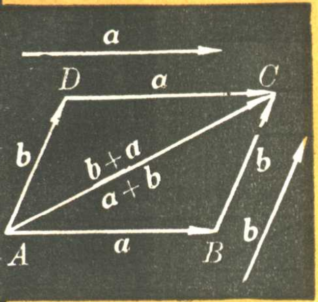


中学数学辅导丛书

# 向量

曹重光 王络群 编

黑龙江科学技术出版社

# 向　量

Xiangliang

曹重光　王路群　编

黑龙江科学技术出版社

一九八四年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：仁　之

**向　　量**

曹重光　王路群　编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
黑龙江新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张3.1875·字数60千
1984年8月第一版·1984年8月第一次印刷
印数：1—45,000

书号：13217·102　　定价：0.41元

# 前　　言

根据《全日制重点中学数学教学大纲（草案）》规定，中学数学教材增加了行列式、矩阵、向量、集合、逻辑代数、概率和微积分等内容，为了帮助广大中学师生正确理解和掌握这些新内容，我们组织编写了这套《中学数学辅导丛书》。它包括行列式、矩陈和线性方程组、向量、集合、逻辑代数、极限与连续、复合函数的导数、导数的应用、不定积分、定积分的应用、随机变量等。

这套丛书密切结合现行全日制六年制重点中学数学课本，全面地介绍了课本中增加的新内容，并适当地做了拓宽和加深，以利于教学使用。

由于我们编写丛书的经验不足和水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以便今后改进，使本丛书成为广大中学师生有益的参考书。

葛桨　戴再平　韩殿发

一九八二年十月

# 目　　录

# 一、平面向量

## （一）向量的意义

在物理学中，我们经常碰到两种量：一种量，如距离、体积、质量、温度、功等，当单位确定之后，它们都可以由一个实数值来确定．例如，温度为 - 3 ℃，质量 5 克，体积 $2cm^3$ 等。这种只有数值大小的物理量称之为**标量**；另一种量，如位移、力、速度、力矩、磁场强度等，仅用一个数值还不能反映它们的全貌，我们说 2 公斤的力，还必须同时指出这个力的作用方向．我们说某船自某港出发航行了 10 浬，同时需指明航向．这种既有大小又有方向的物理量称之为**物理向量**．

把物理向量加以抽象概括，再综合其他有关的研究对象就可以提出数学向量的概念了。为了形象化、直观化，我们首先叙述平面上的几何向量．精确地叙述平面上的几何向量这一概念，是离不开它的运算的．但现在尚未定义它的有关运算，因此只能粗略地把平面上用箭头表示方向的线段，即**有向线段**称为向量（严格的定义放到“对平面向量的再认识”一节来叙述）。为方便起见，向量所在的平面被认为是事先确定好的，叙述中往往被省略．

散见于各书中的表示向量的方法很多，例如，可以用一个小写的粗黑体字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等来表示；又如用一个粗黑体

大写字母例如 $\boldsymbol{F}$ 或（带箭头）$\vec{F}$ 等来表示；或者用两个大写字母（粗黑体）如 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{CD}$ 或（带箭头）$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 等来表示．此时第一个字母表示有向线段的始点，第二个字母表示有向线段的终点（如图 1-1）．不过，要注意，不要随意颠倒两个字母的顺序，颠倒了顺序就表示另外的向量了．如 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 往往表示两个不同的向量．本书中通常采用一个粗黑体小写字母或两个大写字母（带箭头）的表示方法（如上图 1-1）．

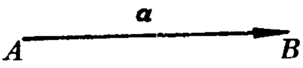


图 1-1

表示某个向量的有向线段的长度称为该向量的**模**．显然，向量的模不能是负数．（如图 1-1）向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，常记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$．

当某个向量被确定后，它的模和方向也就随之被确定．反之，当向量的模与方向都被给定后，是否完全确定了它在平面内的位置呢？不是的，因为作为向量的有向线段的始点位置未确定，只有再确定了始点（或终点）位置，它才能在平面上确定下来．我们把这种对于模、方向和始点都确定的向量称之为**固定向量**或**位置向量**．

此外，还有一类向量（如位移、速度等），它们在实际问题中起作用的只是模和方向，而始点的位置则不必考虑．例如，大风预报："8 级东南风"．它虽与区域有关，但与刮风区域内的每个具体地点位置无关．反映在数学向量上，我们把这种确定模和方向但不确定始点位置的向量称之为**自由向量**．换句话说，凡是模相等、方向相同的向量就被看成是相等的向量，在这种相等意义下的向量就被称为自由向量；另

