

中國科學院力學研究所專刊

力學問題論集第三輯

彈性薄板及薄殼的研究

中國科學院力學研究所編輯

科學出版社出版

力學問題論集第三輯

彈性薄板及薄殼的研究

RESEARCHES ON ELASTIC THIN
PLATES AND SHELLS

中國科學院力學研究所
力學討論會報告彙編

W. 諾瓦茨基

中國科學院力學研究所編輯
科學出版社出版
1956年 北京

內 容 提 要

本書是中國科學院力學研究所主辦的力學討論會的報告彙編第三輯。本輯的主要內容是波蘭科學院通訊院士 W. 諾瓦茨基在 1955 年 5 月訪問中國時所作的兩次學術報告。W. 諾瓦茨基通訊院士提出了一個統一的方法，用以處理板與殼的平衡、穩定及振動問題，並且應用到具有加勁條和不連續邊界條件的複雜情況。

本輯的第二部分包括就以上兩報告所作之討論及 W. 諾瓦茨基通訊院士對討論所作之總結。

本書可供小撓度板殼理論工作者及結構工程師參考之用。

中國科學院力學研究所專刊 彈 性 薄 板 及 薄 殼 的 研 究

編輯者 中國科學院力學研究所

出版者 科 學 出 版 社

北京東皇城根甲 42 號
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

印刷者 北 京 新 華 印 刷 廠

總經售 新 華 書 店

1956 年 8 月 第 一 版

書 號 : 0497 印 張 : 8 5/8

1956 年 8 月 第一次印刷

開 本 : 787×1092 1/16

(京)0001—3,295

字 數 : 149,000

定價 : (10)1.40 元

序

諾瓦茨基通訊院士 (Prof. Dr. W. Nowacki) 是波蘭科學院技術科學部的主任，這次在波蘭科學院代表團訪問中國期間 (1955年5月)，在北京清華大學進行了兩次關於薄板在各種不連續邊界條件下的動力穩定和振動問題的學術報告。報告之後又由中國科學院力學研究所組織了一次有北京各高等學校教師參加的學術討論。在這次討論會上，諾瓦茨基通訊院士又做了一次詳盡的補充報告。所有這些報告的全文、討論的發言和補充報告的全文都一起由力學研究所幾位同志整理成為這一本專刊。

諾瓦茨基通訊院士的方法，可以推廣到一般彈性體在不連續邊界條件下的問題。這一方面的工作，諾瓦茨基通訊院士已經在本年8月間波蘭科學院1955年彈性塑性力學卡爾帕赤會議上做了報告。這個方法在空間問題上的應用，將能解決許多重要而尚未解決的實用問題。

諾瓦茨基通訊院士另一方面的重要貢獻，即關於谷倉結構設計的工作，在我國尚未有適當介紹。在這方面顯然對我國是很需要的。

這次諾瓦茨基通訊院士來我國訪問，不僅對我國的土木結構的科學研究工作有重要的建議，在力學的工作上也引起了廣泛的注意，發生了不小的影響。中波兩國的科學交流，通過這次訪問，大大地加強了起來。中國科學院力學研究所林鴻蓀同志就是在聽了諾瓦茨基通訊院士的報告後，得到了啓發，進行了關於任意橫向載荷上彈性圓板及圓環形薄板的彎曲問題的工作；這個工作將在物理學報上發表。

通過諾瓦茨基通訊院士的報告，我們見到了如何在力學工作中正確地使用數學的近似法，見到了如何使力學工作為實際的工程技術需要服務而和實際結合起來。這些正是我們要向兄弟國家的科學家學習的。

在這裡，我們向諾瓦茨基通訊院士致以衷心的謝意。

錢偉長

1955年11月

PREFACE

During the recent visit (May, 1955) of the Delegation of the Polish Academy of Sciences to China, Prof. Dr. W. Nowacki, corresponding member and concurrently head of the Division of Technical Sciences of the Academy, delivered two lectures at Tsing Hua University, Peking, on the equilibrium, stability, and vibration of thin plates with discontinuous boundary conditions. Subsequent to the lectures, a conference for discussion was arranged by the Institute of Mechanics, Academia Sinica. Participating in the discussion were also the faculty members of various schools of higher education in Peking. At this conference, Prof. Dr. W. Nowacki once more made a detailed supplementary report. Text of the lectures, remarks made by the discussers, and text of the supplementary report are collected in this monograph by the Institute of Mechanics.

