中等专业学校試用教材

财經类专业通用

平面解析几何初步

PINGMIAN JIEXIJIHE CHUBU

財經中专数学教材編写組编

人民教育出版社

中等专业学校試用教材

财經类专业通用

平面解析几何初步

財經中专数学教材編写組編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010·1079　开本 787×1092 $^{1}/_{32}$　印张 $2^{14}/_{16}$

字数 58,000　印数 0,001—4,000　定价(4)￥0.24

1962 年 11 月第 1 版　1962 年 11 月北京第 1 次印刷

編写說明

本书是为財經类中等专业学校数学課程編写的試用教材。

財經类数学試用教材是根据中华人民共和国教育部、財政部、外貿部、中国人民銀行与我部共同商定，以我部为主組織召开的財經中专数学、物理、化学教学大綱討論会所制定的数学教学大綱，在 1956 年出版的工业、农林、財經性質中专数学教科书的基础上，吸取了現在高中和其他性質中专数学課本的优点和財經中专在教学实踐中的經驗，加以补充、修改而成。

这本平面解析几何初步共分二章，全部是递补教材。书后附有复习題与答案，复习題是为教学中补充和选用的。

本书是由西安商业学校会同部分商业、財金、財貿学校选派数学教师組成編写組編写的。編写組成員有：西安商业学校韓茂穎、張兴成、唐悦，上海財金学校徐礼人，吉林財金学校陈施偉，福建財貿学校郑丰，北京財貿学校刘富，四川省成都商业学校鍾生灵，湖北省武汉商业学校陈国麟，山东省济南商业学校杜錚，江苏省揚州商业学校管九錫等同志。編写过程中，承蒙西安师范专科学校赵伯炎教授，陈怀孝、潘智源、罗端先、梁惠中、夏自强、严耀庭等同志对原稿进行审查，特此致謝。

中华人民共和国商业部教育局

1962 年 5 月

目　录

第一章　直綫

一　平面上点的坐标及其运用

§1.1　平面上点的直角坐标　在平面上任意取一对互相垂直的直綫，如图 1-1 中的 Ox 和 Oy，O 是它們的交点。再选定直綫 Ox 与直綫 Oy 的正方向，如图 1-1 中，Ox 的方向以由左向右为正，Oy 的方向以从下向上为正。又取一条定长的綫段作为这两直綫的公共长度单位。平面上这样一对互相垂直并且标有长度单位的有方向的直綫，就叫作**平面上的直角坐标系**。O 点称为**坐标原点**，簡称**原点**；这两条直綫叫作**坐标軸**，其中水平的直綫 Ox 叫作**横坐标軸**（簡称**横軸**）或 x 軸，鉛垂的直綫 Oy 叫作**縱坐标軸**（簡称**縱軸**）或 y 軸。

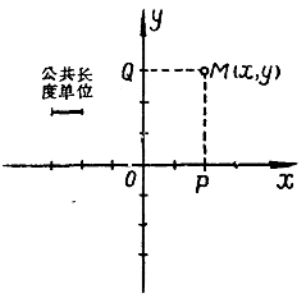

图 1-1

在平面上取定了直角坐标系以后，对平面上的任意一点 M，就可以确定唯一的一对有序实数 (x, y) 与它对应。建立这个对应的方法如下：通过点 M 作一条与 y 軸平行的直綫，与 x 軸相交于一点 P，通过点 M 又作一条与 x 軸平行的直綫，与 y 軸相交于一点 Q。我們用实数 x 表示点 P 在 x 軸上的坐标①，用实数 y 表示点 Q 在 y 軸上的坐标②，从而点 M 就确定了唯