一方面，由于位置向量的研究可以用自由向量去描述，因此，自由向量已成为向量研究中的主要对象。今后，如无特别指明，所说的向量均指自由向量。

于是，如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，那么它仅具有下列含意：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且当经过平移，使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点重合时，它们的终点也重合。例如，在图 1-2 的平行四边形 $ABCD$ 中，所给出的是两个不同的向量，它们是 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$，如上所述则有 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$。

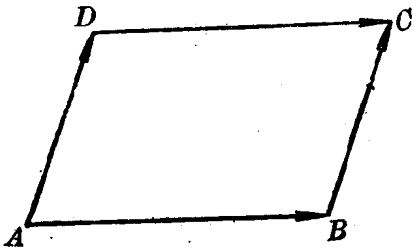

图 1-2

有了"相等"的定义，平面上的向量就可以相互比较了。

首先，考虑到作用于一点的模相等而方向相反的两个力互相抵消的情形，我们用"零向量"与"负向量"的概念来刻画这种"互相抵消"的状态，用零向量来描绘，记作 $\boldsymbol{O}$ 或

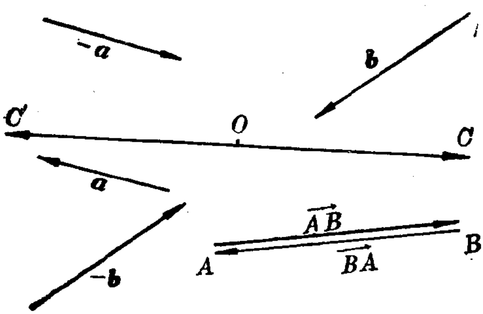

图 1-3

$\vec{O}$. 对于产生 $\boldsymbol{O}$ 的模相等而方向相反的两个向量(如图1-3中的 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OC'}$ 等)，我们分别称一个向量为另一个向量的**负向量**(无正向量之称，有别于数的正负)或**逆向量**. 其记法是以 $-\boldsymbol{a}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，或以 $-\overrightarrow{AB}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量. 不难看出，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ 如上图 1-3，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

在平面上，$O$ 被理解为始点与终点相重合的"有向线段"——点，即每个点都表示一个零向量. 从自由向量的观点出发，我们自然就可以规定每个"点"都是彼此相等的，因此 $\boldsymbol{O}$ 是唯一的向量. 仿照非零向量的有关定义，我们可以规定：(1) $|\boldsymbol{O}|=O$；(2) $-\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$. 并且由于非零向量的模为正数，故只有 $\boldsymbol{O}$ 的模才为 $O$. 于是，若 $|\boldsymbol{a}|=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{O}$ 是平面上唯一的仅由模确定的向量. ($\boldsymbol{O}$ 的方向是任意的，由于方向不固定，所以不定义 $\boldsymbol{O}$ 的方向).

为方便起见，当度量单位给定后，我们把模是 1 的向量称为**单位向量**. 由于 $|-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$，因此若 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量，$-\boldsymbol{a}$ 亦是单位向量.

另外，对于两个非零向量，它们之间除具有相等、不等或互为负向量的关系外，还可以用"夹角"的概念去描述.

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下述方法定义它们的夹角：在平面上任取一点设为 $O$，作以 $O$ 点为始点的有向线段 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$，使得 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 我们称 $\angle AOB$ (如图 1-4) 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 通常，规定 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$. 由向量相等的定义，不难看出夹角定义的单值性. 显然，

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$$

即存在对称性（请读者自证）.

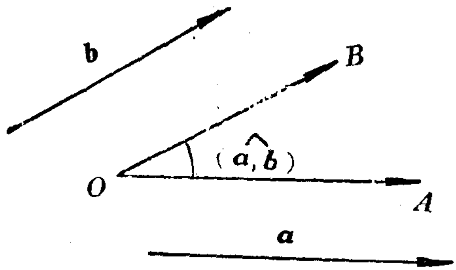


图 1-4

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 $\pi$ 时，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 显然，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=0$，$(\widehat{\boldsymbol{a},-\boldsymbol{a}})=\pi$。

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$ 时，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 易见，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{c}$（请读者自证）.

在这里不定义 $\boldsymbol{O}$ 与任何向量之间的夹角概念.

在向量之间，一般不引入大小的概念. 所谓速度和力的大小，是指模而言. 因此不要把不等号使用在向量之间，或向量与数量之间. 当然，用等号联结向量与数量也是不允许的. 至于向量之间，数与向量之间较为复杂的关系可在下列各种运算的研究中看到.

