龚伯阶 编著

基础概率论

四川教育出版社

基础概率论

龚伯阶　编著

四川教育出版社
1990年·成都

责任编辑：李岷聪
封面设计：何一兵
版面设计：刘　江

基础概率论　　　　龚伯阶　编著

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　　攀枝花新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 6.25 插页 2 字数 133 千
1990 年 2 月第一版　　1990 年 2 月第一次印刷
印数：1—2000 册

ISBN7—5408—1222—2/G·1191　定价：2.20元

出版者的话

概率论由于它的概念新颖，方法独特，学起来是很有趣的.然而，正因为“新颖”、“独特”，使初学者颇感困难，不易入门.所以，在编写本书时，注意到以下几点：把基本概念交待清楚，举例较多，对一些重点难点进行适当的评注；挑选了具有一定难度的思考题和练习题，以帮助读者深化概念，开阔思路，提高分析问题和解决问题的能力；文字叙述和选材力求通俗易懂，生动有趣，以提高本书的可读性；除初等微积分外，不涉及更高深的数学工具，以免读者望文却步.

作者系重庆建筑工程学院昆明分院数学副教授，他根据自己多年教学实践经验总结写成本书，并在教学实践中不断丰富和精炼，为越来越多的读者所欢迎.本书曾由云南工学院教材科和昆明市科协科教部先后多次刻印，在教学中与统编教材同时使用，学生普遍反映好懂，乐于参阅.此次作了较大的删节和修改，适合本科和专科学生阅读，也可供中学教师和工程技术人员参考。本书通俗易懂，各行各业从事各种层次管理工作的同志都可以阅读。学习一点概率论的基础知识，无疑会有助于提高我们的管理水平，促成全社会管理水平的提高.书中注有“※”号的内容，可以略去不看也不影响内容的连贯性.

作者撰稿过程中，曾得到湘潭大学杨向群教授和中南工

业大学关家骥教授的热情鼓励，西北电子工业技术大学施仁杰同志曾对初稿提出许多宝贵的修改意见，重庆建筑工程学院昆明分院陈秀华同志校阅了全部习题。按照作者心愿，谨在此一并致谢。

愿本书能为更多的院校选作教材，能为更多的读者提供有益的帮助。同时，殷切希望广大同行和读者批评指正。

1989年10月

引　言

随着社会生产和科学技术的进步，概率统计“热”早已在国内外出现。越来越多的大学生，科技工作者和管理干部需要学习这一门学科，这是科学技术精确化，数量化的需要。然而，概率论的“出身”并不高雅，大约起源于17世纪中叶法国社会的一种癖好——赌博。恰如惠更斯所说：“在任何场合，我认为如果读者仔细研究对象，当可注意到你所处理的不只是赌博而已，其中实际上包含着很有趣很深刻的理论基础”。这种理论基础的数学内涵便是概率论的原型。经过300多年的发展，概率论取得了长足的进步，已成为纯数学和应用数学中最活跃的分支之一。它不但有自身的理论体系，而且日益广泛地应用到科学技术的许多部门，甚至深入人文学科，方兴未艾，印证了拉普拉斯的预言，即概率论这一门“从考虑赌博问题而起始的科学将会成为人类知识宝库最重要的主题”。

概率论为什么有如此广泛的用场？首先得从它所研究的对象说起。我们知道，自然界存在两类现象：在一定的条件下必然发生的现象，叫做必然现象，例如，月球绕地球转，同性电相斥，水在4℃时比重最大，等等；还有另一类现象，在一定的条件下可能发生也可能不发生，这种现象叫做**偶然现象**或**随机现象**。个别地看，偶然现象是无规律的，我们不能预言它是否一定发生，但大量的同类的偶然现象却呈现出

确定的规律性．例如：

（1）个别婴儿在降生之前不能预言是男还是女。但观察相当大量的新生儿的性别后，则可以得出大量新生儿中男女大约各占一半的结论．

（2）密闭容器内定量的气体，个别分子的运动轨道、速率和方向都是随机的．但由于分子为数极多，在大量分子的集体作用下，随机性被互相抵销或互相补偿，因而气体对器壁的压力表现出相对的稳定性．

