

用作学说名称的“逻辑”，古往今来曾被赋予各种不同的涵义。在一种很狭窄也是很古老的意义上，逻辑就是指后来所谓的形式逻辑，亦即演绎逻辑，被说成关于演绎推理的学说，包括对基于演绎推理的演绎系统和演绎方法的研究。形式逻辑学说在19世纪下半叶发生了划时代的变化，以致被分为传统的和现代两种类型。后者是形式逻辑走向完善和博大精深的发展，它在方法、目的和观念上都与现代数学相联系，因此一开始就被称为数理逻辑，又称符号逻辑。现代形式逻辑产生的标志是G. 弗雷格创建了一种堪称完备的、演算化的一般演绎推理理论，即所谓经典的谓词逻辑。经过后人研究，在逻辑科学得到长足发展的今天，经典的一阶谓词逻辑（包括经典的命题逻辑作为更基本的部分）成为现代形式逻辑的基础。鉴于近几十年又在此基础上开发出大量的、内容有所不同但仍可视为推理学说的、非经典的逻辑理论，并被统称为在意义上多少有别于“数理逻辑”的“哲理逻辑”，我们这里把现代形式逻辑称为符号逻辑。

如今，由于符号逻辑的实践和理论应用十分广泛，人们都应该至少具有这方面的基础知识。本书是符号逻辑的入门书。除了假定读者具有高中文化程度外，可以说不要求具备更多的预备知识。作为绪论的第一章中特地为初学者较详细地讲述符号逻辑的对象、方法和发展概貌。第二章以直观的方式讲述经典命题逻辑，为的是较浅显地介绍一些基本的逻辑概念。第三章介绍经典的命题演算，即命题逻辑的形式系统。第四章在作较简短的直观说明之后介绍经典一阶谓词演算。在讲述逻辑形式系统时，都首先介绍

形式公理系统并证明其可靠性和完备性,然后介绍自然推演系统,并证明这两种系统的等价性。

本书正文在取材上追求简练扼要,有些内容是作为习题提出的。读者可从书末所列各参考书中获得某些方面的更详尽或更进一步的知识。当本书用作高等学校有关课程的教材时,教师可根据教学目的,针对不同的教学对象作不同的处理和提出不同的要求。例如,第一章不去细讲;忽略往后章节中的某些内容;不要求学生解决较难的习题;在形式推演能力上,着重要求学生掌握比较容易的自然推演技能。

谨向作者的老师们以及所有对本书的写作和出版有所帮助和支持的人们致谢。

作 者

1992年元月于北京

内 容 简 介

本书介绍经典逻辑演算的基本内容。这些内容构成符号逻辑(亦即现代形式逻辑,广义的数理逻辑)的基础。绪论中特地为初学者较详细地讲述符号逻辑的对象、方法和发展概貌。正文由直观到形式地讲述经典的命题逻辑和一阶谓词逻辑,给出和讨论它们的形式系统,包括形式的公理系统和自然推演系统。本书着力于讲清基本概念和基本方法、重点和难点,既注重理论阐述又注重技巧介绍。可用作高等学校文科和理工科有关课程的教材,也适用于自学和有关人员参考。

目 录

前言	(iii)
第一章 绪论	(1)
1.1 命题及其逻辑关系	(1)
1.2 联结词和量词	(5)
1.3 逻辑真理和逻辑推论	(9)
1.4 词项和定义	(12)
1.5 公理系统和形式系统	(18)
1.6 传统形式逻辑	(24)
1.7 现代形式逻辑	(30)
第二章 命题逻辑	(37)
2.1 命题联结词和复合命题	(37)
2.2 真值表和真值函数	(43)
2.3 重言式	(53)
2.4 重言蕴涵和可有效推演	(64)
2.5 联结词集的完备性	(73)
2.6 对偶和范式	(79)
第三章 命题演算	(92)
3.1 命题语言 \mathcal{L}_0	(92)
3.2 命题演算 P	(102)
3.3 P 的可靠性和完备性	(116)
3.4 命题演算 P_N	(129)
3.5 P 与 P_N 的等价性	(141)