## （二）向量的运算

### 1. 向量的加法和减法

为了说明向量的加法，让我们先看下面的例子. 某人从 $A$ 地先向东行进 $10km$ 到达 $B$ 地，再从 $B$ 地向北行进 $5km$ 到达 $C$ 地，此时从 $A$ 看此人恰在北东方向 $5\sqrt{5}\,km$ 处，这个位移 $\overrightarrow{AC}$ 是相继位移 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BC}$ 的合成结果. 由此可定义 $\boldsymbol{a}$

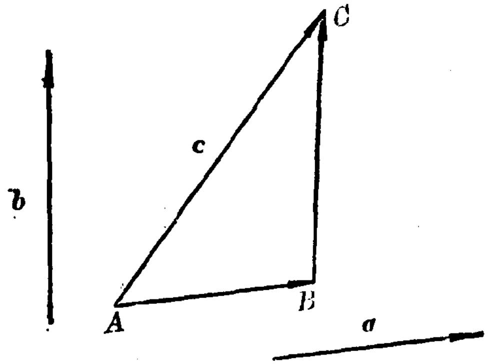


图 1-5

与 $\boldsymbol{b}$ 的和：由平面上任取的一点 $A$ 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再从 $B$ 作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，令 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$，称 $\mathbf{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\mathbf{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。(如图 1-5)

这就是向量加法的三角形法则。此定义同样适用于零向量，按定义不难验证：

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a};\quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$$

又由三角形任意两边之和大于第三边，显然有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

常称此式为**三角不等式**。

上述三角形法则与所熟知的平行四边形法则是一致的。由图 1-6 知，从平面任取一点引与 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 分别相等的向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AD}$，以 $AB$、$AD$ 为邻边所作平行四边形 $ABCD$ 中，对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和。

图 1-6 告诉我们，向量加法满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

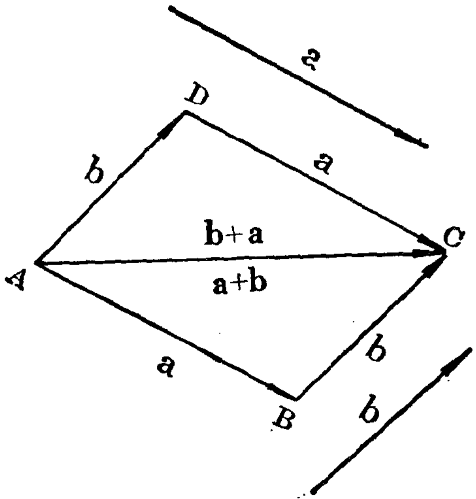


图 1-6

我们还可以证明向量加法满足结合律．事实上，由图 1-7 可知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

由于这个性质，使得我们能够把这（两个相等的）和定义为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$（见图1-7），称为（3 个）向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的**和**．以此类推，可以定义任意 $n(\geqslant 4)$个向量的和．并可得出如下的运算法则：

使各向量首尾顺次相接，由第一个向量的始点到最后一

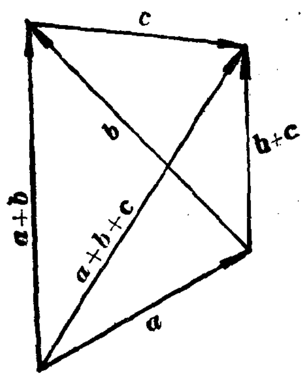


图 1-7

个向量的终点的向量就代表各向量的和。

我们知道，实数的减法是加法的逆运算，向量也如此。例如，某人由 $A$ 先向东行 $10km$，而最终的位移是 $A$ 向北东方向移出 $5\sqrt{5}km$，那么第二次位移应如何？这就是求向量 $\boldsymbol{x}$，使 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 的问题。我们称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

由实际作图可知，两个向量的和与差都是唯一的。

**例 1** 试证 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

**证法 1** 令左端为 $\boldsymbol{x}$，于是有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}))+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+((-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b})$$

