比 例

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

比　　例

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社
一九五七年·上海

比　　　　　　例

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業營業許可証出015号

上海市印刷三厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：1 7/8　字数：42,000
1957年8月第1版　1957年8月第1次印刷
印数：1—60,000本

統一書号：13076・84
定　　价：(7)0.18元

序　言

本会为了帮助教师学习苏联先进教学經驗，积极提高教学質量，并根据当前中学数学实际需要，决定編写一套有关初、高中数学各科包括算术、代数、几何、三角的教学参考讀物，陆續出版，以便中学数学教师进一步研究和了解教材內容；从而更好地掌握教材的目的性．同时这套小册子也可供初、高中学生作为課外鑽研的补充讀物．我們希望通过这套小册子的出版，能促进数学界同志对中学数学教材的研究，并促进教学經驗的交流．

“比例”这本小册子是根据“中学数学教学大綱”（修訂草案）中“比例、成正比例的量和成反比例的量”編写的．首先叙述比的意义，由于把量的关系抽象成数的关系，所以比与除法的意义完全相同．关于量的相依性，主要叙述成正比例的量和成反比例的量．由归一法导出各种比例解法，并发揚我国古代解决比例問題的方法——今有术的特色；同时避免机械地运用公式．最后，叙述利用百分比及統計图表来表达量与量之間的相依关系．

本会在編写本册前，曾拟就編写計划，經編輯組兩次討論，才确定初步提綱．然后分别由黄公安、胡冠瓊、尤彭莘三同志提供材料，由范际平同志执笔写成初稿．再經程其襄、楊荣祥、黄公安、夏守岱諸同志校訂，最后由范际平同志作了修正．虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正．

中国数学会上海分会中学数学研究委員会

1957 年 2 月

目　录

一　比的意义及其基本性質

1. 比的意义　我們已經知道比的概念是从量的測定概念得来的．例如：一个長方形的高是6厘米，它的底是2厘米，我們按照長短来比較長方形的高及底，很清楚地高是底的3倍，即$6\div2=3$．又如：一个長方形的高是4厘米，它的底是6厘米，我們也按照長短来比較長方形的高及底，很清楚地高的長是底的長的$\frac{2}{3}$倍，即$4\div6=\frac{2}{3}$．因而我們获得比的定义：**所謂一个量对另一个量的比就是在同一單位之下測定第一个量的数与測定第二个量的数相除得的商**．上例都是用厘米做單位．第一种情况，我們說長方形的高与它的底的比是$6\div2=3$，記为$6:2=3$；第二种情况，我們說長方形的高与它的底的比是$4\div6=\frac{2}{3}$，記为$4:6=\frac{2}{3}$．再說一块黃銅中，鋅的重量是5公斤8公兩，銅的重量是8公斤7公兩，求它們的重量的比．如果我們用公斤做測定單位，由于5公斤8公兩$=5\frac{8}{10}$公斤$=5\frac{4}{5}$公斤，8公斤7公兩$=8\frac{7}{10}$公斤．那末黃銅中銅的重量对鋅的重量的比是$8\frac{7}{10}:5\frac{4}{5}=8\frac{7}{10}\div5\frac{4}{5}=\frac{87}{10}\div\frac{29}{5}=\frac{87}{10}\times\frac{5}{29}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$．如果我們用公兩做測定單位，黃銅中銅的重量对鋅的重量的比是$87:58=87\div58=\frac{87}{58}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$．所得的結果是相等的．

我們曉得数学是反映量的共同性和抽象性的学科，因而我們只要把它定义为：**一个数被另一个数除所得的商叫做这兩个数的比**，便可以反映出宇宙間同类量相比的意义．又第一个数（被除数）叫做比的前項，第二个数（除数）叫做比的后項．由于零不能做除数，所以比的后項不能是零．在这种限制下，比的前項是可以为零的，我們曉得这时的比是零．这样一来，商、分数、比三者在本質上是一样的了．所以分数、比的記法都与商的記法有关連．

由于百分数是分母为100的分数，所以百分数里面第三类問題："求一个数对于另一个数的百分数"，自然可以用比来表示．这种比我們叫做百分比．例如：在300克的食鹽水里含有15克的食鹽，食鹽的重量占食鹽水重量的百分比是$15:300=\frac{15}{300}=\frac{5}{100}$，即$5:100$．