（3）打靶时，无论怎样控制射击条件，每一次射击之前不能预测弹着点的准确位置．射击次数不多时，弹着点的分布也是无规律的．但随着射击次数不断增加，弹着点的分布就逐渐显示出规律性：例如，对于高明的射手而言，弹着点的分布一般是以靶心为对称中心，离靶心越近分布越密，离靶心越远分布越疏，而且射击次数越多规律性越明显．

大量同类的随机现象所具有的这种规律性叫做**统计规律**．概率论就是研究统计规律的一门数学学科，它的任务在于揭示这种规律并使之数量化．随机现象普遍存在，“生活中最重要的问题，其中占绝大多数实质上只是概率问题”（拉普拉斯语）．

随机性和必然性之间并无绝对的界限．大量的随机现象表现出必然规律，而任何必然现象也蕴含随机因素．就拿测量工作来说，存在测量误差这是必然的，引起误差的原因可以分为两类：人们可以控制的因素，如仪器固有的精度，测量的方法等，这些因素引起的误差带有规律性，称为系统误差；人们主观上不能控制的因素，如实地操作时的气温的变化、风向的变化、人的视觉差异和心理状态等，这些因素引

起的误差称为随机误差。对于前者，采用更先进的仪器，使用更合理的测量方法便得以减少或消除。对于后者必须用概率统计的方法进行处理。必然性寓于偶然性之中，偶然性受内部隐蔽着的必然规律支配，这就是偶然与必然的辩证关系。

目　录

第一章　随机事件与概率

§1·1　随机事件

概率论所研究的中心问题是随机事件发生的可能性的数学描述。所谓概率就是用来度量这种“可能性”大小的一种数量。所以，随机事件是概率论中最基本的概念，务必首先弄清楚“事件”在数学上是如何表达的。

一、随机试验与随机事件

为了模拟随机现象，我们采用一种数学模型——**随机试验**E，它具有以下特性：

（1）可以在相同的条件下重复进行任意多次；

（2）可以事先明确试验的所有可能结果；

（3）某一次试验在进行之前，不能预言究竟是哪个结果将会发生。

随机试验的每一个可能结果叫做**基本事件**，记为e。全体基本事件组成的集合叫做**样本空间**或**基本事件空间**，记为$\Omega=\{e\}$。例如：

（1）随机试验E——观察新生儿性别。

其基本事件有两个：e_1——男性；e_2——女性。

其样本空间为：$\Omega=\{e_1, e_2\}$。

（2）随机试验E——掷一枚骰子，观察出现的点数。

其基本事件有6个：e_i（出现i点，$i=1,2,3,\cdots,6$）。

其样本空间：$\Omega=\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_6\}$.

（3）随机试验E——观察某电话交换机（站），在一小时内接到的呼唤次数。

设呼唤次数为i（$i=0,1,2\cdots$），则有

基本事件：e_i（接到i次呼唤），($i=0,1,2,\cdots$)。

样本空间：$\Omega=\{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots\}$.

考察某个随机试验，不但要注意它的基本事件，更重要的是研究由某些基本事件组成的复合事件，常记为大写字母$A,B,C,\cdots$.例如，就上述随机试验而言，分别有

事件"新生婴儿是男孩"——$A=\{e_1\}$；

事件"掷一枚骰子得奇数点"——$B=\{e_1, e_3, e_5\}$；

事件"某电话站在一时内接到呼唤不少于15次"——$C=\{e_{15}, e_{16}, \cdots\}$.

我们说"进行一次随机试验"，既要分析试验条件，更要观察试验结果，当事件A包含的基本事件有一个出现就说事件A发生。换言之，事件A发生即它所含的基本事件有一个在试验结束时出现。

对于某个随机试验，必定发生的事件称为**必然事件**，必定不发生的事件称为**不可能事件**，可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**。

在相同的条件下，必然事件的相反事件是不可能事件；不可能事件的相反事件是必然事件。例如，在标准大气压下，"100℃的水沸腾"是必然事件，其相反事件"100℃的水不沸腾"则是不可能事件；"90℃的水沸腾"是不可能事件，其相反事件"90℃的水不沸腾"则是必然事件。所以，某事件必然与它的相反事件不可能乃是等价的。严格说来，必然