$$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$$

按差的定义．原式得证．

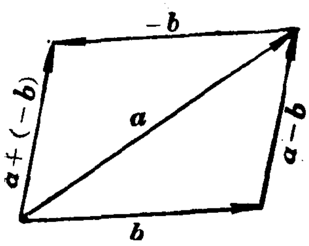


图 1-8

**证法 2** 如图 1-8 证明是显然的。

读者决不可认为上面的证明是多余的，以后我们将看到对实数运算成立的法则，对向量未必正确。

根据例 1 的结果，我们可以在向量等式中将某项变号后由一端移到另一端。例如：若

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$$

**例 2** 试用向量法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

**证明** 如图 1-9，由向量加法法则及已知有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}$$

这说明 $AB$ 与 $DC$ 平行且相等，故 $ABCD$ 是平行四边形。

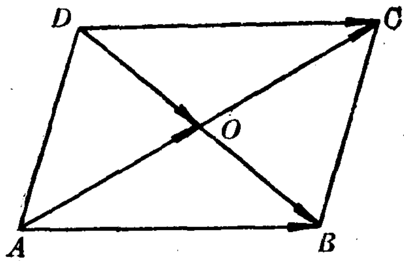


图 1-9

**2. 数与向量的乘法**

当物体沿直线运动时，只要把直线看成数轴，仅用一个数值就能表示物体的位移. 反映在向量上，考虑一组平行的向量，如 $\boldsymbol{a}$ 为向东（位移）1 米，$\boldsymbol{b}$ 为向东 3 米，$\boldsymbol{c}$ 为向东 5.6 米，$\boldsymbol{d}$ 为向西 2 米. 显然有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}$. 仿照数与多项式相乘的情形不妨记上二式为 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{d}=-2\boldsymbol{a}$; 同样 $\boldsymbol{c}=5.6\boldsymbol{a}$. 由此，我们把一个实数与一个向量“相乘”规定为下述意义：

若 $\lambda$ 为实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量，那么 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，其模为 $|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$，其方向：(1) 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向；(2) 当 $\lambda<0$ 时与 $-\boldsymbol{a}$ 同向.

易见，

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|;\quad \lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0};\quad 0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0};$$

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a};\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a};$$

$$\overbrace{a+\cdots+a}^{n\text{个}}=na;\ (n\ \text{为正整数})$$

特别是

$$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})$$

如上的运算常称**数乘**。关于数乘还有如下的运算性质：

若 $\lambda$，$\mu$ 为任意实数，$\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 为任意向量，则有

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

我们只证明分配律 (3)，其余两个留给读者自证。

如图 1-10，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，此处 $\lambda>0$。显然只需要证 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$，即需证：(1) $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向相同；(2) $|\overrightarrow{AE}|=|\lambda||\overrightarrow{AC}|$

因为 $\overrightarrow{DE}=\lambda\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{BC}$，从而 $\angle 1=\angle 2$。又显然有

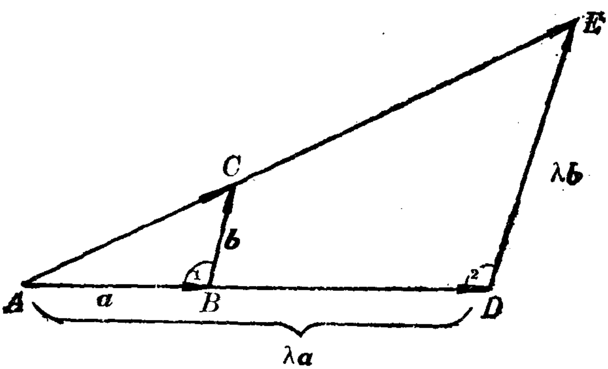


图 1-10

$$\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\lambda=\frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{BC}|}$$

因此

$$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$$

故(2)成立，同时$\angle CAB=\angle EAD$，因而$A$、$C$、$E$三点在一条直线上，故(1)成立。

对于$\lambda<0$的情形可类似地证明；$\lambda=0$时，可直接验证。又$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$至少有一个是零向量的情形可用性质(1)、(2)来证。

由于上述数乘运算的性质，使我们对于向量也可如多项式那样合并"同类项"或打开括号，例如，

$$3\boldsymbol{a}-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

有时把$\frac{1}{k}\boldsymbol{a}$记作$\frac{\boldsymbol{a}}{k}$，于是若以$\boldsymbol{a}^\circ$表示与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量，易见

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ;\quad \boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

为方便起见，我们常把互相平行的向量与零向量的并集称为**共线向量集**，并把属于一个共线向量集的若干向量称为**共线的**．不难证明：

(1) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线的充分必要条件是存在实数$\lambda$，使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，或存在实数$\mu$，使得$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$。

(2) 两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线（即平行）的充分必要条件是存在实数$\lambda\neq0$，使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$。

**例3** 求向量$\boldsymbol{x}$，使其与$2\boldsymbol{a}$、$-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$及$4(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$顺次首尾相接成一封闭的向量链。