①、② 这里是指数軸上的点的坐标。

一的一对有序实数 x 和 y。反过来，給定了一对有序实数 x 和 y，就可以在 x 軸上求出 P 点，在 y 軸上求出 Q 点，使它們在两軸上的坐标分別为 x 和 y；再从 P 和 Q 分別引它們所在軸的垂綫，这两条垂綫一定相交于唯一确定的点。这样，我們就在平面上的点的集合与有序实数对所成的集合之間建立了一一对应关系。因而有序实数对 (x,y) 就可以用来表示平面上的点 M。实数 x，y 叫做点 M 的**直角坐标**（簡称**坐标**），x 叫做点 M 的**横坐标**（簡称**横标**），y 叫做点 M 的**縱坐标**（簡称**縱标**）。为了表明点 M 有直角坐标 x,y，我們写成 $M(x,y)$，注意其中第一个实数 x 是表示点 M 的横标，第二个实数 y 表示点 M 的縱标。例如 $(3,2)$ 与 $(2,3)$ 是两对不相同的有序实数，因而表示的点也就不同。像上面所說的用一对有序实数表示点的方法，叫作**坐标法**。

x 軸与 y 軸把平面分成四个部分，各部分叫作**象限**。由右上方起，按逆时針的方向依次用号碼 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 来表示这四个象限，那末就可得到各个象限中点的坐标的符号表如下：

象限 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

如图 1-2 中的点为：$M_1(2,4)$，$M_2(-3,2)$，$M_3(-2,-4)$，$M_4(4,-3)$，$M_5(4,0)$，$M_6(0,-1)$。

从坐标的定义可以得出：如果点在横軸上，那末它的縱标 y 等于零；如果点在縱軸上，那末它的横标 x 等于零；原点的

縱、横标都是零。

注意：在数軸上点的坐标是一个实数，在平面直角坐标系中，点的坐标是有序实数对，例如图 1-2 中的 $M_5(4,0)$，不能写成 $M_5(4)$。

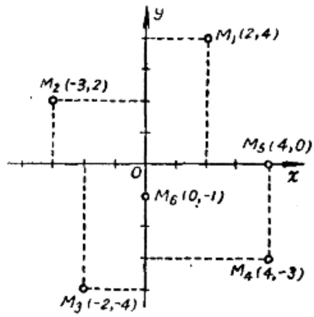

图 1-2

下面我們举几个由已知坐标求点与由已知点求坐标的例子。

例 1 已知点 $M(3,-2)$，求点 M 对于横軸、縱軸以及坐标原点的对称点的坐标。

解 自点 M 作横軸及縱軸的垂綫 MP 及 MQ，并分别延长到 M_1 及 M_2，使綫段 $MP=PM_1$，$MQ=QM_2$；又联結 MO 并延长到 M_3 使 $MO=OM_3$。那末 M_1，M_2 及 M_3 就是点 M 对于横軸、縱軸及原点的对称点。

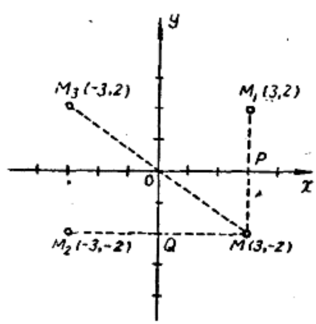

图 1-3

容易知道 M 和 M_1 的横坐标相等，縱坐标的絕对值相等而符号相反。因为 M 点的坐标是 $(3,-2)$，所以 M_1 的坐标是 $(3,2)$。同样容易求出 M_2 及 M_3 的坐标，如图 1-3 所示。