The method employed by Prof. Dr. W. Nowacki can be extended to the problem of a general elastic body with discontinuous boundary conditions. Prof. Dr. W. Nowacki reported on his work in relation to this subject in August at the Karpaty Conference on Elasticity and Plasticity sponsored by the Polish Academy of Sciences. The application of this method to three dimensional bodies will make it possible to solve many significant, yet unsolved, problems.

Another important contribution of Prof. Dr. W. Nowacki, having to do with the structural design of grain storage bins, remains to be adequately introduced to China. Such work is obviously in great need in our country.

On his visit, Prof. Dr. W. Nowacki not only made valuable suggestions with regard to our research work in civil structures, but also drew wide attention from our mechanics circles and exerted considerable influence. The scientific tie between China and Poland is greatly strengthened through this visit. Prompted by Prof. Dr. W. Nowacki's reports, Lin Hung-sun of the Institute of Mechanics has made a study of the bending of circular and annular elastic plates. This work will soon appear in the *Acta Physica Sinica*.

In the reports of Prof. Dr. W. Nowacki, it is seen how the approximate methods of mathematics may be employed in mechanics, how the study of mechanics is used to serve the practical needs of engineering, and how theory and practice are integrated. These are precisely what we must learn from the scientists of all our brother countries.

Here, let us express our hearty and profound gratitude to Prof. Dr. W. Nowacki.

Chien Wei-zang

Peking, China.

November, 1955.

目 錄

板壳理論中的一个新方法	(1)
在不連續边界条件下的矩形板的动力学及穩定性問題	(19)
关于諾瓦茨基通訊院士所作以上报告之討論	(33)
作者的意見	(59)

CONTENTS

A Contribution to the Theory of Plates and Shells	(64)
Проблема динамики и устойчивости прямоугольной пластинки при разрывных краевых условиях	(85)
Discussions on the Lectures of Prof. Dr. Nowacki	(101)
Diskussionsbeitrag	(123)

板壳理論中的一个新方法

W. 諾瓦茨基

(華 沙)

1. 本文的目的在于給出一个新的方法, 用这个方法可以得到关于一系列的小曲率的板与壳的穩定性問題的准确解。通常所用的一些方法中要遇到一些复雜的超越方程, 即以这些方程的最小的根來确定最小的屈曲臨界力。由于超越方程的复雜性, 特别是在板的情形中, 就不得不放弃准确解而用基于能量的考慮的近似解法代替它。

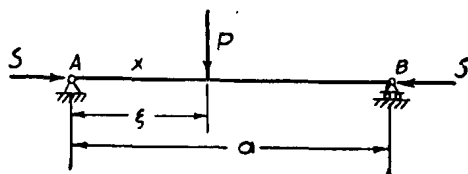


圖 1

用最簡單的梁的例子來說明新方法的主旨。

我們來考慮一个梁, 簡支于兩端, 同时受一个軸向压力 S 与另外一个橫向集中力 P (圖 1)。

我們用富氏級数的方法來解梁的彈性曲綫的方程

$$EJw^{IV} + Sw'' = P \quad (1.1)$$

而得到

$$w(x) = \frac{2P}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x}{EJ \alpha_n^4 - S \alpha_n^2}, \quad (1.2)$$

