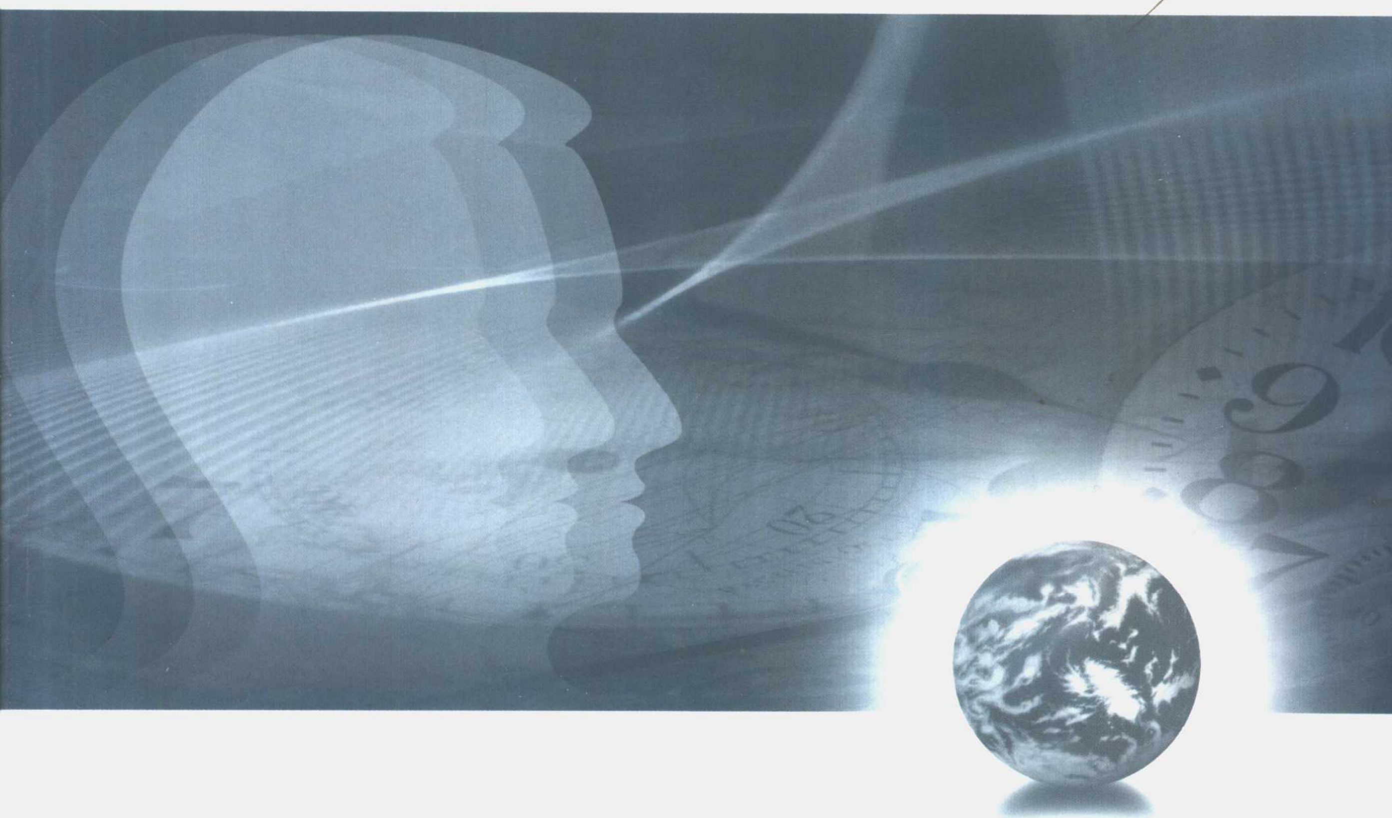
高等院校计算机科学与技术

“十五”规划教材

离散数学



傅 彦 顾小丰 刘启和 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校计算机科学与技术“十五”规划教材

