中学生实用解题辞典

（平面解析几何·立体几何）

中 学 生 实 用 解 题 辞 典

平面解析几何 · 立体几何

刘国材　沈　勋　岑志林　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：520,000　开本：$787\times1092\ {}^{1}/_{32}$　印张：$15\,{}^{1}/_{2}$　插页：4

印数：1—10,644

1988年2月第1版　1988年2月第1次印刷

责任编辑：黄晓梅　谭　坚　责任校对：杨　力

封面设计：谭成荫　周广东

ISBN7-5382-0460-1/Z·15

定　价：4.00 元

《中学生实用解题辞典》编辑委员会

（按姓氏笔画为序）

马忠林　王鸿钧　方嘉琳　余元希　郭大钧　梁宗巨　曹才翰　魏庚人

编写人员：刘国材　沈　勋　岑志林

审校人员：高文生　石治源　张伯瑜　朱传礼

出 版 说 明

平面解析几何部分

1. 本书分直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线、极坐标、复平面六章。共收录平面解析几何习题600多道。并且书后附有平面解析几何的有关公式。

2. 现行教材中的坐标变换和参数方程的有关内容，散见在本书各章的有关习题中，而没有独立成章。如直线的参数方程最早出现在第一章的习题中；圆的参数方程在解答第二章的习题中就被引用。坐标变换中的旋转（转轴）公式是现行教材中的选学内容。所以有关的习题一概没有选入。平移公式最早见于第二章的有关习题。

3. 复平面一章是在现行高中代数的有关内容的基础上编写的。应用复数解答某些几何问题是比较简便的。所选的习题中也有一部分应用复数来解答，并不比用代数法或平面几何的方法解答简便，这样作法仅仅是为了说明复数在解题中是怎样应用的。

4. 题目的解答一般是一题一解。有较为典型或简便的其它解法的习题，则给出两解〔解〕和〔另解〕。两解之外如还有需要强调的解法，在题后的〔注意〕中作出简要的说明。

5. 本书中已收录题目的结论，在其它题目中被引用时，一般不再重复，只注明“参见第××题”。

6. 现行教材中，关于行列式的内容是选学部分，因为用行列式计算三角形的面积，有时比较方便。所以，本书中的部分习题采用了行列式的解题方法。

7. 现行教材中“圆锥曲线的切线和法线”一节是选学内容，本书中涉及圆锥曲线的切线的习题一般都不引用这一节中所给出的切线方程。个别习题需引用有关切线方程时，都在该题的题目中指明。

立体几何部分

1. 本辞典的公理体系均按人民教育出版社（1983 年10月第一版）高级中学课本立体几何全一册（甲种本）为准。

2. 本书共收集二百七十八题。题目的选择，既遵循精选的原则，又考虑到中学生的实际水平。题目的解答力求规范、简捷。

3. 本书的索引，基本上是按题目求解的内容分类，以便于读者查阅。

目　　录

平面解析几何部分

立体几何部分

平面解析几何部分

一、直　线

1．定比分点

1．点 $P(x,-23)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda=-\frac{4}{3}$．若 P_1 的坐标是 $(8,5)$，P_2 的横坐标是 -13，求 x 的值及点 P_2 的纵坐标。

【解】设 P_2 的纵坐标为 y．依题意，得

$$\frac{5+\left(-\frac{4}{3}\right)y}{1-\frac{4}{3}}=-23,$$ 解得

$y=-2$；依题意，得

$$x=\frac{8+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(-13)}{1-\frac{4}{3}},$$

解得 $x=-76$。

2．已知平行四边形的三个顶点分别是 $A(2,3)$、$B(4,-1)$、$M(0,5)$．求第四个顶点的坐标。

【解】设平行四边形的第四个顶点为 N。若 AB 是对角线，它的中点是 $(3,1)$，M、N 也以 $(3,1)$ 为其中点，解得顶点 N 的坐标是 $(6,-3)$；

若 AM 是对角线，它的中点是 $(1,4)$，则 B、N 也以 $(1,4)$ 为中点，解得顶点 N 的坐标是 $(-2,9)$；

若 BM 是对角线，它的中点是 $(2,2)$，则 A、N 也以 $(2,2)$ 为中点，解得顶点 N 的坐标是 $(2,1)$。

所以，平行四边形的第四个顶点的坐标是 $(6,-3)$ 或 $(-2,9)$ 或 $(2,1)$。

【注意】要分三种不同的情况，分别写出相应的第四个顶点的坐标。

3．已知三角形的顶点是 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$、$B(4,-2)$、$C(1,y)$，重心是 $G(x,-1)$．求 x 和 y 的值。