其中

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}.$$

如果梁受到的是一个集中弯矩 M , 这个弯矩可以表成一个由兩個力 P 組成的力偶, 而令 $M = \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} (P \Delta \xi)$ (圖 2)。將 (1.2) 对 ξ 微分, 同时把那里的 P 換成 M , 就得出在这个情形下的彈性綫方程

$$w(x) = \frac{2M}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \xi \sin \alpha_n x}{EJ \alpha_n^4 - S \alpha_n^2}. \quad (1.3)$$

现在把集中弯矩移到支座 A 处。彈性綫可以由方程

$$w(x) = \frac{2M}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin \alpha_n x}{EJ \alpha_n^4 - S \alpha_n^2} \quad (1.4)$$

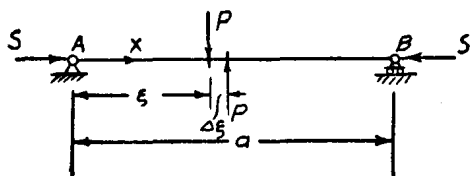


圖 2

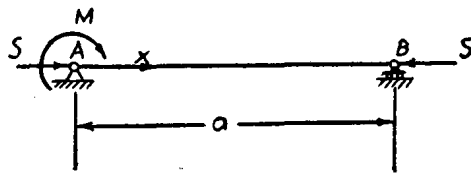


圖 3

來代表,我們知道,圖3中所表示的載荷可以看作是一個梁在截面A夾住的、當 $S > S_{kr}$ 時的特殊的屈曲情形。在這種情形中彈性綫應滿足條件

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.5)$$

把方程(1.4)對 w 微分,並設 $w=0$,就得

$$\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - s} = 0, \quad (1.6)$$

其中

$$s = \frac{S}{S_E}, \quad S_E = \frac{EJ\pi^2}{a^2}.$$

關係式(1.6)表示我們所考慮的系統的屈曲條件。我們用試算法來求那個方程的最小根 $s_{\min}$ 。我們得出 $s_{\min} = 2.048$ 。對一個兩端夾住的梁而言,在 $S > S_{kr}$ 時,有

$$w(x) = \frac{2M}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] \alpha_n \sin \alpha_n x}{EJ \alpha_n^4 - S \alpha_n^2}. \quad (1.7)$$

由條件 $\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$,我們有

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - s} = 0 \quad (1.8)$$

和

$$s_{\min} = 4.0.$$

2. 上述解法也可以應用到矩形板的穩定性的問題上去;我們從同時受板內壓力與彎曲的板的微分方程出發,

$$N \nabla^2 \nabla^2 w + q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p(x, y). \quad (2.1)$$

如果板的支承情況是簡支的,而且在 $w=\xi$ 綫上有載荷 p ,那末解就具有下列形式:

$$w = \frac{2}{a} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{p_m \sin \alpha_n \xi}{D_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (2.2)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots, \infty,$$

其中

$$D_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q_1 \alpha_n^2 - q_2 \beta_m^2.$$

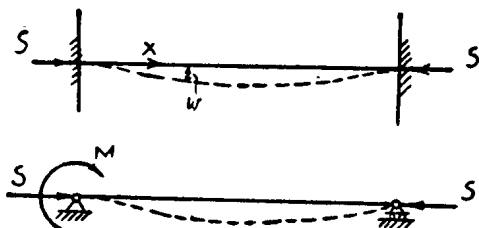


圖 4

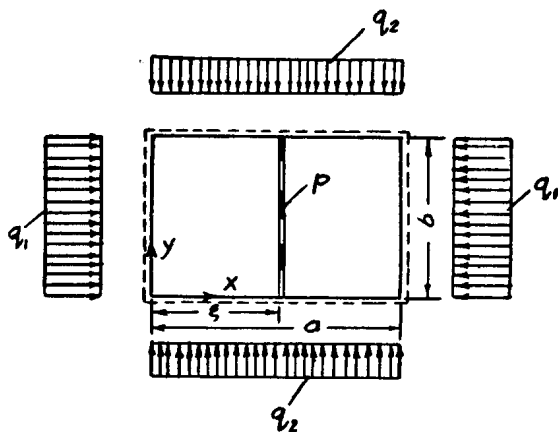


圖 5

在方程 (2.2) 中, p_m 是 p 的富氏系数。由方程 (2.2), 用对 ξ 微分的方法就可以过渡到板受到在 $x=\xi$ 上連續分布的弯矩 M 的情形。对于这种情形, 我們有

$$w = \frac{2}{a} \sum_{n,m} \frac{A_m \alpha_n \cos \alpha_n \xi}{D_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (2.3)$$