离散数学

傅 彦 顾小丰 刘启和 编著

机械工业出版社

本书系统介绍了数理逻辑、二元关系、图论、代数系统与布尔代数中有关的概念、定理及其证明方法。既强化基本概念的描述，还特别着重于阐述有关离散数学的证明方法及离散数学在计算机中的应用，并给出了大量的例子和应用实例。

本书可作为工科院校有关专业学生的必修课教材，也适用于计算机专业的科技人员及学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/傅彦等编著．一北京：机械工业出版社，2004.1
（高等院校计算机科学与技术“十五”规划教材）
ISBN 7-111-13725-6
Ⅰ．离…　Ⅱ．傅…　Ⅲ．离散数学—高等学校—教材　Ⅳ．0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 122134 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策　　划：胡毓坚
责任编辑：陈振虹
责任印制：施　红

三河市宏达印刷有限公司印刷・新华书店北京发行所发行

2004 年 1 月第 1 版・第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16・22.25 印张・549 千字
0001－5000 册
定价：31.00 元

凡购本图书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

出版说明

信息技术高度普及的今天，具备一定层次的信息技术素养成为社会素质教育的一个重要目标，由此对高等院校的计算机专业教育提出了更高更新的要求。教育水平提高的关键是教学质量，那么对教学质量有直接影响的教材建设就成为了计算机专业教育的根本，为重中之重。

适逢高等院校计算机专业教育改革的关键时期，为配合相关的教材建设，机械工业出版社会同全国在该领域内享誉盛名、具备雄厚师资和技术力量的高等院校，包括清华大学、上海交通大学、南京大学、电子科技大学、东南大学、西安电子科技大学、解放军理工大学、北京科技大学等重点名校，组织了多位长期从事教学工作的骨干教师，集思广益，对当前高等院校的教学现状开展了广泛而深入的研讨，继而紧密结合当前技术发展需要并针对教学改革所提出的问题，精心编写了这套面向普通高等院校计算机专业的系列教材，并陆续出版。

本套教材内容覆盖了普通高等院校计算机专业学生的必修课程，另外还恰如其分地添加了一些选修课程，总体上分为基础、软件、硬件、网络和多媒体五大类。在编写过程中，对教学改革力度比较大、内容新颖以及各院校急需的并且适应社会经济发展的新教材，优先选择出版。

本套教材注重系统性、普及性和实用性，力求达到专业基础课教材概念清晰、深度合理的标准，并且注意与专业课教学的衔接；专业课教材覆盖面广、深浅适中，在体现相关领域最新发展的同时注重理论联系实际。全套教材体现了教育改革的最新思想，可作为高等院校计算机科学与技术专业的教学用书，同时也是培训班和自学使用的最佳教材。

机械工业出版社

前　　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，也是计算机科学与技术的理论基础，所以又称为计算机数学。

离散数学作为数学的一个分支，研究的对象是各种离散量的结构及离散量之间的关系，并且一般是有限个或者可数个元素。同时，在对离散数学的讨论中，也非常重视“能行性”问题的研究，即要解决一个问题，首先要证明此问题的解的存在性。但是仅仅解决存在性是不够的，还需要找到得到此问题解的步骤，而且该步骤是有限的、有规则的。这与连续数学中的讨论方式完全相违背。而且，它是由多门数学分支组成的，每一个分支基本上可以看成是一门独立的科学分支，它们从不同的角度出发，研究各种离散量之间数与形的关系。同时这些分支也并非相互独立，而是有着密切关系的。可以说，离散数学是一门综合的数学学科。离散数学已成为计算机科学与技术专业的核心、骨干课程，它一方面充分地描述了计算机科学离散性的特点，而且给后继课程，如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能、信息安全、计算机网络、算法分析等课程提供必要的数学基础；另一方面，通过学习离散数学，培养和提高了学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，为学生今后继续学习和工作，参加科学研究，打下坚实的数学基础。

本书内容以工科学生“够用”为限，突出重点；在内容阐述时，力求做到结构严谨，通俗易懂；推演时务求详尽；大部分概念都用例子加以说明。强化基本概念的描述，注重基本理论的证明方法，目的在于启发学生的思想，淡化大量繁琐的、含有特殊技巧的、不带普遍意义的理论证明方法。针对离散数学的特点，有些问题给出了不同的解法，同一概念给出了不同的描述，希望能起到举一反三的作用。

