



高等数学（二）
线性代数

考点与题典

主审 姚慕生

主编 秦元元

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

会计专业(本科段)

辽宁大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学(二)线性代数 考点与题典

主 审 姚慕生
主 编 秦元元

辽宁大学出版社

©秦元元 2003

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 (二) 线性代数考点与题典/秦元元主编. —沈阳: 辽宁大学出版社, 2003. 7

ISBN 7-5610-4434-8

I. 高… II. 秦… III. 高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 020970 号

责任编辑: 胡家诗 祝恩民
黄永恒

封面设计: 刘桂湘
责任校对: 李 佳

辽 宁 大 学 出 版 社 出 版

地址: 沈阳市皇姑区崇山中路 66 号

邮编: 110036

联系电话: 024-86853301 [http: // www. lnupress. com. cn](http://www.lnupress.com.cn)

Email: mailer@lnupress.com.cn

丹东日报印刷厂印刷

辽宁大学出版社发行

幅面尺寸: 148mm×210mm

印张: 12

字数: 260 千字

2003 年 7 月第 1 版

2003 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1~5 000

定价: 16.00 元

出版说明

我社近几年来陆续出版了由全国高等教育自学考试指导委员会组织编写的自学考试用书 200 余种,包括自考教材及自学辅导系列、同步练习册系列,其后又推出了考点与题典系列。这些系列图书由于其权威性和实用性,适应和满足了全国各类考生自学理解、课后同步练习及考试的实际需求,出版后深受广大考生的欢迎和厚爱。为了把自学考试用书这一品牌做大做精,最近我们又全新推出了会计专业(专科和独立本科段)考点与题典系列丛书,并根据广大自学者应试备考的实际需要,有针对性地组织全国一批长期从事自考教学辅导、命题研究、评卷且经验丰富的专家、学者编写,由教材主编对各书内容、体例等进行认真审阅并担纲主审或主编。因此,本系列丛书与其他同类书相比更具有独创。

1. 体例设计独到。针对自考考生实际情况和应试需要,本套丛书各分册每章设考点和题典两部分。考点部分主要向考生介绍本章必须掌握的要点,并具体给出考试重点;题典部分则按最新全国高等教育自学考试试卷相应题型设计各章习题。通过这样的设计可使考生“点”、“面”兼顾,由“点”及“面”,既掌握重点和难点及考试点,又涵盖教材全部内容,对考生应试能够起到事半功倍的效果。

2. 习题针对性强。由于各书编写者均具有丰富的自考辅导、评卷、命题的阅历和经验,因而习题能够根据全国统一自学考试试卷的标准试题题型设计习题,其思路、风格及题量、难易程度等均与全国自学考试试题的标准一致,对考生而言可做到举一反三,触类旁通,有助于考生顺利通过考试。

3. 答案准确精练。各书习题答案均严格按照教材、大纲及自考

试题参考答案相应的评分标准和要求编写,经教材主编认真审阅,答案既准确、全面,又要点明晰,一目了然。

4. 实用性特点突出。从体例、内容到重点、难点、题型设计,力求体现实用性原则,旨在为考生应试提供更加切实有效的帮助。

各书最后均附录了该学科 2002 年全国高等教育自学考试试卷及标准答案,将有助于考生了解和把握考试的题型、题量及难易程度。同时也可以检测考生实战状态下的应试能力。

我们衷心希望这套丛书的出版,能够帮助参加自学考试的考生顺利通过考试,同时也敬请使用本书的广大读者对书中不足之处给以批评指正。

前 言

《高等数学(二)线性代数》是经济管理类本科段的一门基础课,《高等数学(二)》包括线性代数和概率统计两门课程。《高等数学(二)线性代数》为第一分册,其内容广泛,理论较深,使得许多考生望而生畏,不知怎样备考,甚至可能使一些考生仅因此科通不过考试,而未拿到毕业文凭。为了帮助参加《高等数学(二)线性代数》考试的考生们顺利通过考试,并能将基本的理论和方法应用于现代经济管理中,我们根据全国高等教育自学考试委员会颁布的《高等数学(二)线性代数自学考试大纲》和指定教材的基本内容和考核要求,并结合经济管理类专业这门课程自学考试命题的特点及类型,为自学者编写了这本《高等数学(二)线性代数考点与题典》辅导用书。