例 2 已知正方形的边长为 4 个单位，其两对角綫与两坐标軸重合，求其各顶点的坐标。

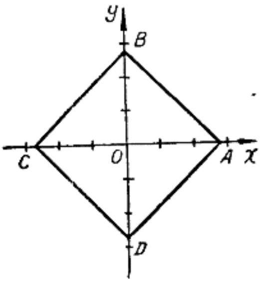

图 1-4

解　如图 1-4，設 $ABCD$ 是所給的正方形。那末

$$OA=OB=OC=OD,$$

$$AB=BC=CD=DA=4.$$

由勾股定理可得

$$OA=2\sqrt{2},$$

所以正方形各頂点的坐标为

$$A(2\sqrt{2},0),\ B(0,2\sqrt{2}),$$

$$C(-2\sqrt{2},0),\ D(0,-2\sqrt{2}).$$

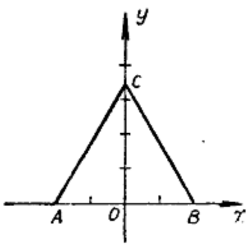

图 1-5

例 3　已給一边长为 4 的正三角形，它的底边与 x 軸重合，而且这条边的中点是原点。求这个三角形的三个頂点的坐标。

解　(1) 如图 1-5，設这个正三角形的第三个頂点 C 落在 y 軸的右面一半上。因为

$$OC=AC\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3},$$

所以这个正三角形的三个頂点的坐标分别是

$$A(-2,0),\ B(2,0)\ 和\ C(0,2\sqrt{3}).$$

(2) 如果 C 点落在 y 軸的負方向上，那末三个頂点的坐标分别为

$$A(-2,0),\ B(2,0)\ 和\ C(0,-2\sqrt{3}).$$

§1.2　两点間的距离　現在来研究下面的問題：設已知两点 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$，求它們間的距离 d。

为了求距离 d, 如图 1-6, 过 A,B 两点分别作 y 軸的平行綫 AA_1 和 BB_1, 又过 A 点作 x 軸的平行綫 AC 与 BB_1 相交于点 $C(x_2, y_1)$, 得出直角三角形 ABC。

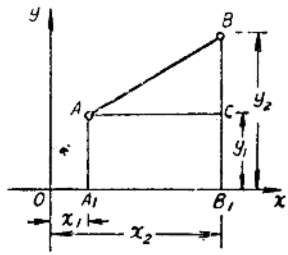

图 1-6

由勾股定理, 得

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

但 $AC = x_2 - x_1$, $CB = y_2 - y_1$;

于是 $$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

因此, 所求的距离为

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

这是两点間的距离的公式。在根式前面永远取正号 (因为两点間的距离永远是正的)。

因为 $(x_2 - x_1)^2$ 与 $(x_1 - x_2)^2$ 相等, $(y_2 - y_1)^2$ 与 $(y_1 - y_2)^2$ 相等, 所以, 公式(1)也可写成

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

这就是說, 应用公式 (1) 求两点間的距离时, 可以不管两个点的先后次序。順便指出, 图 1-6 中 A、B 两点都画在第一象限, 但是公式(1)对两点的各种位置都是成立的。

公式 (1) 用語言来叙述就是, 两点間的距离, 等于这两个点横坐标差的平方与縱坐标差的平方之和的算术平方根。

如果两点中有一点与原点重合, 这点的坐标就是 (0, 0), 而另一点的坐标是 (x_1, y_1), 那末, 原点到这一点的距离的公式是

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \tag{2}$$

例 1 求$A(-3,5)$和$B(1,2)$两点間的距离。

解 已知 $x_1=-3$, $y_1=5$; $x_2=1$, $y_2=2$, 代入公式(1)得

$$AB=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=$$
$$=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

所以A,B两点間的距离等于5。

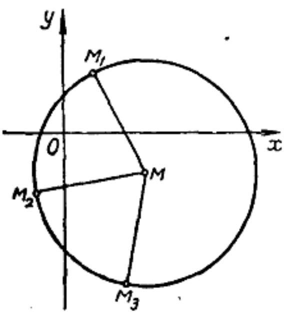

图 1-7

例 2 求經过点$M_1(1,2)$, $M_2(-1, -2)$, $M_3(2, -5)$所作的圓的圓心和半徑。

解 設(x,y)为所求的圓心M的坐标。由已知条件得

$$M_1M=M_2M,$$
$$M_2M=M_3M.$$

按公式(1)得

$$M_1M=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2};$$
$$M_2M=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2};$$
$$M_3M=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.$$

于是得两个含x与y的方程

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},$$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.$$

解上列联立方程組,得

$$x=\frac{8}{3},\ y=-\frac{4}{3}.$$

因此,所求的圓心是$M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$,

这个圆的半徑，可由計算 M_1M 求出：

$$M_1M=\sqrt{\left(\frac{8}{3}-1\right)^2+\left(-\frac{4}{3}-2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{100}{9}}=\sqrt{\frac{125}{9}}=\frac{5}{3}\sqrt{5}.$$