另外，由于学习离散数学需要相应的数学基础知识，所以本书增加了一篇预备知识，它包括学习离散数学所需要的所有数学基础知识，这对学习离散数学是会有相当帮助的。

本书分 5 篇，共 19 章，第 1 章～第 7 章由傅彦撰写，第 8 章～第 14 章由顾小丰撰写，第 15 章～第 19 章由刘启和撰写。

限于作者水平，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编　　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

出版说明
前言

第1篇　预 备 知 识

第1章　集合基础 …… 1
1.1　集合与子集 …… 1
1.1.1　集合 …… 1
1.1.2　集合的表示 …… 2
1.1.3　集合与元素的关系 …… 3
1.1.4　外延性原理 …… 3
1.1.5　集合之间的关系与子集 …… 4
1.2　集合的运算 …… 6
1.3　无限集的基本概念 …… 9
1.3.1　自然数集合与可列集合 …… 9
1.3.2　不可数集合 …… 12
1.4　有限集合的计数 …… 12
1.4.1　鸽笼原理 …… 12
1.4.2　容斥原理 …… 13
1.5　习题 …… 14
第2章　序列（有序组） …… 18
2.1　序列与子序列 …… 18
2.2　序列的运算 …… 19
2.3　习题 …… 20
第3章　整数中的除法 …… 21
3.1　整除 …… 21
3.2　最大公因子 …… 22
3.3　最小公倍数 …… 24
3.4　习题 …… 25
第4章　矩阵的基础知识 …… 27
4.1　矩阵的定义 …… 27
4.2　矩阵的运算及性质 …… 28
4.3　布尔矩阵及运算 …… 30
4.4　习题 …… 32

第2篇　数 理 逻 辑

第5章　命题逻辑 …… 33

5.1 命题与命题联结词 …… 34
5.1.1 命题 …… 34
5.1.2 命题联结词 …… 35
5.2 命题公式、解释与真值表 …… 40
5.2.1 命题公式 …… 40
5.2.2 公式的解释与真值表 …… 41
5.2.3 一些特殊的公式 …… 43
5.2.4 等价公式 …… 45
5.3 联结词的完备集 …… 50
5.3.1 联结词的扩充 …… 50
5.3.2 与非、或非和异或的性质 …… 51
5.3.3 全功能联结词集合 …… 52
5.4 范式 …… 53
5.4.1 析取范式和合取范式 …… 53
5.4.2 主析取范式和主合取范式 …… 54
5.5 命题逻辑的推理理论 …… 61
5.5.1 推理的基本概念和推理形式 …… 61
5.5.2 判断有效结论的常用方法 …… 62
5.6 习题 …… 69
第 6 章 谓词逻辑 …… 73
6.1 谓词逻辑中的基本概念与表示 …… 73
6.1.1 谓词 …… 74
6.1.2 量词 …… 76
6.1.3 谓词的语言翻译 …… 79
6.2 谓词公式与解释 …… 80
6.2.1 谓词的合适公式 …… 80
6.2.2 自由变元和约束变元 …… 82
6.2.3 公式的解释 …… 84
6.2.4 一些特殊的公式 …… 85
6.2.5 等价关系与蕴涵关系 …… 87
6.3 范式 …… 91
6.3.1 前束范式 …… 91
6.3.2 Skolem 标准形 …… 92
6.4 谓词演算的演绎与推理 …… 93
6.4.1 推理规则 …… 93
6.4.2 谓词演算的综合推理方法 …… 95
6.5 习题 …… 100
第 7 章 数理逻辑在计算机科学中的应用 …… 105
7.1 命题逻辑在计算机科学中的应用 …… 105