A_m 是 $x=\xi$ 上的弯矩 M 的富氏系数。

把这个方法推廣到邊緣 $x=0$, $y=0$, $x=a$, $y=b$ 上受到弯矩的情形, 这些弯矩的富氏系数是 A_m , B_n , C_m , D_n ; 我們就得出板的撓度的方程如下:

$$w = \frac{2}{a} \sum_{n,m} \frac{[A_m - (-1)^n C_m] \alpha_n + \frac{a}{b} [B_n - (-1)^m D_n] \beta_m}{D_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \quad (2.4)$$

現在我們來考慮下列邊緣夾住的板的特殊情形:

a) 如果在 $x=0$, $x=a$ 是夾住的, 就有 $B_n = D_n = 0$ 。在(对于 $x=a/2$) 对称的屈曲情形下, 應該取 $A_m = C_m$; 而在反对称的屈曲情形下, 應該取 $A_m = -C_m$ 。由条件 $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, 我們就得出下列的屈曲条件:

对 $x = \frac{a}{2}$ 对称的屈曲形式是

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + \rho^2 m^2)^2 - n^2 s_1 - m^2 \rho^2 s_2} = 0, \quad (2.5)$$

而对 $x = \frac{a}{2}$ 反对称的屈曲形式是

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + \rho^2 m^2)^2 - n^2 s_1 - m^2 \rho^2 s_2} = 0;$$

这里, $\rho = \frac{a}{b}$, $s_1 = \frac{q_1 \alpha^2}{N \pi^2}$, $s_2 = \frac{q_2 \alpha^2}{N \pi^2}$.

如果一个在各个方向都受到板内压力 ($s_1 = s_2 = s$) 的正方板 ($a = b$), 我們就得到在 y 軸方向上屈曲形式的半波。方程 (2.5) 就簡化为

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + 1)^2 - s(n^2 + 1)} = 0. \quad (2.6)$$

由这个方程用試算法就得出 $s_{\min} = 3.83$.

b) 如果板在各边都是夾住的, 在 $q > q_{kr}$ 的情形下, 板的撓度是由方程 (2.4) 确定的。由板在各边都是夾住的条件:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,$$

我們就得到一个有四个齐次方程的方程組。由于边界条件的对称性以及屈曲形式的对称性, 这四个方程可以化簡为两个方程。我們注意到, 在对两个对称軸都对称的情形中, 有

$$A_m = C_m, \quad B_n = D_n, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots.$$

关系式 $A_m = C_m$, $B_n = -D_n$, $m = 1, 3, 5, \dots$, $n = 2, 4, 6, \dots$, 相当于沿着 $y = \frac{b}{2}$ 的結綫。这时的屈曲形式对軸 $x = \frac{a}{2}$ 是对称的而对軸 $y = \frac{b}{2}$ 是反对称的。相反, 关系式

$$A_m = -C_m, \quad B_n = D_n, \quad m = 2, 4, 6, \dots, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

在結綫与对称軸 $x = \frac{a}{2}$ 重合的情形中成立。最后, 关系式

$$A_m = -C_m, \quad B_n = -D_n, \quad m, n = 2, 4, 6, \dots,$$

相当于板在屈曲时沿 $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ 的結綫。由

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,$$

我們就得出下列方程組:

$$\begin{aligned} A_m \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{D_{n,m}} + \frac{\alpha_n \beta_m}{b} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{B_n \alpha_n}{D_{n,m}} &= 0, \\ \alpha_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_m \beta_m}{D_{n,m}} + \frac{a}{b} B_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