本书对姚慕生和高汝熹教授主编的《高等数学(二)线性代数》教材所附全部习题做了解答,并参考了近年来全国统一考试考题题型,精选了大量典型题,且做了详细解答。各章均附有考核要点和重点提示;解题过程思路清晰,注重培养考生的逻辑思维及综合分析能力。本书力求深入浅出,考生只要认真阅读,用心领会书中的要点和重点,强化各项训练,便能收到意想不到的效果。

最后,附上2002年全国自学考试《高等数学(二)线性代数》试题及标准答案,供考生参考。

本书由全国自学考试统编教材高等数学(经济管理类)系列教材主编之一、上海复旦大学姚慕生教授主审。

编写者多年从事自考辅导、评卷工作,教学经验丰富并受到各类考生欢迎,但由于本书编写时间所限,书中可能有不当之处,敬请使用本书的读者批评指正。

编 者

2003年5月

目 录

第一章 行列式	1
一、考点	1
(一)考核要点	1
(二)考核重点	1
二、题典	1
(一)习题参考解答	1
(二)典型题、考题精选及参考解答	25
第二章 矩阵	44
一、考点	44
(一)考核要点	44
(二)考核重点	44
二、题典	45
(一)习题参考解答	45
(二)典型题、考题精选及参考解答	88
第三章 线性方程组	126
一、考点	126
(一)考核要点	126
(二)考核重点	126
二、题典	126
(一)习题参考解答	126
(二)典型题、考题精选及参考解答	166
第四章 线性空间	209
一、考点	209

(一)考核要点	209
(二)考核重点	209
二、题典	209
(一)习题参考解答	209
(二)典型题、考题精选及参考解答	229
第五章 特征值问题与实二次型	249
一、考点	249
(一)考核要点	249
(二)考核重点	249
二、题典	249
(一)习题参考解答	249
(二)典型题、考题精选及参考解答	324
附录:	
2002 年上半年高等教育自学考试全国统一命题 考试高等数学(二)试卷	358
2002 年上半年高等教育自学考试全国统一命题 考试高等数学(二)试卷参考答案	363
2002 年下半年高等教育自学考试全国统一命题 考试高等数学(二)试卷	367
2002 年下半年高等教育自学考试全国统一命题 考试高等数学(二)试卷参考答案	373

第一章 行列式

一、考 点

☞ (一) 考核要点

1. 行列式、余子式和代数余子式的概念;
2. 行列式的性质;
3. 行列式按行及列的展开法;
4. 几种特殊的行列式的值; 对角形行列式, 上(下)三角行列式, 范德蒙行列式, 分块行列式;
5. 克莱姆法则.

☞ (二) 考核重点

1. 行列式的性质及行列式的计算;
2. 克莱姆法则及其应用.

二、题 典

(一) 习题参考解答

§ 1.1 习题

1. 求下列行列式中元素 a_{12}, a_{31}, a_{33} 的余子式及代数余子式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解: (1) a_{12}, a_{31}, a_{33} 的余子式为

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

M18645/02

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式为

$$A_{12} = -M_{12}, A_{31} = M_{31}, A_{33} = M_{33}.$$

(2) a_{12}, a_{31}, a_{33} 的余子式为

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式为

$$A_{12} = -M_{12}, A_{31} = M_{31}, A_{33} = M_{33}.$$

2. 用定义计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{解: (1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-6) - 3(2-9) + 2(4-3)$$

$$= -5 + 21 + 2 = 18$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$(-2) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-12 + 2) - 0 - 2(1 - 6)$$

$$= -10 + 10 = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(0 + 1) - (0 + 2) -$$

$$2(0 + 1) + (6 - 1)$$

$$= -1 - 2 - 2 + 5 = 0$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (6 + 4) - 4(2 + 2) = -6$$