即圆的半徑是$\frac{5}{3}\sqrt{5}$。

§1.3 綫段的定比分割 如果一个点 C，把綫段 AB 分为两个部分，使这两部分的比等于已知数 λ，就是$\frac{AC}{CB}=\lambda$，那末 C 点叫作以定比 λ 分割綫段 AB 的分点。

如图 1-8 中，点 C 以定比$\frac{2}{3}$分割綫段 AB。

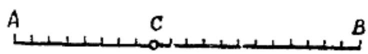

图 1-8

現在来研究綫段的定比分点的一般求法。設已知一綫段 AB 的两个端点分别为 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$，要在綫段 AB 上求一点 P 分 AB 为两个部分 AP 与 PB，且使它們的比值等于給定的数 λ，即

$$\frac{AP}{PB}=\lambda.$$

設所要求的点 P 的坐标为 (x, y)，分别过 A、P、B 作 x 軸的垂綫，且交 x 軸于 A_1、P_1、B_1（图 1-9）。于是有

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1}=\frac{AP}{PB}=\lambda.$$

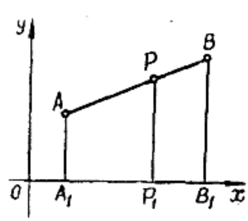

图 1-9

由图 1-9，得

$A_1P_1=OP_1-OA_1=x-x_1$，

$$P_1B_1 = OB_1 - OP_1 = x_2 - x.$$

因此
$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

由上式解出横坐标 x，得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同理可得縱坐标 y 为

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此按定比 λ 分割綫段 AB 的点 $P(x, y)$ 的坐标，可以用下列公式来确定：

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

这組公式对于两点 A、B 在坐标平面内的各种位置都成立。

应該注意，这里比 $\lambda = \dfrac{AP}{PB}$ 的前項（或分子）是从第一点 A 到分点 P 的长 AP，后項（或分母）是从分点到第二点的长 PB，前后項的次序不能变更。

如果点 P 平分綫段 AB，那末 $AP = PB$，因此

$$\lambda = \frac{AP}{PB} = 1.$$

公式(3)便化为下列形式：

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}; \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

018—64Cq

这也就是說，綫段中点的横坐标(縱坐标)，是綫段两端点的横坐标(縱坐标)之和的一半。

例1 点 C 把 $A(2,3)$ 及 $B(3,-3)$ 两点的連綫分为 $2:5$ 的两段，求点 $C(x,y)$的坐标。

解 已知条件是 $\lambda=2:5=\frac{2}{5}$, $x_1=2$, $x_2=3$, $y_1=3$, $y_2=$ $=-3$。根据公式(3)求得

$$x=\frac{2+\frac{2}{5}\times 3}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7};$$

$$y=\frac{3+\frac{2}{5}\times(-3)}{1+\frac{2}{5}}=\frac{9}{7}.$$

所以，所求分点 C 的坐标是$\left(\frac{16}{7},\ \frac{9}{7}\right)$。

例2 某綫段的中点是$(-1,2)$，它的一个端点是$(2,5)$，求另一端点的坐标。

解 已知条件是 $x_1=2, y_1=5$ 及 $x=-1, y=2$。代入公式(4)得

$$-1=\frac{2+x_2}{2},\ \text{所以}\ x_2=-4;$$

$$2=\frac{5+y_2}{2},\ \text{所以}\ y_2=-1$$

所以另一端点的坐标是$(-4,-1)$。

例3 在点 $M_1(x_1,y_1)$和 $M_2(x_2,y_2)$ 处各放置一个质点，它們的重量分别为 m_1 和 m_2，求这个系統的重心的坐标。

解 从力学知道，重心 $N(x,y)$ 必在連綫 M_1M_2 上，并且它将綫段 M_1M_2 分成与作用在点 M_1 和 M_2 上的重力成反比例的两部分。也就是

$$\frac{M_1N}{NM_2}=\frac{m_2g}{m_1g}=\frac{m_2}{m_1}\quad (g\text{ 是重力加速度})。$$

根据这个条件，得

$$x=\frac{x_1+\dfrac{m_2}{m_1}x_2}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2};$$

$$y=\frac{y_1+\dfrac{m_2}{m_1}y_2}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