由这个方程組中消去 B_n , 就得

$$A_m - \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} A_i G_{mi} = 0, \quad (2.8)$$

其中

$$G_{mi} = \frac{\beta_m \beta_i}{E_m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{F_k D_{ki} D_{km}},$$

并且

$$E_m = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{D_{n,m}}, \quad F_k = \sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_r^2}{D_{r,k}}.$$

把方程組 (2.8) 的行列式取为零, 我們就可以确定最小根也就是屈曲的臨界力。應該可以看出來, 方程組 (2.7) 是与 S. Iguchi 所用另一个不同而更复雜的方法^[2]得出的方程完全相同。

我們來考慮一个圓柱壳: 假定在边緣 $w=0$, $w=a$ 上作用着压力 q (圖 6)。我們由同时受板內压力与弯曲的圓柱壳的 В. З. Власов^[3] 的方程出發,

$$N \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F(x, y) + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^4} + q \frac{\partial^2 \nabla^2 \nabla^2 F(x, y)}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{R^4}. \quad (2.9)$$

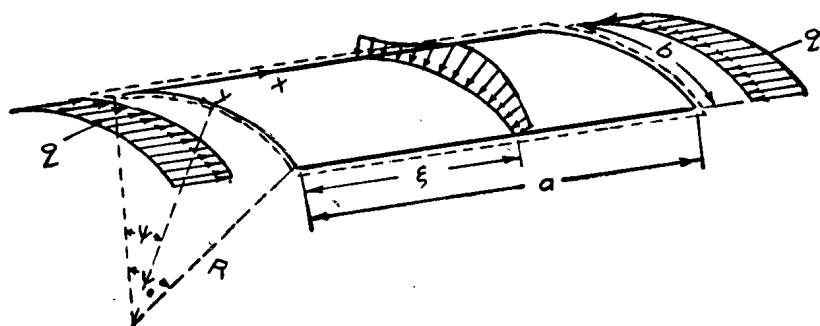


圖 6

这里, $F(x, y)$ 是位移函数, 它和徑向位移 w 的关系是

$$w = R^4 \nabla^2 \nabla^2 F, \quad (2.10)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

在方程(2.9)中, h 表壳壁的厚度, ν = 泊松比, $N = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 是壳的抗弯刚度, R 是壳的半徑, q 是軸向載荷強度, $p(x, y)$ 是壳的徑向載荷強度。

如果只在 $x=\xi$ 上, 壳受到徑向載荷 p , 我們假定壳在邊緣上是簡支的, 这就相当于下列边界条件

$$\begin{aligned} x=0, a, \quad F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} = 0, \\ y=0, b, \quad F &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{\partial^6 F}{\partial y^6} = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

函数 F 可以表成下列三角級数:

$$F(x, y) = \sum_{n,m} D_{n,m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \quad (2.12)$$

把 p 展开成重三角級数, 我們又得到

$$F = \frac{2}{aR^4} \sum_{n,m} \frac{p_m \sin \alpha_n \xi}{\Delta_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (2.13)$$

其中

$$\Delta_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^4 + \frac{Eh}{R^2} \alpha_n^4 - q\alpha_n^2(\alpha_n^2 + \beta_m^2).$$

从分布在直綫 $x=\xi$ 上的載荷 p 進到分布在同一直綫上的力矩 M , 我們得到:

$$F = \frac{2}{aR^4} \sum_{n,m} \frac{m_m \alpha_n \cos \alpha_n \xi}{\Delta_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad (2.14)$$

在这个方程中, 設 $\xi=0$ 并应用关系式 $w = R^4 \nabla^2 \nabla^2 F$, 我們得到

$$w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n,m} \frac{m_m \alpha_n \sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{\bar{D}_{n,m}}, \quad (2.15)$$

其中

$$\bar{D}_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q\alpha_n^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{\alpha_n^4}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}.$$

