中學數學複習指導

微積分

端福澤編著・商務印書館

中學數學複習指導

微積分

端福澤編著・商務印書館

中學數學復習指導
微積分
編著者——端福澤
出版者——商務印書館香港分館
香港皇后大道中35號
印刷者——商務印書館香港印刷廠
香港九龍炮仗街75號
版　次——1979年11月初版

目　錄

第一章　函數……1
§1•1 變量與常量……1
§1•2 函數……2
§1•3 基本初等函數……8
習題 1……9
第二章　函數的極限……11
§2•1 無窮大和無窮小……11
§2•2 函數極限的定義……11
§2•3 連續函數……14
§2•4 極限定理（可從定義去證明，這裏略去）……14
§2•5 兩個重要之極限……19
習題 2……25
第三章　函數的導數及微分……27
§3•1 導數的引進……27
§3•2 導數的定義……28
§3•3 求導數的一般法則……29
§3•4 函數的導數公式及求導數的規則……32
習題 3……41
習題 4……42
習題 5（複合函數）……44
習題 6……50

習題 7 ……………………………………………………61
習題 8 ……………………………………………………62
習題 9 ……………………………………………………63
§3·5 高階導數……………………………………………64
習題10……………………………………………………67
複習題一…………………………………………………68
§3·6 函數導數的應用…………………………………71
習題11……………………………………………………77
習題12……………………………………………………99
習題13…………………………………………………117
習題14…………………………………………………128
習題15…………………………………………………141
第四章 不定積分……………………………………144
§4·1 不定積分的概念…………………………………144
§4·2 不定積分的基本性質……………………………145
§4·3 積分基本公式……………………………………147
習題16…………………………………………………151
§4·4 換元積分法………………………………………153
習題17…………………………………………………157
習題18…………………………………………………162
習題19…………………………………………………168
§4·5 三角函數微分式的積分…………………………170
習題20…………………………………………………177
§4·6 有理分式的積分…………………………………180
§4·7 分部積分法………………………………………182

習題21…………………………………………………… 185
複習題二………………………………………………… 187
§4·8 積分常數的決定……………………………… 189
習題22…………………………………………………… 196
第五章　定積分……………………………………… 199
§5·1 定積分的定義………………………………… 199
§5·2 定積分的計算方法…………………………… 204
§5·3 定積分的簡單性質…………………………… 207
習題23…………………………………………………… 212
§5·4 定積分在面積和體積計算中的應用……… 215
習題24…………………………………………………… 222
習題25…………………………………………………… 233
複習題三………………………………………………… 235

1 函　　數

§1·1　變量與常量

當我們觀察各種自然現象或研究某事物的過程中，時常會遇到兩種不同的量，即變量與常量。

在過程進行中不斷起變化，即可取不同數值的量叫變量，常用 x，y，u，v，t…表之；在過程中相對保持不變的量叫常量，常用 k，a，b，c…表之。

如觀察自由落體運動，可發現落體下降的時間及下降的距離是變量，而落體的質量在這一過程中可以看成常量。

變量是普遍存在的，而常量的存在却是相對的，並且一個量是變量或常量也不是絕對的。例如一個人，從其一生來看，身高是一個變量，若從某天之內來看，身高可相對地看成一個常量。

常見之變量及常量如時間、質量、距離、溫度……通常均可用實數來表示，我們稱它們爲實變量及實常量，本書討論的對象都是實變量及實常量，簡稱爲變量及常量。

§1·2 函 數

1.函數之定義：

同一過程中的各種變量，通常並不是獨立變化，而是互相聯系着的。

以自由落體運動爲例，落體下降之距離 S 和經過的時間 t 滿足如下的關係：

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

即時間 t 改變時，距離 S 也跟着改變。時間 t 取一個值如 2 秒，距離 S 也有一個值和它對應如 19.6 米（$g\doteq 9.8$ 米/秒^2）。數學上，我們稱 S 爲 t 之函數，t 叫自變量，S 也叫因變量，它們的關係稱爲函數關係。