【解】设 AB 的中点为 D，则 D 的坐标是 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$，依题意，

得 $x=\dfrac{1+\frac{5}{2}\times 2}{1+2}$，解得 $x=2$；依题意，得 $-1=\dfrac{y+2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+2}$，解得 $y=-\frac{5}{2}$。

【另解】由三角形的重心坐标公式得

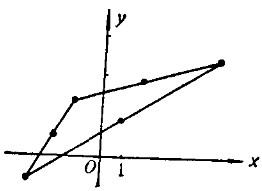
$$x=\frac{1+4+1}{3} \text{ 和 } -1=\frac{\frac{3}{2}-2+y}{3},$$

分别解得 $x=2$, $y=-\frac{5}{2}$。

【注意】两种解法中，显然另解比较简捷。

4．已知三角形的三条边的中点坐标分别是(2,4)、(1,2)、(-3,1)．求这个三角形各顶点的坐标。

【解】设三角形的顶点坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)．依题意，得



$$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=2 \cdots ① \\ \frac{x_2+x_3}{2}=1 \cdots ② \\ \frac{x_1+x_3}{2}=-3 \cdots ③\end{cases}$$

由①+②+③，得

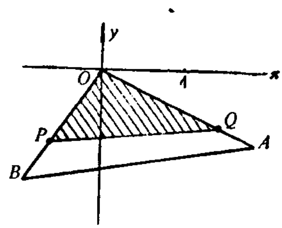
$x_1+x_2+x_3=0\cdots④$

由④-①，得 $x_3=-4$；同理可解得 $x_1=-2$；$x_2=6$。

类似地，可解得 $y_1=3$，$y_2=5$，$y_3=-1$。所以，所求三角形的顶点坐标是(-2,3)、(6,5)、(-4,-1)。

【另解】参见第2题解法。可解得三角形的三个顶点的坐标是(-2,3)、(6,5)、(-4,-1)。

5．已知三角形的顶点是 $O(0,0)$、$A(8,-4)$、$B(-4,-6)$，点 P 分$\overline{OB}$为 2∶1，Q 是 OA 边上的点，且 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle OAB}$．求 Q分$\overline{OA}$ 之比λ的值。



【解】设 $\angle AOB=\alpha$，依题意，

得$\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{1}{2}$，由公式，得

$$\frac{\frac{1}{2}|OP|\cdot|OQ|\sin\alpha}{\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\alpha}=\frac{1}{2}\cdots①$$

由已知，得$\frac{|OP|}{|PB|}=2$，

$$\frac{|OP|}{|OB|}=\frac{2}{2+1}\cdots②$$

把②代入①，得

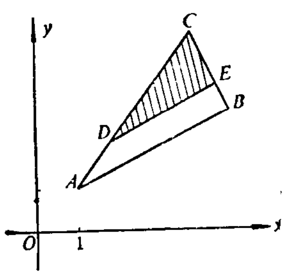
$$\frac{|OQ|}{|OA|}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

得 $\frac{|OQ|}{|QA|}=\frac{3}{1}$，即 $\lambda=3$。

【注意】 本题常见的其它解法是首先求出 $\triangle OAB$ 的面积和 P 点的坐标，最后求得 Q 点坐标及比值λ。这种解法比较麻烦。稍简便的其它解法可参见第86题。

6. 已知三角形 ABC 的顶点是 $A(1,1)$、$B(5,3)$、$C(4,5)$，D、E 分别是 AC、BC 边上的点，$DE /\!/ AB$，且 $S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$。求 D 点的坐标。

【解】 设 D 点的坐标为(x,y)，依题意 $DE /\!/ AB$，得



$\triangle DEC\backsim\triangle ABC$，得$\frac{|CD|^2}{|AC|^2}$

$=\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$，

$\frac{|DC|}{|CA|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{|AC|}{|CD|}$

$=\sqrt{2}$，

这就是说点 C 分 $\overline{AD}$ 之比为 $-\sqrt{2}$。

由公式得 $4=\frac{1+(-\sqrt{2})x}{1-\sqrt{2}}$ 和

$5=\frac{1-\sqrt{2}y}{1-\sqrt{2}}$，分别解得

$x=\frac{8-3\sqrt{2}}{2}$和 $y=5-2\sqrt{2}$。

所以，D 点的坐标是

$\left(\frac{8-3\sqrt{2}}{2},5-2\sqrt{2}\right)$。

7. 已知两点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，点 P 是 AB 延长线上的一点，且$|AB|\cdot|BP|=m(m>0)$。求 P 点的坐标。