我們看到, 当 $R \rightarrow \infty$, 我們便从壳体的穩定問題过渡到薄板的穩定問題. 我們來考慮这样的情况: 板在 x 軸方向受到載荷 q 的壓縮, 同时又在 $x=0, y=0, x=a, y=b$ 四边上承受力矩 $A(y), B(x), C(y), D(x)$, 命这些力矩的富氏系数是 A_m, B_n, C_m, D_n

利用方程(2.15)和应用位移的疊加原理,我們得到

$$\tau v(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n, m}^{\infty} \frac{\alpha_n [A_m - (-1)^n C_m] + \frac{a}{b} [B_m - (-1)^m D_m] \beta_m}{\bar{D}_{n, m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \quad (2.16)$$

这个公式与板的方程(2.4)的唯一差別,在于符号 $\bar{D}_{n, m}$ 的意义。此后的步驟,为了得到壳体屈曲的条件方程,与前已說明的用于板的步驟相同。

3. 帶有肋杆的矩形板的屈曲条件,可以用同样簡單的方式定出。这个問題是經常用能量法來解决的;引導到超越方程的准确解,曾由 A. C. Локшин^[4]和 R. Barbré^[5]就帶有縱向和横向肋杆的板給出。这些解答,由于它們形式上的复雜性,甚至对于只帶一兩個肋杆的板也是不適用的。

本文將提出另一种求准确解的方法^[6],將就只帶有一个肋杆的板的簡單例子來說明(参考圖7),在 $q > q_{kr}$ 时,板和肋杆受到弯曲,在肋杆和板之間有鉛垂力 r ,这是这两部分彼此之間的作用。板和肋杆的撓度当然是相等的。

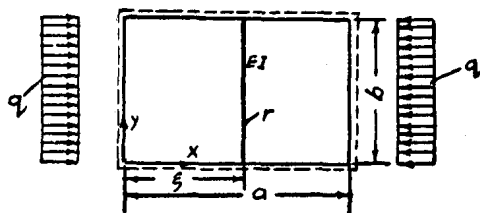


圖 7

設肋杆位在板的对称軸上,設想將肋杆从板上分离出來。板是在均匀分布在兩边 $x=0, x=a$ 上的載荷上的 q 和分布在直綫 $x=\xi$ 上的載荷 r 作用下,肋杆是在載荷 $-r(y)$ 作用下發生弯曲。

板的撓度微分方程

$$N \nabla^2 \nabla^2 v + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = r$$

有下列級数形式的解:

$$\tau v(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n, m}^{\infty} \frac{r_m \sin \alpha_n \xi}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q \alpha_n^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \quad (3.1)$$

肋杆的撓度从微分方程

$$EI \frac{d^4 \bar{w}}{dy^4} = -r(y), \quad r(y) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m \sin \beta_m y \quad (3.2)$$

得到它的形式是

$$\bar{w} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m \sin \beta_m y}{EI \beta_m^4}. \quad (3.3)$$

从板在直綫 $w=\xi$ 上的撓度等于肋杆的撓度这个条件,可知对于任意的 y 值应当有

$$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha_n \xi}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q\alpha_n^2} + \frac{1}{EI\beta_m^4} = 0. \quad (3.4)$$

这是屈曲的条件。取

$$\frac{a}{b} = \rho, \quad \frac{EI}{bN} = \gamma, \quad s = \frac{q}{q_E}, \quad q_E = \frac{N\pi^2}{b^2},$$

記得屈曲后在 w 軸方向可以有一系列半波(这依赖于参数 ρ 和 γ), 而 y 軸方向只有一个半波, 我們得到

$$\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha_n \xi}{(n^2 + \rho^2)^2 - n^2 \rho^2 s} + \frac{2}{\gamma \rho^3} = 0. \quad (3.5)$$

对于帶有 p 个横向肋杆的板, 我們將得到下列方程組:

$$\frac{r_m^{(k)}}{EI_k \beta_m^4} + \frac{2}{a} \sum_{i=1,2,\dots}^{i=p} r_m^{(i)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_k}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q\alpha_n^2} = 0, \quad k=1, 2, \dots, p, \quad (3.6)$$