第四章 一阶谓词逻辑	(150)
4.1 量词和谓词	(150)
4.2 一阶语言 \mathcal{L}	(164)
4.3 \mathcal{L} 的语义	(171)
4.4 \mathcal{L} 的语义(续)	(184)
4.5 一阶谓词演算 F	(207)
4.6 F 的可靠性和完备性	(220)
4.7 F 的完备性(续)	(231)
4.8 一阶谓词演算 F_N	(248)
参考文献	(267)

第一章 绪 论

1.1 命题及其逻辑关系

人们认识世界和思想交流都离不开语言。这通常是指如汉语、英语等自然语言，即各民族自然形成的口头语言以及在此基础上造成的书面语言亦即文字。它们本身不过是一些声音或记号的系统，被用来表达意思或信息。语言的功能可以归结为陈述事情、提出问题、表示意愿和抒发情感。语言中能表达一个完整意思的基本单位是句子。句子都有其内部结构，根据一定的语法规则构成。用来构成句子的语法单位有词、短语和分句。词有时又叫单词，短语指并非句子的词组，实即复(合)词。不含分句的句子称单句，含分句的句子称复句。

词和短语合称词语。词首先分为实词和虚词(或内容词和结构词)。在汉语中，实词包括名词、动词、形容词、数词、量词和代词；虚词包括副词、介词、连词、助词、语气词和象声词。词的意义从根本上说是指为词规定的使用范围，即其所指。就名词中的专有名词和普通名词说，前者的所指是特定的单个事物(对象)，后者的所指是一类事物中的每一个，或者说某些单个事物的集合。一词语的意义由其中的单词的意义决定。词语的意义称为概念。

句子的意义也最终由其中的单词的意义决定。其目的和内容属于陈述事情的句子叫做陈述句。一陈述句的所指可以直接看成

它所表述的事情。陈述句的意义称为命题。命题都是有真假可言的。按照通常的理解，命题都视其是否符合客观实在而是真的或假的。命题的真或假称为命题的真假值。人们常通过以肯定的语气给出一命题来断定该命题为真。为人们公认为真的命题就构成知识。科学理论就是被断定为真的命题的系统。

词语与概念，陈述句与命题(一般地说，句子与其意义)，分别作为表达者与被表达者，在实际上是紧密相联的。出于科学研究首先是语言学 and 逻辑学研究的目，有必要注意它们之间的区别。这首先表现为语言形式与其意义的区别，以及谈论词语和陈述句形式本身与使用它们来表达概念和命题的区别。就自然语言说，这还表现为同一概念或命题可由不同的词语或陈述句来表达，同一词语或陈述句可表达不同的概念或命题。前者是因为实际上存在着许多种自然语言，而在同一语言中又存在着单词异形同义或近义以及表达手段上的其他多姿多采现象。后者则因为，或者由于词汇上的同形异义或句法结构上的含混而使得一个词语或句子可有不同的意义，发生歧义或异解现象；或者由于使用“我，你，他，这，那，今天，去年，下星期”等指示词语而使得一个句子的确切意义依赖于语境，即上下文以及给出该句子时的实际情境。此外，人们还出于某种考虑，认为有些合乎语法的句子，例如“火星爱吃雷电”，谈不上有什么意义，或者说是无意义的，不表达命题(另一方面，也可以把这类陈述句看成表达了一个假命题)。在可以忽略上述区别的情况下，或者在把语言形式与其意义相结合来考虑时，人们常不加区分地使用“词语”与“概念”、“陈述句”与“命题”这两对术语。我们往后不时也将这样做，请读者注意识别。我们还将把“陈述句”简说成“句子”，因为我们这里只涉及陈述句。

命题常互有联系，特别是存在着某种确定性的真假制约关系：某一或某些命题的真或假决定着另外某些命题的真或假。这可由三种不同的原因造成。先看下面两个命题：

(1) 人们恣意捕杀野生动物,

(2) 野生动物很快就要灭绝。

如果(1)是真的,那么(2)也就将是真的。这是因为(1)所指的事情是(2)所指的事情的原因或充分条件。

其次,看下面四个命题:

(3) 那个数是偶数,

(4) 那个数是能被 2 整除的整数,

(5) 那个数是有理数,

(6) 那个数是奇数。

当其中所说的“那个数”是指同一个数时,无论它们是指哪一个数,也无论这四个命题事实上是真是假,(3)与(4)是同真假的,通称等值的:如果(3)是真的,那么(4)就是真的;如果(3)是假的,那么(4)就是假的;反之亦然。这是因为“偶数”与“能被 2 整除的整数”这两个名词词语的所指完全相同。再者,如果(3)是真的,则(5)是真的;而如果(3)是假的,(5)却不一定是假的。这是因为“偶数”是“有理数”的(真正的)下义词,“偶数”的所指作为集合真包含在“有理数”的所指之中。最后,如果(3)是真的,则(6)是假的;如果(3)是假的,(6)可能真也可能假。这是因为“偶数”与“奇数”的所指作为集合是相排斥的,二者没有任何共同的元素,而且事实上如 0.5 和 $\sqrt{2}$ 都是既不属于偶数也不属于奇数的数。总之,命题间的这类真假制约关系都主要起因于有关的实词词语之间的意义上的关系。

现在来看(3)与

(7) 并非那个数是偶数。

(7) 是在整个(3)之前加“并非”二字,是对(3)的否定。在同一上下文,中,(3)与(7)是相矛盾的:无论它们事实上是真是假,它们中必定有一个是真的,另一个是假的;如果已知其中某一个是真的,那么另一个就一定是假的;如果已知其中某一个假的,那么另一

个就一定是真的。这里的情况与前两种情况都不同，(3)与(7)之所以有上述真假关系，乃是起因于“并非”这个汉语中的副词从而是虚词所表示的否定意义。再看

(8) 那个数是偶数并且那个数是素数，

(9) 那个数是偶数或者那个数是素数。

正是根据“并且”和“或者”这两个连词从而是虚词的意义(注意，我们这里对“或者”只取其可兼的或相容的意义)，我们知道，如果(8)是真的，则(9)是真的；如果(8)是假的，(9)不一定是假的，亦即可能真也可能假。这种真假关系，如同(3)与(5)以及(1)与(2)的关系，通常称为真正蕴涵关系，又称差等关系。在这里，(8)真正蕴涵(差等于)(9)。显然，(8)还真正蕴涵(3)。又如，(3)还与

(10) 如果那个数是偶数，则那个数不是素数

共同真正蕴涵

(11) 那个数不是素数。

就是说，如果(3)和(10)都是真的，那么(11)就是真的；如果(3)和(10)中至少有一个是假的，那么(11)就可能真也可能假。这主要是根据“如果……则”这个连词短语从而是虚词词语的意义。

当然，也还有复合的情形。例如，(3)还真正蕴涵

(12) 并非那个数是奇数。

这是既根据“偶数”和“奇数”两实词的意义又根据“并非”这一虚词的意义得知的。这种复合情况可以分解为：根据实词“偶数”和“奇数”的意义，如果(3)是真的，则(6)是假的；又根据虚词“并非”的意义，如果(6)是假的，则(12)是真的。因此，如果(3)是真的，则(12)是真的。另一方面，作类似的分解又可得：如果(3)是假的，则(12)可能真也可能假。

大致说，命题之间只是由其中的某些(汉语中的)虚词词语的意义决定的真假制约关系，就是命题之间的逻辑关系。所说的那些虚词词语称为逻辑词项，简称逻辑词。上面提到的“并非、并且、

或者、如果……则”都是常用的逻辑词。逻辑(这里指演绎逻辑或形式逻辑)的基本任务就是研究命题之间的上述确定性的逻辑关系,研究若干命题之间有无所说的某种逻辑关系。正如各门科学都研究它们特有的科学术语,也可以说,逻辑是专门研究逻辑词的。逻辑词是各门科学都不可少地要用到而又都不予研究的。这说明逻辑在科学体系中占有特殊地位,说明它具有极大的普遍性和最广泛的适用性。

1.2 联结词和量词

如同 1.1 节的例子所表明的,从语言学上说,所说的连词词语“并且”、“或者”和“如果……则”都是用来连接句子的,副词“并非”也是用来加于句子。作为逻辑词,它们统称为命题联结词。要注意的是,它们与比如说

(13) 那个数是偶数和素数,

(14) 那个数是偶数或素数,

(15) 那个数是非偶数

中的“和”、“或”及“非”是有所不同的。这里的连词“和”与“或”是用来连接词语的,副词“非”是加于词语的。在把这样的虚词也算作逻辑词的情况下,为示区别,我们另称之为词项联结词。当然,命题联结词与词项联结词是有联系的。就(13)和(14)说,它俩显然分别与(8)和(9)逻辑上等值或者说逻辑意义相同,因此可以在逻辑上把它们分别当作(8)和(9)来看待。(15)显然与