【解】 设点 P 的坐标为(x,y)由已知，得

$$|BP|=\frac{m}{|AB|}，得\frac{|BP|}{|AB|}=$$

$$\frac{m}{|AB|^2}=\frac{m}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

这就是说，点 B 内分 $\overline{PA}$ 之比为

$$\lambda=\frac{m}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

由定比分点公式得

$$x_2=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}和\quad y_2=\frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda},$$

分别解得 $x=x_2+\lambda(x_2-x_1)$ 和 $y=y_2+\lambda(y_2-y_1)$，即

$$x=x_2+\frac{m(x_2-x_1)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

$$y=y_2+\frac{m(y_2-y_1)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

所以，P 点的坐标是

$$\left(x_2+\frac{m(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},\ y_2+\frac{m(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right).$$

2. 距　离

8. 已知两点 $A(-2,\ -1)$、$B(1,\ 2)$，求以 AB 为其一边的正三角形 ABC 的第三个顶点 C 的坐标。

【解】设点 C 的坐标为 (x,y)。依题意，得

$|AC|=|AB|$，$|BC|=|AB|$，则 x,y 适合方程组

$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{18} & \cdots① \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{18} & \cdots②\end{cases}$$

由①^2－②^2，得 $6x+6y=0$，

化简，得 $x=-y\cdots$③。

把③代入①，解得

$x_1=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{2}$ 或 $x_2=\dfrac{-1-3\sqrt{3}}{2}$。代入③，得

$y_1=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$ 或 $y_2=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$。

所以，第三个顶点C的坐标是

$\left(\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}\right)$ 或

$\left(\dfrac{-1-3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$。

9. 已知点 $A(x,2)$、$B(-2,-3)$、$C\left(\dfrac{13}{2},0\right)$，且 $|AB|=\dfrac{1}{2}|AC|$。求 x 的值。

【解】由已知 $|AB|=\dfrac{1}{2}|AC|$，得 $4|AB|^2=|AC|^2$，由公式，得

$$4[(x+2)^2+(2+3)^2]=\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+(2-0)^2,$$

整理得 $x^2+\dfrac{29}{3}x+\dfrac{93}{4}=0$，

解得 $x_1=-\dfrac{9}{2}$ 或 $x_2=-\dfrac{31}{6}$。

所以，所求 x 的值是 $-\dfrac{9}{2}$或$-\dfrac{31}{6}$。

10. 已知两点 $A\ (a,\ 1)$ 和 $B\left(-8\dfrac{1}{2},-3\right)$之间的距离等于 $4\sqrt{5}$。求 a 的值。

【解】依题意，得 $|AB|=4\sqrt{5}$，即

$$\sqrt{\left(a+8\frac{1}{2}\right)^2+(1+3)^2}=4\sqrt{5},$$

整理得 $\left|a+8\dfrac{1}{2}\right|=8$，解得 $a_1=-\dfrac{1}{2}$ 或 $a_2=-\dfrac{33}{2}$。

11. 已知三角形 ABC 的顶点坐

标是 $A(0,0)$、$B(10,2)$、$C(12,-8)$。试判断此三角形的形状。

【解】由公式，得

$$|AB|=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}.$$

$|BC|=\sqrt{(12-10)^2+(-8-2)^2}=\sqrt{104}$. $|AC|=\sqrt{12^2+(-8)^2}=\sqrt{208}$. 得 $|AB|=|BC|$ 和 $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$.

所以，三角形 ABC 是等腰直角三角形。

【注意】本题容易忽略各边长平方之间的关系，从而得出不全面的判断结果。

12．已知三角形的三个顶点分别是 $O(0,0)$、$A(a,b)$、$B(a+b,b-a)$。试判断三角形 OAB 的形状。

【解】由公式，得 $|OA|=\sqrt{a^2+b^2}$. $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$. $|OB|=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$. 得 $|OA|^2+|AB|^2=2(a^2+b^2)=|OB|^2$ 和 $|OA|=|AB|$. 所以，三角形OAB是等腰直角三角形。

13．已知点 $A(1,-3)$，在坐标轴上求一点 P，使点 P 到已知点 A 的距离等于5．

【解】若点 P 在 x 轴上，设点 P 的坐标为$(a,0)$。依题意，应有 $|AP|=5$，得$\sqrt{(a-1)^2+9}=5$，得$(a-1)^2+9=25$，得 $(a-1)^2=16$，解得 $a_1=5$ 或 $a_2=-3$。所以，所求点 P 的坐标是 $(5,0)$ 或 $(-3,0)$；若点 P 在 y 轴上，设点 P 的坐标为 $(0,b)$。依题意，应有 $|PA|=5$，得 $\sqrt{(0-1)^2+(b+3)^2}=5$，得$(b+3)^2+1=25$，得 $(b+3)^2=24$，解得 $b_1=-3+2\sqrt{6}$ 或 $b_2=-3-2\sqrt{6}$。所以，所求点 P 的坐标是$(0,-3+2\sqrt{6})$ 或 $(0,-3-2\sqrt{6})$．综合前述，适合题意的点有四个，它们的坐标分别是 $(5,0)$、$(-3,0)$、$(0,-3+2\sqrt{6})$和$(0,-3-2\sqrt{6})$．