7.2 谓词逻辑在计算机科学中的应用 …… 108
7.2.1 谓词逻辑与数据子语言 …… 108
7.2.2 谓词逻辑与逻辑程序设计语言 …… 110

第3篇 二元关系

第8章 二元关系 …… 119
8.1 二元关系及其表示法 …… 119
8.1.1 序偶与笛卡儿积 …… 119
8.1.2 关系的引入 …… 121
8.1.3 关系的定义 …… 121
8.1.4 二元关系 …… 122
8.1.5 关系的表示法 …… 123
8.2 关系的运算 …… 125
8.2.1 关系的交、并、补、差运算 …… 125
8.2.2 关系的复合运算 …… 125
8.2.3 关系的逆运算 …… 126
8.2.4 关系运算的性质 …… 127
8.3 关系的性质 …… 130
8.3.1 自反性与反自反性 …… 130
8.3.2 对称性与反对称性 …… 131
8.3.3 传递性 …… 133
8.3.4 关系性质的证明 …… 135
8.3.5 利用集合运算来判断关系的性质 …… 136
8.3.6 关系性质的保守性 …… 137
8.4 关系的闭包运算 …… 138
8.4.1 关系的限制与扩充 …… 138
8.4.2 关系的闭包 …… 140
8.5 习题 …… 143
第9章 特殊关系 …… 147
9.1 等价关系 …… 147
9.1.1 集合的划分 …… 147
9.1.2 等价关系 …… 148
9.1.3 等价类与商集 …… 149
9.1.4 等价关系与划分 …… 150
9.2 次序关系 …… 152
9.2.1 次序关系的定义 …… 152
9.2.2 偏序集的哈斯图 …… 153
9.2.3 偏序集中的特殊元素 …… 154
9.2.4 全序与良序 …… 156

9.3 习题 …… 157
第 10 章 函数 …… 160
10.1 函数的基本概念 …… 160
10.2 函数的性质 …… 161
10.3 函数的复合运算 …… 163
10.4 函数的逆运算 …… 165
10.5 置换 …… 166
10.6 习题 …… 167
第 11 章 关系在计算机科学中的应用 …… 169
11.1 关系在关系数据库中的应用 …… 169
11.2 关系代数与数据子语言 …… 172
11.3 关系及闭包与计算机程序 …… 177
11.4 划分在计算机中的应用 …… 177

第 4 篇 图 论

第 12 章 图 …… 180
12.1 图的基本概念 …… 180
12.1.1 图的定义 …… 180
12.1.2 结点的度数 …… 182
12.1.3 子图与补图 …… 184
12.1.4 图的同构 …… 185
12.1.5 图的操作 …… 186
12.2 通路与回路 …… 186
12.3 无向图的连通性 …… 188
12.4 有向图的连通性 …… 190
12.5 图的矩阵表示 …… 192
12.5.1 邻接矩阵 …… 192
12.5.2 可达性矩阵 …… 197
12.6 习题 …… 199
第 13 章 特殊图 …… 204
13.1 欧拉图 …… 204
13.2 哈密尔顿图 …… 207
13.3 树 …… 211
13.3.1 无向树 …… 211
13.3.2 生成树 …… 213
13.3.3 最小生成树 …… 214
13.3.4 有向树 …… 216
13.4 偶图 …… 222
13.5 平面图 …… 225

13.5.1 观察法 …… 226
13.5.2 欧拉公式 …… 227
13.5.3 库拉托夫斯基定理 …… 229
13.5.4 对偶图 …… 230
13.6 图的着色 …… 231
13.6.1 结点着色 …… 231
13.6.2 边着色 …… 233
13.7 习题 …… 234
第 14 章 图论在计算机科学中的应用 …… 240
14.1 计算机鼓轮设计 …… 240
14.2 巡回售货员问题 …… 241
14.2.1 最邻近算法 …… 241
14.2.2 抄近路算法 …… 242
14.3 中国邮路问题 …… 243
14.4 前缀码 …… 245
14.5 波兰符号法与逆波兰符号法 …… 246
14.6 网络 …… 248
14.6.1 运输网络 …… 248
14.6.2 关键道路法 …… 252
14.6.3 通信网络 …… 254