(16) 那个数不是偶数

逻辑上等值,而(16)(注意,其中的“不”也应算作某种词项联结词)又显然与(7)逻辑上等值。因此可以在逻辑上把(16)以及(15)都当作(7)来看待。这类问题牵涉到如何对句子作逻辑分析处理。

上面说到,命题之间的逻辑关系与那些命题事实上的真假无关。它们甚至只与那些命题中除逻辑词外的其他成分的同异有关,

而与那些成分事实上是什么样的也不相干。令 A, B, C 是任一命题,我们显然有:

‘ A ’与‘并非 A ’是逻辑上相矛盾的,

‘ A 并且 B ’逻辑上真正蕴涵‘ A 或者 B ’,

‘ A ’和‘如果 A 则 C ’逻辑上共同真正蕴涵‘ C ’。

‘并非 A ’, ‘ A 并且 B ’, ‘ A 或者 B ’, ‘如果 A 则 C ’表示命题的一种结构,一种逻辑结构。命题的逻辑结构,通常称为命题的逻辑形式,简称命题形式。命题形式不过是命题内容中某种一般的东西。命题之间的逻辑关系,就是某些种逻辑类型的命题之间的关系,因而也就是命题形式之间的关系。因此,又可以把逻辑的任务归结为研究命题形式之间的关系,并且说逻辑与命题的内容无关。

只就命题联结词这类逻辑词而言,事实上还存在具有更复杂的结构的命题。例如具如下逻辑形式的命题:

(17) 如果 (A 并且 B) 则(并非 C),

(18) (如果 A 则 B) 并且(如果 B 则 A),

等等;其中的括号是用来标明结构层次的。注意,‘如果 A 则 B ’与‘如果 B 则 A ’并不是(逻辑上)等值的。说起来,我们还有命题联结词“只有……才”。‘只有 A 才 B ’与‘如果 B 则 A ’等值。而(18)显然与

(19) 如果而且只有 A 则也才 B

等值。(19)通常简说成

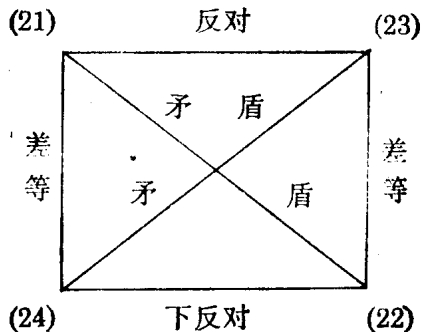
(20) A 当且仅当 B 。

这就是说,(20)与(18)等值。而“当且仅当”也被看成一种常用的、联结两个命题的命题联结词。上述命题形式都是由命题联结词和任意的命题构成的。在谈命题的这类逻辑形式时,我们只考虑命题中的命题联结词,只从命题中分析出命题联结词,而对其他成分可以最多分析到不含命题联结词的命题为止。

现在来看下面四个命题：

- (21) 偶数都是你说的那种数，
- (22) 偶数不都是你说的那种数，
- (23) 偶数都不是你说的那种数，
- (24) 偶数不都不是你说的那种数。

这四个命题中都含有加于词语的程度副词“都”。容易看出，(21)与(22)，(23)与(24)，如同(3)与(16)，是逻辑上相矛盾的。至于(22)与(23)，在把“不”和“都”都当成词项联结词的情况下，虽然它们都含有这两个逻辑词(其他成分相同)，由于这两个逻辑词的次序即位置不同，它们却不是逻辑上等值的。而(21)与(23)也不是逻辑上相矛盾的。根据对“不”和“都”的一种理解，(21)与(23)(如同(3)与(6))是不能同真，可以同假的，通称相反对的。而(23)逻辑上真正蕴涵(差等于)(22)。此外，(21)逻辑上真正蕴涵(差等于)(24)，而(22)与(24)是不能同假，可以同真的，通称互相下反对的。上述(21)—(24)两两之间的逻辑关系可以用下面的方阵图表示：