也有人認为除法中"等分的問題"不是比的問題，如5个小孩平分20斤梨，它的結果只能說是商，而不能說是比．因为这兩个量不是同类量，所以是不能相比的．我們只能理解为20斤÷5=4斤，不能理解为20斤：5=4斤．也就是算式$\frac{20斤}{5}$，只能理解为相除的商，而不能理解为比．这样一来，比与商似乎是有明显的差异，但如果我們对于这个問題的算式不用$\frac{20斤}{5}$，而改用算式$\frac{20}{5}$(斤)，那就表示我們要求的斤数等于"20这个数对5这个数的比"．比的意义与商的意义完全一致，使得問題要單純得多．而且我們还可以考虑到兩个不同类量的比，在日常生活中是常常要碰到的．例如：一个物体在直綫上运动的快慢是均匀的，

且已知它在 $2\frac{1}{2}$秒中向前移动 20 米，問这个物体每秒鐘行多少米？如果我們写成算式$\frac{20}{2\frac{1}{2}}$(米/秒) =8 (米/秒)，不是反映出兩个不同类量可以相比嗎？这个比是一个新的量，我們叫它“速度”.又如：体积是 20 立方厘米的物体重 16 克，要求 1 立方厘米的同样物体重多少克？如果我們写成算式$\frac{16}{20}$(克/立方厘米) = 0.8 (克/立方厘米)，不是也反映出兩个不同类量可以相比嗎？这个比也是一个新量，我們叫它“密度”．所以这种定义要广泛得多．

假如比的前后項对調（前項不为零），则所得的比叫做原来比的反比．例如 3:6 是 6:3 的反比．

2．比的基本性質 我們已經知道兩个数的比，等于兩个数相除的商．其中比的前項相当于被除数，比的后項相当于除数．所以兩个数的比就应当具有它們相除的商的一切性質．我們提出下面比較基本的几个性質．

（i）比的前項可以是任何数(整数、分数或小数)比的后項可以是零以外的任何数(整数、分数或小数)．

（ii）前項等于比乘后項的积．

如果我們知道比和它的后項，可以应用这个性質求出它的前項来．

例 房間的寬度是 $8\frac{7}{10}$公尺，房間長度对它的寬度的比等于$\frac{4}{3}$，求这房間的長度．

【解】 設房間的長度是 x 公尺，则得 $x:8\frac{7}{10}=\frac{4}{3}$,

$$\therefore\quad x=8\frac{7}{10}\times\frac{4}{3}=\frac{87}{10}\times\frac{4}{3}=\frac{29\times2}{5\times1}=\frac{58}{5}=11\frac{3}{5}.$$

答：这房間的長度是 $11\frac{3}{5}$公尺.

(iii) **后項等于比除前項的商.**

如果我們知道比和它的前項，可以应用这个性質，求出它的后項来.

例 甲乙二人存儲有獎儲蓄，甲对乙所存金額的比是 2∶3，如甲存儲 16 元，問乙存儲多少元？

【**解**】 設乙存儲 x 元，則得 $16:x=\frac{2}{3}$，

$$\therefore\quad x=16\div\frac{2}{3}=16\times\frac{3}{2}=24.$$

答：乙存儲 24 元.

又如用 2∶3 的反比 3∶2 演算，則問題变为已知比和它的后項求它的前項.即 $x:16=\frac{3}{2}$，

$$x=16\times\frac{3}{2}=24.$$

答：乙儲存 24 元，結果是相同的.

(iv) **比的前項和后項用一个数（但不是零）去乘或者除，比的值不变.**

例如 4∶6 可約为 2∶3，也可扩为 12∶18，由于比具有这种性質，比的前項或后項如是分数，我們可以化它們为整数. 这样一来，比的形式簡單一些，而且意义亦較明确些.

例 某国营面粉工厂，从 $11\frac{2}{9}$公斤小麦里，可以磨得 $8\frac{5}{12}$公斤的面粉，求面粉重量和小麦重量的比.