第 5 篇 代数系统与布尔代数

第 15 章 代数系统 …… 255
15.1 代数系统 …… 255
15.1.1 代数运算 …… 255
15.1.2 代数运算的性质 …… 257
15.1.3 代数系统 …… 260
15.2 同态与同构 …… 264
15.2.1 同态与同构 …… 264
15.2.2 同态的性质 …… 266
15.3 习题 …… 267
第 16 章 群论 …… 271
16.1 半群与含幺半群 …… 271
16.1.1 半群与含幺半群 …… 271
16.1.2 循环半群与循环独异点 …… 273
16.2 群的基本概念与性质 …… 275
16.2.1 群的定义和基本性质 …… 277
16.2.2 元素的周期 …… 278
16.2.3 子群 …… 281

16.2.4 群的同态 …… 284
16.3 特殊群 …… 285
16.3.1 交换群（阿贝尔群） …… 285
16.3.2 循环群 …… 286
16.4 陪集与拉格朗日定理 …… 288
16.4.1 陪集 …… 288
16.4.2 拉格朗日定理 …… 291
16.5 不变子群与商群 …… 291
16.5.1 不变子群（正规子群） …… 291
16.5.2 *商群 …… 293
16.6 习题 …… 295
第 17 章 环与域 …… 298
17.1 环 …… 298
17.2 域 …… 299
17.3 习题 …… 300
第 18 章 格与布尔代数 …… 301
18.1 格 …… 301
18.1.1 格的定义 …… 301
18.1.2 格的另一定义 …… 303
18.1.3 格的性质 …… 306
18.1.4 子格 …… 307
18.1.5 格的同态与同构 …… 308
18.2 特殊格 …… 310
18.2.1 分配格 …… 310
18.2.2 模格 …… 312
18.2.3 有界格 …… 312
18.2.4 有补格 …… 313
18.3 布尔代数 …… 315
18.3.1 布尔代数 …… 315
18.3.2 布尔表达式 …… 317
18.4 习题 …… 319
第 19 章 代数系统的应用 …… 322
19.1 有限自动机 …… 322
19.2 计数问题 …… 323
19.2.1 理论基础 …… 323
19.2.2 图的计数问题 …… 325
19.2.3 开关线路的计数问题 …… 326
19.3 纠错码 …… 328
19.3.1 纠错码简介 …… 328

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

19.3.2 纠错码的纠错能力 …… 329
19.3.3 纠错码的选择 …… 330
19.3.4 群码的校正 …… 334
19.4 开关电路 …… 336
19.4.1 开关函数 …… 336
19.4.2 逻辑门 …… 339
19.4.3 全加器的逻辑设计 …… 341

第1篇 预备知识

本篇介绍有关离散数学的基础知识，首先介绍集合、子集以及它们的运算；其次论述序列的概念；然后复习有关整数的一些基本的整除性质；最后将引出矩阵和矩阵运算。通过本篇的学习将为本书其他各篇的学习提供必须的预备知识。

第1章 集合基础

1.1 集合与子集

1.1.1 集合

定义 1.1 任何被称为“成员”或“元素”（Element）的对象的聚集称为集合（set）。

例如，全体松木椅子的聚集；所有黑鸟的聚集；在 0 和 1 之间所有实数的聚集；全体中国人的聚集；所有大学生的聚集等都是一个集合。

上述集合中的元素都是相关的，但一个集合中的元素也可以是毫无关联的。而且，根据所给的属性，我们总能判断任一个事物是否属于某个集合。

例 1.1

（1）自然数的全体（N）；

（2）有理数的全体（Q）；

（3）实数的全体（R）；

（4）复数的全体（C）；

（5）整数的全体（Z）；

（6）偶数的全体（E）；

（7）奇数的全体（O）；

（8）素数的全体（P）；

（9）全体英文字母；

（10）所有 C 语言中的标识符。

上述所举的例子都是集合。通常情况下，我们用带（或不带）下标的大写英文字母 A、B、C、…、A_1、B_1、C_1、…表示集合，而用带（或不带）下标的小写英文字母 a、b、c、…、a_1、b_1、c_1、…表示元素或成员。