一般地說，在某一變化過程中有兩個互相聯系着的變量 x 和 y，如果對於 x 在其變化範圍內取得的每一個值，y 按照確定的法則有確定的值和它對應，則稱 y 爲 x 的函數，記爲：

$$y=f(x)\ \text{或}\ y=\varphi(x)\ \text{或}\ y=g(x)\cdots\cdots$$

x 叫自變量，y 也叫因變量。

自變量和因變量並不是絶對的。如在落體公式中，若我們已知道下降的距離 S 而要求出下降的時間 t 時，其關係式應改爲：

$$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$$

顯然 S 變爲自變量而 t 成爲因變量了。

上述的函數定義中，明顯地包含了下述三個方面的內容：

I 定義域

自變量的變化範圍叫函數之定義域。它是由實際問題之意義所確定的。如落體運動中，自變量 t 顯然只能取正實數。如果我們只抽象地討論用數學式表示之函數時，函數的定義域是指使數學式有意義的自變量的數值範圍。具體求法的依據是：

(*a*) 若數學式中含有分母，那末分母不能爲零；

(*b*) 爲保證因變量的數值在實數範圍內，則偶次方根之被開方數不能爲負值；

(*c*) 對數之真數不能爲零或負數，底不能爲 1 、負數或零。

II 對應法則

因變量 y 和自變量 x 之依賴關係即函數關係叫對應法則，它是函數概念中最本質的要素。如函數

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

中，因變量 S 與自變量 t 之平方成正比例，比例係數是 $\frac{1}{2}g$。這關係通稱爲函數關係，也即是函數的對應法則。函數不同，其對應法則也不同。

對應法則的表達形式很多，常用的有解析法，又叫公式法、圖象法及列表法。

解析法是用數學式將自變量與因變量的函數關係表達出來的方法；圖象法是用坐標平面上的曲綫來表示函數的方法。（通常用横坐標表示自變量，縱坐標表示因變量，自變量及因變量的每

一對值對應於坐標平面上的一個點，這些點的全體便形成了一條曲綫）；列表法是把一系列的自變量與其對應的函數值列成表格的方法。

III 函數值

對於函數 $y=f(x)$，當自變量 x 在定義域内取得一值 x_0，依對應法則所求出的因變量 y 的值 y_0，叫 $x=x_0$ 時的函數值。用

$$y_0=f(x_0) \text{ 或 } y_0=f(x)\Big|_{x=x_0}$$

表之。x_0 可以爲一個常量，一個變量或一個數學式。

函數值的全體叫函數的值域。

例 1 求下列各函數的定義域。

(1) $y=x^3-3x^2+6x-1$

(2) $y=\dfrac{x-2}{x^2+5x+6}$

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{log(2-x)}$

(4) $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

解：(1) 不管 x 取任何實數，函數 $y=x^3-3x^2+6x-1$ 都有意義，所以函數的定義域是一切實數；

(2) 要使函數 $y=\dfrac{x-2}{x^2+5x+6}$ 有意義，必須

$$x^2+5x+6\neq 0 \qquad \text{即 } x\neq -2 \text{ 及 } x\neq -3$$

所以函數的定義域是：

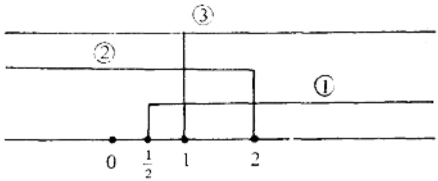
$$x<-3,\quad -3<x<-2 \text{ 或 } x>-2。$$

(3) 要使函數 $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\log(2-x)}$ 有意義，必須

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 & ① \\ 2-x>0 & ② \\ 2-x \neq 1 & ③ \end{cases}$$

解之得：$\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ x<2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