所以，所求这个系統的重心坐标为

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right).$$

例 4 試証三角形两边中点的連綫平行于第三边，且等于第三边的一半。

証明 图形的性質和坐标軸的选擇沒有关系，如果坐标軸选擇得适当，解法就会簡单。通常的情况下，总是尽量利用已知点作为原点，或坐标軸上的点；已知直綫作为坐标軸，或軸的平行綫。

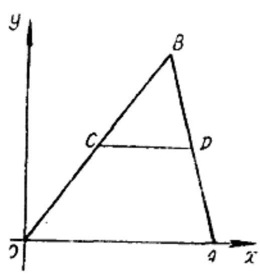

图 1-10

选擇三角形 ABO 的一个頂点 O 作为原点，过这頂点的一条边 OA 为 x 軸(图 1-10)，这样三角

形的三頂点便是$O(0,0)$, $A(x_1,0)$, $B(x_2,y_2)$。設C、D分别为OB和AB两边的中点,按公式(3)求得C和D两点的坐标(x_C,y_C)和(x_D,y_D)是

$$x_C=\frac{0+x_2}{2}=\frac{x_2}{2},\qquad y_C=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2};$$

$$x_D=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y_D=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2}$$

我們要証明CD和OA平行, 也就是与x軸平行, 而这是很显然的:

因为$y_C=y_D$, 所以CD平行OA。

要証明CD等于OA的一半,由于CD平行OA,因而只需証明C、D两点横坐标的差是O、A两点横坐标的差的一半就可以了。

$$x_D-x_C=\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_2}{2}=\frac{x_1}{2},$$

$$x_A-x_O=x_1-0=x_1.$$

所以CD等于OA的一半。

例 5 驗証三角形ABC的三条中綫交于一点, 且交点分每条中綫所成两綫段的比为2:1。

証明 取三角形ABC的頂点B作为原点,BC边作为x軸, 并設三頂点的坐标分别为$A(m,n)$, $B(0,0)$, $C(p,0)$(图 1-11)。

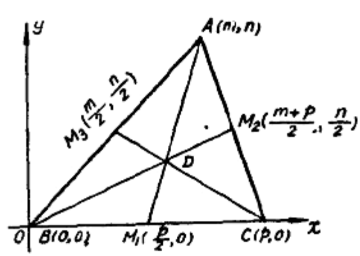

图 1-11

根据綫段中点的坐标公式, 可以得到三边中点的坐标分

别为 $M_1\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $M_2\left(\frac{m+p}{2}, \frac{n}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$。

我們要証明三条中綫交于一点，且交点分每条中綫所成两綫段的比为2:1，只要証明分割中綫 AM_1、BM_2、CM_3 成2:1的分点 D、D_1、D_2 的坐标是相同的就可以了。

因为点 D 分割綫段 AM_1 所成两部分之比 $\frac{AD}{DM_1}=\frac{2}{1}$，故得分点 D 的坐标：

$$x_D=\frac{m+2\times\frac{p}{2}}{2+1}=\frac{m+p}{3};$$

$$y_D=\frac{n+2\times 0}{2+1}=\frac{n}{3}.$$

同样，可以得出点 D_1 和点 D_2 的坐标都是 $\left(\frac{m+p}{3}, \frac{n}{3}\right)$。由此可見，$D_1$、$D_2$、$D_3$ 是重合的点。

所以三角形 ABC 三条中綫交于一点，而且交点分每条中綫所成两綫段的比为 2:1。

习　题　一

1. 口答下列各題：

(1) 求 $A(3, -1)$ 关于原点的对称点；

(2) 求 $B(-4, 2)$ 关于两坐标軸的对称点；

(3) 在 x 軸上的点，它們的坐标有什么特点？在 y 軸上的点呢？

(4) 与 x 軸平行的直綫上的点，它們的坐标有什么特点？与 y 軸平行的直綫上的点呢？

(5) 在 x 軸正向与 y 軸正向的夹角的平分綫上的点，它們的坐标有什么特点？