1.1.2 集合的表示

集合是由它所包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，可以有许多种方法。

1．枚举法

当一个集合仅有有限个元素或元素之间有明显的关系时，采用列出集合中全部元素或部分元素的方法叫枚举法。

例 1.2

（1）$A=\{1,2,3,4\}$

（2）$B=\{a,b,c,d,\cdots,x,y,z\}$

（3）$N=\{0,1,2,3,\cdots\}$

上述方法实际上是一种显示表示法，其优点在于具有透明性。但是此表示法在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时将受到一定限制，而且从计算机的角度看，显示法是一种“静态”表示法，如果一下子将这么多的“数据”都输入到计算机中去，将占据大量的“内存”。

2．隐式法（叙述法）

另一种描述集合的方法是通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合。我们通常用符号 $P(x)$来表示不同对象 x 所具有的性质 P，由 $P(x)$所定义的集合常记为：

$$\{x|P(x)\}$$

例 1.3

（1）$A=\{x|x$ 是“letter”中的所有字母$\}$

（2）$Z^{+}=\{x|x$ 是一个正整数$\}$，这样，Z^{+}包含元素：$1,2,3,\cdots$

（3）$N=\{x|x$ 是一个正整数或零$\}$，这样，N 包含元素：$0,1,2,3,\ \cdots$

（4）$Z=\{x|x$ 是一个整数$\}$，这样，Z 包含元素：$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ \cdots$

（5）$Q=\{x|x$ 是一个有理数$\}$，这样，Q 包含的元素可以被写成 a/b，其中 a 和 b 都是整数且 b 不为零。

（6）$R=\{x|x$ 是一个实数$\}$。

上述（1）～（6）都是用隐式法（叙述法）表示的集合。

隐式法的特点在于所表示的集合的元素可以是很多个或是无穷个，而且，从计算机的角度看，隐式法是一种“动态”的表示法，计算机在处理数据时，不用占据大量的“内存”。

3．归纳法

归纳法是通过归纳定义集合。主要由三部分组成：

第一部分：基础。它指出某些最基本的元素属于某集合。

第二部分：归纳。指出由基本元素造出新元素的方法。

第三部分：极小性。指出该集合的界限。

第一部分和第二部分指出一个集合至少包括的元素，第三部分指出一个集合至多要包含的元素。

例 1.4 集合 M 是按如下方式定义：

（1）每一个英文字母都是 M 中的元素；

（2）如果 P、Q 是 M 中的元素，则 PQ、QP 也是 M 中的元素；

（3）有限次使用（1）、（2）后所得到的字符串都是 M 中的元素。

4．递归指定集合法

通过计算规则定义集合中的元素。

例 1.5 $a_0=1$，$a_1=1$，$a_{i+1}=a_i+a_{i-1}(i\geqslant 1)$,于是：

$S=\{a_0,a_1,\cdots,a_n,\ \cdots\}=\{a_k|k\geqslant 0\}$

5．巴科斯范式 BNF（Backup Normal Form）

BNF 常常用来定义高级程序设计语言的标识符或表达式集合。

例 1.6 在 PASCAL 语言中，标识符集合定义如下：

<Letter>::=<Letter>{<Letter or Digit>}

{<Letter or Digit>}::=<Letter>|<Digit>

6．文氏图解法（Venn）

文氏图解法是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解，一般用平面上的图形或方形表示一个集合，如集合 A 如图 1-1。

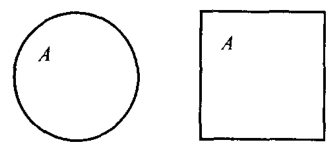


图 1-1

1.1.3 集合与元素的关系

元素与集合之间的“属于关系”也是“非常明确”的。对某个集合 A 和元素 a 来说，a 或者属于集合 A，或者不属于集合 A，两者必居其一且仅居其一。我们将语句“a 是集合 A 中的元素”或“a 属于 A”记为

$$a\in A$$

而语句“a 不是集合 A 中的元素”或“a 不属于 A”记为

$$a\notin A$$

对于界限不分明或含糊不清的情况，绝对不容许存在。在离散数学中，仅仅讨论界限清楚、无二义性的描述，而对不清晰的对象构成的集合属于模糊论的研究范畴（Fuzzy Set Theory），本书将不予研究。如下面著名理发师问题就是属于模糊论的研究范畴。