求公共解：



所以函數的定義域爲：

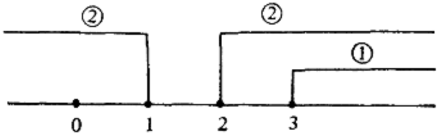
$$\frac{1}{2} \leqslant x<1 \text{ 或 } 1<x<2$$

(4) 要使函數 $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 有意義，必須

$$\begin{cases} x-3 \geqslant 0 & ① \\ x^2-3x+2>0 & ② \end{cases}$$

解之得：$\begin{cases} x \geqslant 3 \\ x > 2 \text{ 或 } x < 1 \end{cases}$

求公共解：



得 $x \geqslant 3$ 即爲函數的定義域。

例 2 已知函數 $f(x)=x^2-3x+5$，求 $x=2$、x_0+1、$x_0+\triangle x$ 的函數值。

解：$f(2)=2^2-3\times2+5=3$

$$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3$$

$$\begin{aligned} f(x_0+\triangle x)&=(x_0+\triangle x)^2-3(x_0+\triangle x)+5\\ &=x_0^2+2x_0\cdot\triangle x+\triangle x^2-3x_0-3\triangle x+5\\ &=\triangle x^2+(2x_0-3)\cdot\triangle x+x_0^2-3x_0+5 \end{aligned}$$

例 3 已知函數 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求函數值 $f(0)$、$f(1)$ 和 $f(a)$。

解：$\because\ f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$

$$\therefore\ f(0)=\frac{|0-2|}{0+1}=\frac{2}{1}=2$$

$$f(1)=\frac{|1-2|}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}=\begin{cases}\dfrac{a-2}{a+1} & (a>2)\\ 0 & (a=2)\\ \dfrac{2-a}{a+1} & (a\quad 2\text{且 } a\neq -1)\end{cases}$$

例 4　已知函數 $\varphi(x)=x^3+1$，求函數值 $\varphi(x^2)$，$\varphi[\varphi(x)]$。

解：$\because$　函數 $\varphi(x)=x^3+1$

$\therefore$　$\varphi(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$

$$\varphi[\varphi(x)]=(x^3+1)^3+1$$

$$=x^9+3x^6+3x^3+2$$

例 5　已知函數 $\varphi(x)=log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$，　證明 $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$。

證明：$\because$

$$\varphi(x)+\varphi(y)=log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+log\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$$

$$=log\left[\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\right]$$

$$=log\left(\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}\right)$$

而

$$\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=log\left[\frac{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}\right]$$

$$=log\left(\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}\right)$$

$\therefore$　等式成立。

練　習

1. 求函數 $y=\sqrt{x^2-4}$ 的定義域。
2. 已知函數 $f(x)=\dfrac{2x}{16x^2-25}$，求函數值 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 及 $f(a+1)$。
3. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，證明 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$。

2.顯函數和隱函數：

函數之形式是多種多樣的，對應法則用公式表示的函數，大體可分兩類：顯函數和隱函數。

用自變量直接表示因變量的函數，叫顯函數。如：

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad y=\pm\sqrt{a^2-x^2} \qquad \cdots\cdots$$

不用自變量直接表示因變量，它們只存在於同一個數學式中的函數，叫隱函數。如：

$$y-x-K\sin y=0 \qquad x^{\frac{2}{3}}-xy+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots$$

隱函數一般表達式爲：

$$F(x,\ y)=0$$

§1·3　基本初等函數

本書所討論的函數都屬基本初等函數。基本初等函數分爲代數函數及超越函數。

由變量、常量的加、減、乘、除，或其常數冪，開方等所組

成的函數如：

$$y = x^3 \qquad y = ax^2 + bx + c \qquad y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \cdots\cdots$$

叫代數函數。超越函數包括下述六種函數：

指數函數：如 $y = a^x + 1 \qquad y = ae^x + K \qquad \cdots\cdots$

對數函數：如 $y = logx \qquad y = lnx^2 \qquad \cdots\cdots$

三角函數：如 $y = sin\, x \qquad \cdots\cdots$

反三角函數：如 $y = arc\, sin\, x$，（若 y 爲 x 之三角函數，如正弦函數即 $y = sin\, x$ 時，則稱 x 爲 y 的反三角函數，如反正弦函數即 $x = arc\, sin\, y$，一般用 x 表自變量，y 表因變量，則寫成 $y = arc\, sin\, x$）；