或者对于 $m=1$ (屈曲后在 y 軸方向有一个半波) 用所設的記号

$$\frac{r^{(k)}}{\rho^3 \gamma_k} + 2 \sum_{i=1}^{i=p} r^{(i)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_k}{(n^2 + \rho^2)^2 - n^2 \rho^2 s} = 0, \quad k=1, 2, \dots, p. \quad (3.7)$$

取这組方程的行列式等于零, 我們就得到所求的板的屈曲条件。

由于这系統的对称性, 解答得到很大的简化。設板受两个肋杆加勁, 它們的位置对于直綫 $w = \frac{a}{2}$ 对称, 設 $\xi_1 = a/3$, $\xi_2 = 2a/3$, 从方程 (3.7), 在对称的屈曲形式 $r^{(1)} = r^{(2)}$, 我們得到下列屈曲条件:

$$\frac{1}{\gamma \rho^3} + 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{6}}{(n^2 + \rho^2)^2 - n^2 \rho^2 s} = 0.$$

于是

$$\frac{1}{\gamma \rho^3} + 4 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} \sin \frac{n\pi}{3} \sin \frac{n\pi}{6}}{(n^2 + \rho^2)^2 - n^2 \rho^2 s} = 0.$$

在圖 8 中就 $\rho=1$ 画出了函数 $s=s(\gamma)$ 的圖綫。这个圖終止在 γ_0 , 这时屈曲形式是三个半波而肋杆軸綫上的撓度等于零。 $\gamma=0.975$ 相应于这样的板的刚度, 这时一个半波或两个半波的屈曲形式是同样的可能。

我們來考慮帶有一个縱向肋杆的板(圖 9)。命 EJ 为肋杆的刚度, A 为它的截面積, $t(w)$ 是在直綫 $y=\eta$ 上的板与肋杆之間的作用力。

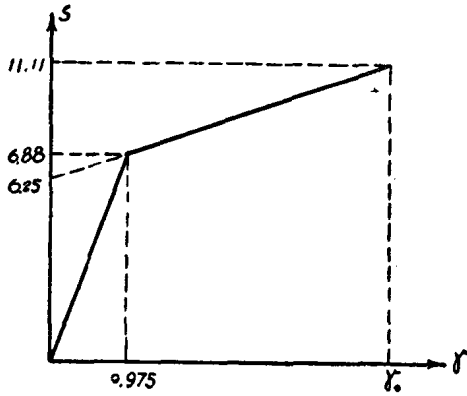


圖 8

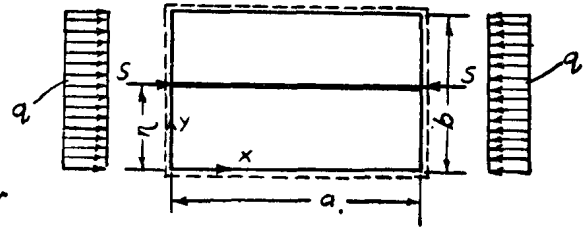


圖 9

在 $q > q_{kr}$ 时, 板的挠度由下列微分方程規定:

$$N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = t, \quad (3.8)$$

肋杆的挠度的方程是

$$EJ \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + (S + qA) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = -t, \quad (3.9)$$

其中

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin \alpha_n x.$$

这些方程的解是

$$w = \frac{2}{b} \sum_{n,m} \frac{t_n \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \sin \beta_m \eta}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q\alpha_n^2}, \quad (3.10)$$

$$\bar{w} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n \sin \alpha_n x}{EJ \alpha_n^4 - (S + qA) \alpha_n^2}. \quad (3.11)$$

从挠度相等的条件

$$w(x, \eta) = \bar{w}(x),$$

并命

$$\frac{a}{b} = \rho, \quad \frac{EJ}{Nb} = \chi, \quad s = \frac{q}{q_E}, \quad \frac{A}{b} = \delta, \quad \frac{Sb}{N\pi^2} = p,$$