【解】 $8\frac{5}{12}:11\frac{2}{9}=\frac{101}{12}:\frac{101}{9}=(\frac{101}{12}\div 101):(\frac{101}{9}\div 101)$

$=\frac{1}{12}:\frac{1}{9}=(\frac{1}{12}\times 36):(\frac{1}{9}\times 36)=3:4.$

二 比例的意义及其基本性質

1. 比例的定义 讓我們先看一个具体的例子：

底是3厘米而高分別是2厘米、3厘米、4厘米、5厘米、6厘米的諸三角形，計算其中任意兩个三角形面积的比，并且將所得結果与三角形对应的高比較．如第二个三角形与第四个三角形面积的比是$\frac{1}{2}\times 3\times 3:\frac{1}{2}\times 3\times 5=9:15=3:5=\frac{3}{5}$．而对应高的比也是 $3:5=\frac{3}{5}$．可見兩个比相等．如果我們用等号把这兩个相等的比連接起来，即$9:15=3:5$．这个等式叫做比例．

同样，第一个三角形与第五个三角形面积的比是$\frac{1}{2}\times 3\times 2:\frac{1}{2}\times 3\times 6=3:9=1:3=\frac{1}{3}$，而对应高的比是$2:6=1:3=\frac{1}{3}$，也得到兩个相等的比，因得比例$3:9=1:3$．

一般說起来，**表示兩个比 $a:b$，$c:d$ 相等的式子叫做比例**．写做$a:b=c:d$．讀做a对b的比等于c对d的比．組成比例的四个数a、b、c、d叫做成比例的数．它們的次序是按照原来的順序．

由于比例中兩个相等的比各有一个前項和一个后項，所以每一个比例中都有兩个前項和兩个后項．这些項同样地也叫做比例的項．在一个比例中第一个比的前項和第二个比的后項叉

叫做比例的外項，第一个比的后項和第二个比的前項又叫做比例的內項.例如，比例 $a:b=c:d$，a 和 d 兩項是外項 b 和 c 兩項是內項.

2. 比例的基本性質 我們曉得 $6:9=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$，$8:12=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，所以这兩个比是相等的，因得比例 $6:9=8:12$. 根据比例的性質，前項等于比乘后項的积，即 $6=9\times\frac{2}{3}$，$8=12\times\frac{2}{3}$. 这样一来，上面比例可以写为 $(9\times\frac{2}{3}):9=(12\times\frac{2}{3}):12$. 現在看兩个外項的积 $=(9\times\frac{2}{3})\times 12$，兩个內項的积 $=9\times(12\times\frac{2}{3})$，再根据乘法的交換律与結合律得 $(9\times\frac{2}{3})\times 12=9\times(12\times\frac{2}{3})$，

即
$$6\times 12=8\times 9.$$

一般說来，比例 $a:b=c:d$. 如用 k 表示相等比 $a:b$，$c:d$ 的值，按比的性質——前項等于比乘后項的积，则

$$a=b\times k,\qquad c=d\times k.$$

而比例可写为 $(b\times k):b=(d\times k):d$. 兩外項的积 $=(b\times k)\times d$，兩內項的积 $=b\times(d\times k)$. 再根据乘法的交換律与結合律得

$$(b\times k)\times d=b\times(d\times k).$$

$$\therefore \qquad a\times d=b\times c.$$

我們也可以用下面的方法来証明，

在比例 $\qquad 6:9=8:12$ 中

如果用第一个比 $6:9$ 的后項 9 来乘它，应当等于前項 6；同样如果用第二个比 $8:12$ 的后項 12 来乘它，应当等于前項 8. 虽然这兩个比是相等的，但由于用不同的数分别去乘，所以它們的乘积是不会相等的. 但如果我們用这兩个比的后項乘积 9×12

去乘它們,便应当相等.因

$$(6:9)\times 9\times 12=(8:12)\times 12\times 9,$$

即 $$6\times 12=8\times 9.$$

一般說来,如 $a:b=c:d$,用 $b\times d$ 去乘这兩个比所得結果应当相等. 即 $$(a:b)\times b\times d=(c:d)\times b\times d,$$

$\therefore$ $$a\times d=c\times b.$$

因而获得比例的一个基本性質: **兩个外項的积等于兩个內項的积**.讓我們再推究它的逆命題是不是成立. 例如:

$$6\times 12=8\times 9.$$

我們在第一个积中取一数設为 12,在第二个积中取一数設为9,然后用这兩个数的积 12×9 去除每一个所与的积. 由于这个乘积是相等的数,現在用相同的数去除它們,所得的商自然还是相等的.因得 $\dfrac{6\times 12}{12\times 9}=\dfrac{8\times 9}{12\times 9}$, 即 $6:9=8:12$.