雙曲函數：如 $y = shx$，$y = chx$，（由指數函數 e^x，e^{-x} 構成的一類在工程技術的應用問題中常見的函數叫雙曲函數，如雙曲正弦 $y = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，其反函數叫反雙曲函數，如反雙曲正弦 $y = arc\, shx$）。

反雙曲函數：如反雙曲正弦 $y = arc\, shx$。

習題 1

求下列各函數的定義域（1—15）。

1. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-5}$

2. $y = -3x^2 + 2x + 1$

3. $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$

4. $y = \sqrt{-2x + 10}$

5. $y = log(-x^2 + 5x - 4)$

6. $y = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x+4}$

7. $y = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + log(5-x)$

8. $y=log\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$　　9. $y=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}$

10. $f(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{log(2x-1)}$　　11. $y=\sqrt{2+x-x^2}$

12. $y=\frac{x^2}{1+x}$　　13. $y=(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

14. $y=log(x+2)+log(x-2)$　　15. $y=log(1-2cos\,x)$

16. 已知函數 $f(x)=x^3-3x+1$，求函數值 $f(1)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 及 $f(1+\triangle x)$。

17. 已知函數 $F(x)=3^x-1$，求 $F(\sqrt{2})-F(0)$。

18. 已知函數 $\varphi(x)=\frac{2x+1}{x-7}$，求 $\varphi(\sqrt{2})$。

19. 已知函數 $g(x)=3$，求 $g(2)-g(1)$。

20. 已知函數 $\varphi(x)=lnx$，求 $\varphi(e)-\varphi(1)$及 $\varphi(e^2)-\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$。

21. 已知 $\phi(x)=x^3-10x^2+31x-30$，求證：

(a) $\phi(2)=0$　　(b) $\phi(3)=\phi(5)$

(c) $\phi(1)<\phi(3)$　　(d) $\phi(-1)=-6\phi(6)$

22. 已知函數 $f(x)=x^3+10x^2+20x+21$，求$f(yz)$ 及$f(x-2)$。

23. 已知$f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求$f[g(x)]$及$g[f(x)]$。

24. 已知 $f(x)=\frac{2}{1+x}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\frac{2}{f(x)}\right]$及 $f\{f[f(x)]\}$。

25. 已知 $f(\phi)=cos\phi$，求證 $f(\phi)=f(-\phi)=-f(\pi-\phi)$ $=-f(\pi+\phi)$。

26. 已知 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，求證$\frac{f(m_1)-f(m_2)}{1+f(m_1)\cdot f(m_2)}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$。

27. 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，且 $f(-1)=0$；$f(0)=2$；$f(1)=-3$；$f(2)=5$。求 a、b、c、d。

2 函數的極限

§2·1 無窮大和無窮小

變量 u 依序變化時，其絶對值越來越大，且直至某個時刻，過此時刻後，它的絶對值永遠大於任意給定的正大數 M 時，我們稱變量 u 爲無窮大，記爲：

$$u \to \infty \text{ 或 } lim\, u = \infty$$

變量 u 依序變化時，其絶對值越來越小，直至某個時刻，過此時刻後，它的絶對值永遠小於任意給定的正小數 ε 時，我們稱它爲無窮小，記爲：

$$u \to 0 \text{ 或 } lim\, u = 0$$

明顯地，無窮大和無窮小互爲倒數關係。即無窮大的倒數爲無窮小；無窮小的倒數爲無窮大。

§2·2 函數極限的定義

考慮函數 $f(x) = 3x + 2$，當 $x = 1$ 時，函數 $f(x) = 5$。若 $x \neq 1$，而不斷接近於 1 時，對應的函數值又是如何呢？請看下面的