例 1.7 在一个很僻静的孤岛上，住着一些人家，岛上只有一位理发师，该理发师专给那些并且只给那些自己不刮脸的人刮脸。那么，谁给这位理发师刮脸？

解 设 $C=\{x|x$ 是不给自己刮脸的人$\}$，b 是这位理发师。

分析 （1）如 $b\in C$，则 b 为不给自己刮脸的人，另一方面，由题意知，b 只给集合 C 中的人刮脸。所以 b 要给 b 刮脸，即 $b\notin C$。

（2）如 $b\notin C$，则 b 为要给自己刮脸的人，另一方面，由题意知，理发师只给自己不刮脸的人刮脸。所以 b 是不给自己刮脸的人，即 $b\in C$。

无论（1）和（2），都有 $b\in C$ 和 $b\notin C$ 同时成立。

上述情况称为罗素悖论，此情况不属于我们讨论的范畴。

1.1.4 外延性原理

在集合中元素的顺序并不十分重要。这样，$\{1,2,3,4\}$，$\{2,3,4,1\}$，$\{3,4,1,2\}$，$\{4,1,2,3\}$等都是一样的集合。因而，在集合中，凡是相同的元素，均可认为是同一个元素，并可将相同

的元素合并成一个元素。这样，集合$\{1,2,3,4,3,2\}$也就是和集合$\{1,2,3,4\}$完全相同的集合。因此集合中的元素是惟一确定并可加以区分的对象，集合中的元素都是不同的并且是无序的。

集合中的元素一旦确定，这一集合便惟一确定，即有：

外延性原理 两个集合 A 和 B 相等，当且仅当它们有相同的元素，记为 $A=B$，否则，A 与 B 不相等，记为 $A\neq B$。

例 1.8 设 $E=\{1,2,3\}$，$F=\{x|(x$ 是正整数$)$且$(x^2<12)\}$，则 $E=F$。

1.1.5 集合之间的关系与子集

下面讨论集合之间的关系。

定义 1.2 设 A，B 是两个集合，如果 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的子集合，简称子集（Subset），这时也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记作 $B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$，称"$\supseteq$"或"$\subseteq$"为包含关系（Inclusion Relation）。如果 B 不被 A 所包含，则记作 $B\nsubseteq A$。

上述包含定义又可形象地叙述为：

$$B\subseteq A \Leftrightarrow \text{对任意 } x\text{，如 } x\in B\text{，则 } x\in A\text{。}$$

例 1.9 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{2,3\}$，$D=\{2,3\}$，则 A，B，C，D 之间有如下关系：

$$B\subseteq A，C\subseteq A，D\subseteq A，C\subseteq D，D\subseteq C$$

但

$$B\nsubseteq C，B\nsubseteq D，C\nsubseteq B，D\nsubseteq B，A\nsubseteq B，A\nsubseteq C，A\nsubseteq D$$

根据上述定义和例子，我们不难得出：对任意集合 A，都有 $A\subseteq A$。

例 1.10 设 A 是一个集合，$B=\{A,\{A\}\}$，试问下述结论$\{A\}\in B$ 和$\{A\}\subseteq B$ 成立吗？

解 由于集合 A 和$\{A\}$是集合 B 的元素，所以有 $A\in B$ 和$\{A\}\in$ B；由 $A\in B$ 可知$\{A\}\subseteq B$。所以结论$\{A\}\in B$ 和$\{A\}\subseteq B$ 成立。

定义 1.3 设 A、B 是任意两个集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。

符号化表示为

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A$$

如果 A 和 B 不相等，则记作 $A\neq B$。

例 1.11 设 $A=\{x|x$ 是小于等于 4 的自然数$\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，则 $A=B$。