便获得原来的比例.

又由于我們从第一个积中取一数,再从第二个积中取一数可以組成四对数,因而我們可以获得四个比例.又由于改換在所得四个比例內的比的位置后,又可以得到四个比例.一共可以得到八个比例.

即 $6\times 12=8\times 9$

兩边同除以 12×9,得 $6:9=8:12$; (1)

改換比的位置,得 $8:12=6:9$; (2)

兩边同除以 12×8,得 $6:8=9:12$; (3)

改換比的位置,得 $9:12=6:8$; (4)

兩边同除以 6×9,得 $12:9=8:6$; (5)

改換比的位置,得 $8:6=12:9$; (6)

兩边同除以 6×8,得 $12:8=9:6$; (7)

改换比的位置，得　$9:6=12:8$.　　(8)

这一性質在一个积里的兩个因数都是零时是不成立的．例如 $0\times0=0\times6$，由于零不能做除数，所以就不能导出上面八个比例中任何一个．又每一个积里有一个因数是零，如 $0\times3=0\times4$，則也只能导出 $0:4=0:3$ 和 $0:3=0:4$ 兩个比例来．我們观察上面 8 个比例，都是由一个积的兩数作为外項，另一个积的兩数作为內項構成的．又在兩数的积等于其它兩数的积（积都不为零），必須按照一个积的兩因数为外項，而另一个积的兩因数为內項的安排方法写出比例来．不可把这四个数随意乱排．如上例写做 $6:12$，$9:8$ 那就不相等了．

上面八个比例，如果用(1)　$6:9=8:12$　为标准．

拿比例(3) $6:8=9:12$ 与它比較，

获得**如果交换比例的兩內項的位置，比例并不受到破坏**．又拿比例(5)　$12:9=8:6$ 与它比較，

获得**如果交换比例的兩外項的位置，比例并不受到破坏**．再拿比例(8)　$9:6=12:8$ 与它比較，

获得**如果比例的外項做內項，內項做外項，比例并不受到破坏**．

事实上由于比例的項如果按照上面的方法交换 (i) 交换兩內項 (ii) 交换兩外項 (iii) 外項换以內項，內項换以外項，并不破坏內外項乘积的相等性．所以这种交换是允許的．

要注意又一种特殊情况，如果有成比例的四个数，其間有兩个数相等，即 3、12、12、48，也就是 $3:12=12:48$ 或 $12:3=48:12$，由于兩个內項或兩个外項是相同的，所以这时只有四种不同的比例（除上面兩个比例外，还有兩个比例是 $12:48=3:12$，$48:12=12:3$）．

通曉了比例的基本性質后，应当引入关于給出三个数而求第四个与它們成比例的数的題目．例如給出 5、8 及 10 三个数，

求与它們成比例的第四个数.

設第四个数是 x,則 $5:8=10:x$.

按比例的基本性質 $5\times x=8\times 10$,

$\therefore\quad x=\dfrac{8\times 10}{5}=16$. (积除以乘数等于另一乘数)

答: 第四数是16.

如果原来题目对于所給的三个数沒有順序的規定，那就应当还有下面兩个解,

即 $8:5=10:x$;

按比例的基本性質 $8\times x=5\times 10$,

$\therefore\quad x=\dfrac{5\times 10}{8}=\dfrac{25}{4}=6.25$.(积除以乘数等于另一乘数)

又 $10:5=8:x$.

按比例的基本性質 $10\times x=5\times 8$,

$\therefore\quad x=\dfrac{5\times 8}{10}=4$.(积除以乘数等于另一乘数)

我們判别一个比例是否正确，自然可以根据比例的定义来檢查. 例如 $52:26=40:20$, 因为第一个比等于2, 第二个比也是2, 所以这个比例是正确的. 另外我們也可以用比例的基本性質来檢查，因为 $52\times 20=1040$, $26\times 40=1040$, 所以也可以証明这个比例是正确的.

三 成正比例的量

我們講授成比例的量是初步灌輸函数概念，应当通过一系列的例子,使学生先認識宇宙間兩个量之間的相依性.