要特别指出的是，如果说我们可以把(22)和(24)分别当作

- (25) 并非偶数都是你说的那种数，
- (26) 并非偶数都不是你说的那种数

来看待,把(21)一(24)看成分别具有前面说的命题形式‘ A ’,‘并非 A ’,‘ B ’和‘并非 B ’,从而说明(21)与(22), (23)与(24)是逻辑上相矛盾的,那么,对于(21)一(24)两两之间的上述其他关系,是无法用类似的方法来说明的,就是说,无法通过把这些命题归结为前面说的那类命题形式来加以说明。为此,需要对所说的命题作更深入的分析,分析出其中的词语之间的逻辑关系,现在要考虑的其内容组成成分也不再能只是完整的命题而必须是非逻辑词语。我们还看到,比如说,命题(23)与

(27) 你说的那种数都不是偶数

逻辑上等值。而(3)与(23)逻辑上共同真正蕴涵

(28) 那个数不是你说的那种数。

现在,对(27),(3)和(28)也都必须分析到词语。

我们知道,“不都”相当于“有的不”,“不都不”相当于“有的”。习惯上人们又常把(21)一(24)分别说成或看成:

(29) 所有偶数(都)是你说的那种数,

(30) 有的偶数不是你说的那种数,

(31) 所有偶数(都)不是你说的那种数,

(32) 有的偶数是你说的那种数。

并把这里的“所有”和“有的”当作逻辑词,称之为量词(注意与汉语中的“量词”如“个、条、张、斤、里、亩”等相区别)。量词是与命题联结词以及词项联结词不同的另一类逻辑词。只研究命题联结词从而可以用完整的命题作为命题形式构件的逻辑理论通称命题逻辑;而着重研究量词从而需要以非逻辑词语作为命题形式基本构件的逻辑理论被称为词项逻辑。在逻辑发展史上,如果说对命题逻辑的研究其分析方法基本上一致的话,那么,对词项逻辑的研究就存在着有显著区别的学说,主要是对量词和含量词的命题采取不同的分析处理方法。

上面说到,逻辑词大致相当于汉语中的某些虚词,其实应该说

是某些具有普遍的哲学含义的词语,在这种意义上,逻辑也是对客观世界的研究。例如,命题联结词本身虽不是哲学概念,但“并非”用来表示与它相联的句子所指的事情不存在或未发生或已消失;“并且”用来表示两个(乃至更多)事情都实际存在;“或者”用来表示若干事情至少有一件实际存在;“如果 A 则 B ”表示事情 A (更确切地说, A 所表示的事情)是事情 B 的充分条件, A 发生 B 必发生。而量词“所有”和“有的”通常分别表示全体和部分。说起来,(29)一(32)中的“所有”和“有的”在汉语中不算虚词。此外,例如,叫做等词的“等同于”也被人们算作逻辑词,虽说它属于动词。又如助动词“必然”和“可能”,取其一定的意义,也都算逻辑词,即是所谓模态词。总之,什么词算作逻辑词,其界限不是十分明确的,主要看是否具有某种哲学意义。

1.3 逻辑真理和逻辑推论

逻辑要研究命题之间有无某种逻辑关系,主要是逻辑蕴涵关系,它包括逻辑上真正蕴涵(差等)关系和逻辑等值关系。一般地说,一命题集 Δ 逻辑蕴涵一命题 A ,当且仅当在逻辑上,如果 Δ 中的命题都是真的,那么 A 就是真的;也就是说,逻辑上不会 Δ 中命题都真而 A 假,如果 A 是假的则 Δ 中的命题至少有一个是假的。 Δ 可以是无穷集,作为特殊情形也可以是空集。而命题 A 和 B , A 逻辑等值于 B 当且仅当 A 逻辑蕴涵 B 并且 B 逻辑蕴涵 A 。如果 A 逻辑蕴涵 B 但是 B 不逻辑蕴涵 A ,那就是 A 逻辑差等于(真正蕴涵) B 。与逻辑蕴涵关系密切相关的是逻辑上不相容关系。一般地说,一命题集 Δ 是逻辑上相容的,当且仅当 Δ 中的命题在逻辑上可以都是真的。不然的话,即 Δ 中命题在逻辑上不能都是真的。而命题 A 和 B (亦即命题集 $\{A, B\}$)是不相容的,当且仅当 A 与 B 或者是相矛盾的或者是相反对的。不难看出, Δ 逻辑蕴涵 A ,当且仅当 $\Delta \cup \{\text{并非 } A\}$ (即 Δ 与仅由‘并非 A ’构成的命题集的并集)是