例 1.12 设 $A=\{$BASIC，PASCAL，ADA$\}$，$B=\{$ADA，BASIC，PASCAL$\}$，则 $A=B$。

定义 1.4 设 A，B 为任意两个集合，如果

$$B\subseteq A \text{ 且 } A\neq B$$

则称 B 是 A 的真子集（Proper Subset），记作 $B\subset A$，称"$\subset$"为真包含关系（Properly Inclusion Relation）。

如果 B 不是 A 的真子集，则记作 $B\not\subset A$。这时，或者 $B\nsubseteq A$，或者 $B=A$。

例 1.13 集合$\{0,1\}$,$\{2,3\}$都是集合$\{0,1,2,3\}$的真子集，但集合$\{1,4\}$,$\{0,1,2,3\}$却不是集合$\{0,1,2,3\}$的真子集。

定义 1.5 不含任何元素的集合叫做空集（Empty Set），记作Φ。空集可以符号化为

$$\Phi=\{x|x\neq x\}$$

空集是客观存在的。

例 1.14 设 $A=\{x|$（$x\in R$）且$(x^2+1=0)\}$是方程 $x^2+1=0$ 的实数解集，由于该方程没有实数解，所以 $A=\Phi$。

定理 1.1

（1）空集是一切集合的子集；

（2）空集是绝对惟一的。

证明　（1）任给集合 A，由子集的定义有：

$$\Phi \subseteq A \Leftrightarrow \text{对任意 } x\in \Phi\text{，有 } x\in A$$

右边表明 $x\in \Phi$为假，所以无论 $x\in A$ 成立与否，都有“对任意 $x\in \Phi$，有 $x\in A$”成立。

所以$\Phi\subseteq A$。

（2）假设有两个以上的空集Φ_1，Φ_2，由空集的定义有：

$$\Phi_1\subseteq\Phi_2 \text{ 且 } \Phi_2\subseteq\Phi_1$$

根据集合相等关系的定义，有$\Phi_1=\Phi_2$。

所以，空集是惟一的。

说明　证明惟一性，一般采用反证法。

例 1.15　确定下列命题是否为真。

（1）$\Phi\subseteq\Phi$　　（2）$\Phi\in\Phi$　　（3）$\Phi\subseteq\{\Phi\}$　　（4）$\Phi\in\{\Phi\}$

解　命题（1）、（3）、（4）为真，（2）为假。

由这个例题不难看出Φ与$\{\Phi\}$的区别，Φ中不含有任何元素，而$\{\Phi\}$中有一个元素Φ，所以$\Phi\neq\{\Phi\}$。

定义 1.6　在一个相对固定的范围内，包含此范围内的所有元素的集合，称为全集或论集（Universal Set），用 U 或 E 表示。用文氏图表示如图 1-2 所示。

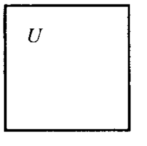


图　1-2

例 1.16

（1）在平面几何中，全集是由平面上全体点组成。

（2）在人口研究中，全集是由世界上的所有人组成。

由此可见，任何一个全集，都是限制在某一个范围内来定义的。因此有：

定理 1.2　全集是相对惟一的。

定义 1.7　集合 A 中的元素个数称为集合的基数（base Number），记为$|A|$。

如果一个集合的基数是有限的，则集合称为有限集（Finite Set）；

如果一个集合的基数是无限的，则集合称为无限集（Infinite Set）。

例 1.17　求集合 A，B，C 的基数。

（1）$A=\Phi$

（2）$B=\{1,2,3\}$

（3）$C=\{1,\{2,3\}\}$

解：$|A|=0$，$|B|=3$，$|C|=2$。

定义 1.8　含有 n 个元素的集合 A 称为 n 元集。它的含有 m 个（$m\leqslant n$）元素的子集称作它的 m 元子集。

任给一个 n 元集，怎样求出它的全部子集呢？

例 1.18　设 $A=\{a,b,c\}$，求出 A 的全部子集。

解　将 A 的全部子集按从小到大进行分类：

0 元子集：即空集，只有 C_3^0 个：Φ；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com