我們得到下列表示屈曲条件的方程:

$$\frac{1}{n^4 \chi - s n^2 \rho^2 \delta - p n^2 \rho^2} + 2 \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{(n^2 + \rho^2 m^2)^2 - n^2 \rho^2 s} = 0. \quad (3.12)$$

对于縱向肋杆我們有:

$$\frac{\kappa^{(k)}}{n^4 \chi_k - sn^2 \rho \delta_k - p_k n^2 \rho^2} + 2 \sum_{i=1,2,\dots,r} \kappa^{(i)} \sum_{m=1,2,\dots,\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_i \sin \beta_m \eta_k}{(n^2 + \rho^2 m^2)^2 - n^2 \rho^2 s} = 0, \\ k=1, 2, \dots, r. \quad (3.13)$$

現在我們來考慮几个特殊情况:

a) 在中間有一个肋杆的板。設 $q=0$ 和 $\delta=0$, 从方程 (3.12), 我們得到

$$S_{kr} = \frac{EJn^2\pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{2n^2a} \frac{1}{\rho \sum_{m=1,3,\dots,\infty} \frac{1}{(n^2 + \rho^2 m^2)^2}}.$$

在 $b>a$ 时, 將出現一个半波的屈曲 ($n=1$).

最后在 $b \rightarrow \infty$ 和 $EJ \rightarrow 0$ 的情况, 我們得到 $S_k = 4\pi N/a$, 这符合于熟知的 A. Sommerfeld^[5] 的解答.

b) 帶有兩個等刚度等截面的肋杆的板。設 $\eta_1 = b/3$, $\eta_2 = 2b/3$. 和前一个情况相似, 我們假定 $q=0$, $\delta=0$. 从方程組 (3.13), 对于对称的屈曲形式 [对直綫 $y=b/2$ 而言 ($\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)}$)], 我們得到

$$S_{kr} = \frac{EJn^2\pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{4n^2a} \frac{1}{\rho \sum_{m=1,3,\dots,\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{m\pi}{3} \cos \frac{m\pi}{6}}{(n^2 + \rho^2 m^2)^2}}.$$

对于 $\rho=1$ 和 $n=1$ 的情况, 我們找到

$$S_{kr} = \frac{EJ\pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{a} 1.3234.$$

c) 在有 r 个全同肋杆均匀分布的情况, 可以証明

$$S_{kr} = \frac{EJn^2\pi^2}{a^2} + \frac{\rho^3 N\pi^2}{n^2(1+r)a} \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\rho^2} + m^2\right)^2}},$$

$$m = k(1+r) - rk \frac{1+(-1)^{k-1}}{2},$$

$$k=1, 2, \dots.$$

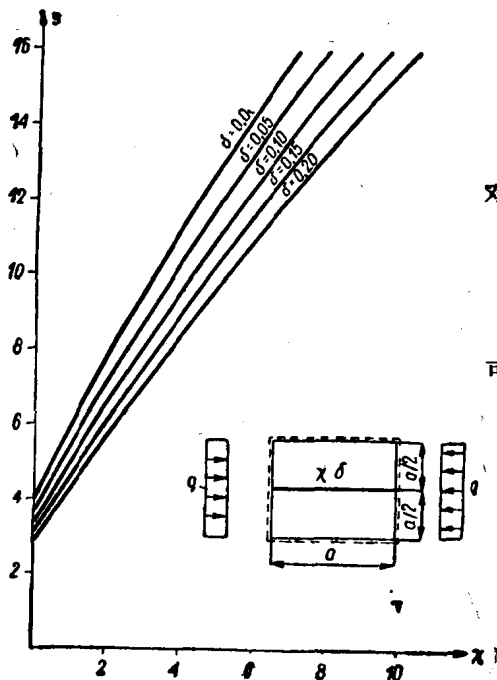


圖 10