14．已知点 $P(8,4)$，点 Q 与 y 轴的距离等于5，且点 Q 与点 P 的距离也等于5．求点Q 的坐标。

【解】若点 Q 在 y 轴的右侧，设点 Q 的坐标为 $(5,a)$。依题意，应有$\sqrt{(8-5)^2+(4-a)^2}=5$，得$(a-4)^2+9=25$，得$(a-4)^2=16$，解得 $a_1=8$ 或 $a_2=0$。所以，所求点 Q 的坐标是$(5,8)$或 $(5,0)$。若点 Q 在 y 轴的左侧，设点 Q 的坐标为 $(-5,b)$。依题意，应有 $\sqrt{(8+5)^2+(4-b)^2}=5$，得$13^2+(b-4)^2=25$，得 $(b-4)^2=-144$。这个方程无实根．所以，在y轴的左侧没有适合题意条件的点。综合前述，适合题意的点 Q 只有两个，它们的坐标是$(5,8)$或$(5,0)$。

15．已知点 $A(2,-2)$、$B(-2,-5)$．点 P 是坐标轴上一点，且 $\angle APB=90^\circ$。求 P 点的坐标。

【解】若点 P 是 x 轴上一点，设它的坐标为 $(a,0)$。依题意，应有 $\triangle APB$ 是直角三角形，且点P是直角的顶点，得 $|AB|^2=|AP|^2+|BP|^2$，得 $(2+2)^2+(-2+5)^2=(a-2)^2+(0+2)^2+(a+2)^2+(0+5)^2$，得 $25=2a^2+37$，得 $2a^2=-12$，这个方程无实根，这就是说，在 x 轴上适合题意条件的点不存在；若点 P 是 y 轴上的点，设点 P 的坐标为$(0,b)$。依题意，应有 $|AB|^2=|AP|^2+|BP|^2$，得 $25=(2-0)^2+(b+2)^2+(-2-0)^2+(b+5)^2$，得 $25=2b^2+14b+37$，得 $b^2+7b+6=0$，解得 $b_1=-1$ 或 $b_2=-6$。所以，适合题意的点 P 的坐标是$(0,-1)$ 或 $(0,-6)$。综合前述，适合题意的点 P 只有两个，它们在 y轴上，坐标是$(0,-1)$或$(0,-6)$。

16. 点 P 到 x 轴和 y 轴的距离之比等于 4:3，且它到两个已知点 $M(2,-1)$、$N(4,3)$ 的距离相等。求点 P 的坐标。

【解】设点 P 的坐标为(x,y)，依题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{|y|}{|x|}=\dfrac{4}{3} & \cdots①\\ \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} & \cdots②\end{cases}$$

由②式，得 $x+2y=5$ $\cdots$③

由①式，得 $y=\frac{4}{3}x$ 或 $y=-\frac{4}{3}x$。分别与③联立，解得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{15}{11}\\ y_1=\dfrac{20}{11};\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=-3\\ y_2=4.\end{cases}$$

所以，P 点坐标是$(-3,4)$ 或 $\left(\frac{15}{11},\frac{20}{11}\right)$.

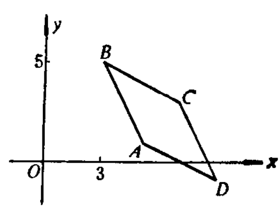
【注意】点 P 到 x 轴和 y 轴距离之比容易误写成$\frac{|x|}{|y|}$或 $\frac{y}{x}$ 或 $\frac{x}{y}$，从而得出错误的结果或不完全的解答。

17. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点是 $A(a,1)$、$B(3,5)$、$C(7,3)$、$D(b,-1)$。求 a、b 的值。

【解】由公式，得

$|BC|=\sqrt{(3-7)^2+(5-3)^2}$，

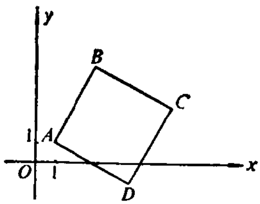
得 $|BC|=\sqrt{20}$。



因为，$|AB|=|BC|$，得 $\sqrt{(a-3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{20}$，解得 $a=5$ 或 $a=1$。