3. 用定义计算下列行列式,再按第二列或第三列展开,比较所得的值是否相同.

$$(1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解:(1) 由定义

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = 1 - 1 = 0$$

按第二列展开

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ = -2(0 + 2) + (-1 + 3) - (-2 - 0) \\ = -4 + 2 + 2 = 0$$

(2) 由定义

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - 0) - (1 - 0) \\ = 2 - 1 = 1$$

按第二列展开

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = - (1 - 0) + (2 - 0) = 1$$

(3) 由定义

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ = -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = -3(3 + 1) + 4(6 - 0) - (-2 - 0) \\ = -12 + 24 + 2 = 14$$

按第三列展开

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$5 \left[\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right] - 2 \left[4 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \left. \right] + 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$\left[4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 5[(0-0) + 3(0-0)] - 2[4(0-0) + (-1-0) + 3(-4-0)] + 4(0-0) + 3(-3-0) - [4(0-0) - (-3-0)] = -2[-1-12] - 9 - 3 = 26 - 12 = 14$$

4. 用定义计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \\ 11 & 7 & 5 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{解: (1)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \\ 11 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$11 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -45 - 42 + 3(15 + 14) +$$

$$11(18 - 18)$$

$$= 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(5-0) = 10$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}$$

$$= a(b^2c^3 - b^3c^2) - b(a^2c^3 - a^3c^2) + c(a^2b^3 - a^3b^2)$$

$$= abc(bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b)$$

$$= abc(c-a)(c-b)(b-a)$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= bc^2 - cb^2 + a^2c - ac^2 + ab^2 - a^2b$$

$$= (c-a)(c-b)(b-a)$$

§ 1.2 习题

1. 试用行列式定义将这一节各例子中的行列式分别计算出来，从而具体验证行列式的 6 条基本性质。

$$\text{例 1 若 } A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \text{ 则 } A' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

$$\text{解: } A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1 + 2\sqrt{2} - 3 = 2\sqrt{2} - 4$$

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1 - 2(-\sqrt{2} - 0) + 3(-1 - 0)$$

$$=-1+2\sqrt{2}-3=2\sqrt{2}-4$$

所以 $A = A'$

$$\text{例 2 } A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \\ &\quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-0) - 3(0-4) + (0+2) \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \\ &\quad \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2(1-0) - 3(0+8) + (0-4) \\ &= -30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \\ &\quad 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4(1-0) - 12(0-4) + 4(0+2) \\ &= 60 \end{aligned}$$

所以 $B = -2A, C = 4A$

$$\text{例 3 (1)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{第一、二行对换})$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{第二、三列对换})$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第一、二两行相同})$$

$$(4) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第二、三列相等})$$

$$\text{解: (1)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = (0 - 1) + 2(-2 - 1) = -7$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = - (0 - 1) + 2(1 + 2) = 7$$

$$\text{所以} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = (1 - 0) + 2(1 + 2) = 7$$

$$\text{所以} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (7 - 0) - (7 - 0) + 5(0 - 0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -3 \end{vmatrix} &= (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \\
 &\quad 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= -2(-6+6) - 4(-3+3) + \\
 &\quad 7(2-2) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{例 4} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} &= 0 \text{ (第三行是第一行的 } \sqrt{2} \text{ 倍)} \\
 (2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & -5 & 7 \end{vmatrix} &= 0 \text{ (第一列与第二列元素成比例)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解:} (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} + \sqrt{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\
 &= 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2}(-5-2) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & -5 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -4 & -5 & 7 \end{vmatrix} - \\
 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -4 & -5 & 7 \end{vmatrix} &- (-1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} + \\
 (-4) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} &- 2 \left[4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right] + \\
 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} &- 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8(7+20) - 4(12-5) - \\
 8(7+20) &+ 8(4-0) + 4(12-5) - 8(4-0) = 0
 \end{aligned}$$