逻辑上不相容的。

正如(举例说)物理学和生物学分别研究物理学上的和生物学上的真理(即真命题),人们还说逻辑是研究逻辑真理的,它要鉴别逻辑上真的命题与并非逻辑上真的命题。所说逻辑真理,是指只由于其中逻辑词的意义就为真的命题;换句话说,是单凭其逻辑形式就必定真的命题。例如,具有如下形式的命题都是逻辑真的:

如果 A 则 A ,

A 或者(并非 A),

并非(A 并且(并非 A)),

如果(A 并且 B)则(A 或者 B),

如果((如果 A 则 B)并且 A)则 B ,

(A 或者 B)当且仅当(如果(并非 A)则 B)。

这些命题形式被认为表示逻辑定律。例如其中前三个被分别称为同一律,排中律和(反)矛盾律。由于任何科学都使用一定的逻辑词,因此任何科学体系中都包括一部分逻辑真理。顺便在这里指出,人们把能够完全基于其中词语的意义而知其真假的命题称为分析性命题,否则称为综合性命题。逻辑真命题都是分析性真命题,而分析性真命题不都是逻辑真命题。

由于逻辑真命题不依赖于(相对于形式而言的)内容而总是真的,因此,一命题是逻辑真的,当且仅当任何命题集(包括空集)都逻辑蕴涵它。一逻辑真命题的否定命题总是假的,是只由于其中逻辑词的意义就为假的命题,称逻辑假命题。再者,设一有穷的命题集是 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ($n \geq 1$)。于是, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 逻辑蕴涵命题 B ,当且仅当

如果 $[A_1$ 并且 A_2 并且 \dots 并且 $A_n]$ 则 B

是逻辑真的。

人们经常依靠对命题之间逻辑蕴涵关系的觉察,由认定或假定若干命题都真,直接推断某一命题亦是或亦将是真的。这个过

程就叫逻辑推理,简称推理。推理通常表现为由若干命题出发,直接引申出某个命题。由之出发的命题叫前提,所引申出的命题叫结论。这里所说的推理,是指人的一种思维活动,一种心理活动和认知活动。推理可用来根据已有的知识获取推出的知识,还可以用来推测:如果出现某些假想的事情,会产生什么样的结果。与逻辑推理密切相关的一种思维过程是逻辑论证。与推理相比,论证不是由前提出发探求结论,而是为叫做论题的某一命题寻求该命题可以断定为真的逻辑理由,就是说,寻求一些叫做论据的已被认定为真的命题,而这些作为论据的命题要逻辑蕴涵那个作为论题的命题,亦即论题要能由论据合乎逻辑地引申出来。进行论证的目的是使自己或(和)别人有逻辑根据地相信某一命题是真的。

推理和论证作为心理学概念,它们的区别主要是思维活动和认识作用上的区别。它们的语言表现或语言记录都是论说。一个简单的论说通常由“所以”、“因此”之类的词语连接分别作为前提或论据与结论或论题的句子而成。无论它来源于推理还是论证,这样的论说在逻辑上叫做(逻辑)推论,“所以”前后的命题仍分别叫前提和结论。“推论”还用来指由某些命题直接引申出某一命题的操作或运算。

一般地说,推论有有效与否之分。一个推论,如果它的诸前提的确逻辑蕴涵它的结论,那么它就是有效的,否则不是有效的。换句话说,一个推论是有效的,当且仅当根据它的前提和结论的逻辑形式,它的前提都真则结论必真。从根本上说,作为其前提与结论的命题之间有无逻辑蕴涵关系,是一推论是否有效的依据。一推论有效与否,也只与它的前提和结论的逻辑形式有关,而与前提和结论事实上的真假乃至(相对于形式而言的)内容无关。推论的有效性也是一种逻辑形式问题。推论的逻辑形式(推论形式)由作为其前提和结论的命题的逻辑形式组成。形式有效而前提都真(从而结论也真)的推论特别称为完善的或健全的推论。逻辑包括对