例一 火車每时走40公里，它在兩小时内走多少公里?在

$2\frac{1}{4}$小时内呢？在 3 小时内呢？在 4 小时内呢？我們可列出下表：

时間(以小时为單位)	1	2	$2\frac{1}{4}$	3	4
距离(以公里为單位)	40	80	90	120	160

例二 从某村到城市的距离是 30 公里，如果自行車的速度是 8 公里/时，9 公里/时，10 公里/时，12 公里/时．將从某村到城市所需的时間列出下表：

距离(公里为單位)	30	30	30	30
速度(公里/时为單位)	8	9	10	12
时間(小时为單位)	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{3}$	3	$2\frac{1}{2}$

例三 長方形的底是 8 厘米，如果它的高是 1 厘米，2厘米，$2\frac{1}{4}$厘米，3 厘米，$3\frac{1}{2}$厘米，4 厘米，5 厘米，6 厘米，現在將長方形的面积和它的周長列出下表．

底長(厘米为單位)	8	8	8	8	8	8	8	8
高長(厘米为單位)	1	2	$2\frac{1}{4}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6
面积(平方厘米为單位)	8	16	18	24	28	32	40	48
周長(厘米为單位)	18	20	$20\frac{1}{2}$	22	23	24	26	28

例四 長方形面积是 6 平方厘米，如果它的底長等于 1 厘米，2 厘米，2.5 厘米，3 厘米，$3\frac{1}{3}$厘米，4 厘米，現在將長方形

的高列出下表.

面积(平方厘米为單位)	6	6	6	6	6	6
底長(厘米为單位)	1	2	2.5	3	$3\frac{1}{3}$	4
高長(厘米为單位)	6	3	2.4	2	1.8	1.5

例五 某城市居民的平均高度如下表:

年龄	1	5	10	15	20	25
高度(厘米为單位)	71	99	128	152	168	168

从上面几个例子可以看到，一个量因它一个量的变化而变化，就可以分为三种情况，1.第二个变化的量因第一个变化的量增加而增加. 例一中指出，如果速度不变，距离的量随时間的量增長而增加；例三中指出，如果長方形的底長不变，面积的量和周長的量都是随長方形的高量增加而增大. 2.第二个变化的量因第一个变化的量增加而减少. 例二中指出，如果距离不变，所需要时間的量随速度的量增快而减少；例四中指出，如果長方形的面积不变，長方形的高量随它的底量增長而减短.3.第二个变化的量因第一个变化的量增加首先是增加，然后停留不变.例五中指出，身長的量，随年龄的量增加而增長，但到了一定时期便会停留不变的.

如果从例三的表中，計算長方形的高量任兩个数值的比和長方形的面积量的对应数值的比：

如 $5:2=\frac{5}{2}=2.5$， $40:16=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}=2.5$，

可得比例 $5:2=40:16$.

又如　　　　$6:2=3$，　$48:16=3$，

可得比例　　　　$6:2=48:16$.

这两个量的相依性反映出一个量的任意两个值的比等于他一个量的对应值的比.这是两个量之間依存性的最單純的情况.我們叫这两个量为成正比例的量.通俗地說起来：**两个相依的量,如果其中的一个量扩大(或縮小)若干倍,另一个量跟着也扩大(或縮小)同样的倍数,这两个量就叫做成正比例的量.它們中間的变化关系叫做正比例关系.**

我們要明确地認識,并不是任何两个相依的量,其中一个量的数值随着另一个量对应的数值的扩大(或縮小)而扩大(或縮小)时,都是成正比例的量,如象例三的表中計算長方形的高量任两个数值的比和長方形的周長量的对应数值的比,

如　$5:2=\frac{5}{2}=2.5$，$26:20=\frac{26}{20}=\frac{13}{10}=1.3$;

而　　　　$5:2\neq26:20$.

可以看到它們是不相等的.那就是說一定的底長的長方形的周長与它的高長,不是成正比例的量.因而我們不能只看到两个相依的量,如果其中的一个量扩大(或縮小)若干倍,另一个量跟着也扩大(或縮小)若干倍,便說这两个量是成正比例的量.定义中的"同样的倍数"我們要特别注意.再回想講两数和时,曾經获得一个变化性質:若一个加数扩大(或縮小)另一个加数不变,那末和也扩大(或縮小).例如:

一个加数	2	3	4	6	8	10
另一个加数	5	5	5	5	5	5
和	7	8	9	11	13	15