当 $a=5$ 时，由$|AD|=|CD|$，得$\sqrt{(b-5)^2+(1+1)^2}=$

$\sqrt{(b-7)^2+(-1-3)^2}$，解得 $b=9$；



当 $a=1$ 时，由 $|AD|=|CD|$，得$\sqrt{(b-1)^2+4}=\sqrt{(b-7)^2+16}$，解得 $b=5$。

所以，a、b 的值是 $a=5$，$b=9$ 或 $a=1$，$b=5$。

【注意】 由于解题的过程不同，容易把 $a=1$，$b=9$ 和 $a=5$，$b=5$ 也作为答案。不难验证这是错误的。

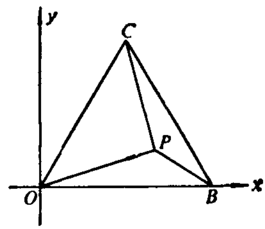
18．已知两点 $A(0,3)$、$B(4,5)$ 以及 x 轴上的一个动点 P，求 $|AP|^2+|BP|^2$ 的最小值和相应的 P 点的坐标。

【解】 设 P 点的坐标为 $(x,0)$，依题意，得 $|AP|^2+|BP|^2=x^2+9+(x-4)^2+25$，即 $|AP|^2+|BP|^2=2(x-2)^2+42$，得 $|AP|^2+|BP|^2\geqslant 42$。当$x=2$时，$|AP|^2+|BP|^2$有最小值。

所以，$|AP|^2+|BP|^2$ 的最小值是42；相应P 点的坐标是$(2,0)$。

19．已知正三角形的边长等于 a，点 P 是三角形所在平面内的任意一点。求$PA^2+PB^2+PC^2$的最小值；并指出相应的P点的位置。

【解】 建立坐标系（如图）。设点 P 的坐标为(x,y)。依题意，A 点与原点重合，B、C 两点的坐标分别是$(a,0)$、$\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$。由公式，得



$|PA|^2=x^2+y^2$，

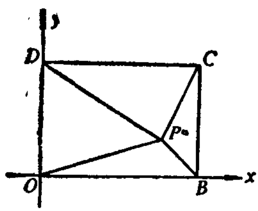
$|PB|^2=(x-a)^2+y^2$，

$|PC|^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2$。得 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=3\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+3\left(y-\frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2+a^2$，则 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\geqslant a^2$。

当且仅当 $x=\frac{a}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}a}{6}$时，上式取等号，即 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 的最小值是 a^2；相应 P 点的坐标是$\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{6}\right)$。此时，$P$ 点是正三角形的中心。

【注意】直角坐标系的建立可以有不同的方法。例如，使 x 轴与 AB 边重合，y 轴与 AB 边上的高重合，并使顶点 C 落在 y 轴的正半轴上。用这样建立的坐标系解答本题也是比较简便的。

20．已知矩形的边长分别为 a、b，点 P 是矩形所在平面内的任意一点．求 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 的最小值；并指出相应 P 点的位置．



【解】建立坐标系（如图），由于点A与坐标原点重合，故 A点坐标是(0，0)，，其它顶点坐标是 $B(a,0)$、$C(a,b)$、$D(0,b)$。设点P的坐标为(x,y)，依题意，得 $|PA|^2=x^2+y^2$，$|PB|^2=(x-a)^2+y^2$，$|PC|^2=(x-a)^2+(y-b)^2$，$|PD|^2=x^2+(y-b)^2$．

把各式分别相加，得 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=(2x-a)^2+(2y-b)^2+a^2+b^2$

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2\geqslant a^2+b^2.$$

当且仅当，$x=\frac{a}{2}$，$y=\frac{b}{2}$时，上式取等号。

所以，$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的最小值是 a^2+b^2；此时相应的P点的位置与矩形的中心重合。

21．证明：对于任意实数 x_1、x_2、y_1、y_2，

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

成立。

【解】在直角坐标系中三个点的坐标分别是 $O(0,0)$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2\ y_2)$．

若 O，A，B 三点不共线，则 $|AB|<|OA|+|OB|$，即

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

易证，对于 O、A、B，三点共线，或其中有两个点，甚至三个点重合时的情况，关系式

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

也成立。

22．已知 $x>0$，求平面内的一动点 $P\left(x+\frac{1}{x},\ x-\frac{1}{x}\right)$，与已知点 $A(1,0)$ 之间距离的最小值及相应点P 的坐标。

【解】由公式，得

$$|PA|^2=\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2$$