事件与不可能事件都不是随机事件，但为了叙述方便起见，不妨把它们也视为（特殊的）随机事件。

用集合论的语言来说，必然事件相当于样本空间Ω，不可能事件相当于空集$\varnothing$，随机事件相当于Ω的子集。特别地，基本事件相当于单元素集。

二、事件的关系及其运算

由一个随机试验的样本空间，可以构造出许多随机事件，有的简单，有的复杂。我们希望从简单事件发生的可能性推算出复杂事件发生的可能性大小，所以必须研究事件之间的关系及其运算规律。请读者注意，下面将要阐述的事件的“和”、“差”、“积”等运算，不能和代数中的和、差、积混为一谈，而应与集合论中的有关概念对照理解。

1. 包含　相等

如果事件A发生，导致事件B也必定发生，则称B**包含**A，记作

$$B\supset A \text{或} A\subset B.$$

例如，掷一枚骰子，设事件A——“出现5点或6点”，B——“出现的点数不小于3”，显然有$B\supset A$。

如果$B\supset A$及$A\supset B$同时成立，则称A与B**相等**，记作

$$A=B.$$

易见，$A=B$意即A与B同时发生或同时不发生。

2. 互斥（或不相容）

如果事件A发生，导致事件B必定不发生（等价于：如果B发生，导致A必定不发生），则称A与B**互斥**。例如，任一随机试验，其基本事件都是互斥的，即随机试验的结果不可能有两个基本事件同时出现。

3. 事件的和

由“事件A与B至少有一个发生”所构成的事件，称为**A与B的和**，记作

$$A\cup B\text{或}A+B.$$

一般地，“有限个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少有一个发生”这一事件，称为n个事件的和，记作

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

“可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生”这一事件，记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots$$

注意：有些著作中用记号$\sum\limits_{n=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$特指互斥事件$A_1,A_2$，…，$A_n$的和。如果不至于发生混淆，以后$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$与$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$可以通用。

4. 事件的积

由“事件A与B都发生”所构成的事件，称为**A与B之积**，记作

$$A\cap B\text{或}AB.$$

一般地，由“n个事件$A_1,A_2,\cdots$，A_n都发生”所构成的事件，称为$A_1,A_2,\cdots,A_n$之积。记作

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1A_2\cdots A_n.$$

仿上，可列个事件A_1,A_2，…，A_n，… 之积记作

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1A_2\cdots A_n\cdots$$

易见，A与B互斥等价于$AB=\varnothing$(不可能事件)。

例如，设随机试验E——同时掷两枚硬币，观察出现正面或反面的情形。

基本事件：e_1（正，正），e_2（正，反），e_3（反，正），e_4（反，反）。

基本空间：$\Omega=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$。

考虑随机事件

$A=\{e_1\}$——两枚都正面朝上；

$B=\{e_2,e_3\}$——只有一枚正面朝上；

$C=\{e_1,e_2,e_3\}$——至少有一枚正面朝上。

易见，$A\cup B=C$，$A\cap C=A$，$A\cap B=\varnothing$。

5. 事件的差

由"事件A发生而B不发生"所构成的事件，称为A与B之**差**，记作$A-B$。

例如，掷一枚骰子，设随机事件A——"得偶数点"，B——"得2点或6点"，C——"得4点"，则有$A-B=C$。

6. 对立事件

如果事件A、B满足下列条件：

(1) $AB=\varnothing$；

(2) $A+B=\Omega$。

则称A与B互为**对立事件**。A的对立事件记作$\overline{A}$，它表示"A不发生"。

注意：因为对立事件满足条件(1)，所以必是互斥事件；反之，互斥事件满足条件(1)，但不一定满足条件(2)，所以

不一定是对立事件。

差事件$A-B$表示“A发生而B不发生”，也可理解为事件A与事件$\overline{B}$（B不发生）同时发生。所以，$A-B=A\overline{B}$。

对任意二事件A、B，则有

$$A+B=A\overline{B}+AB+B\overline{A}\ (A\overline{B},AB,B\overline{A}\text{互斥}).$$

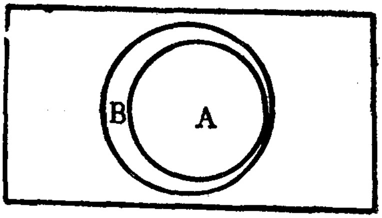
特别地，当$AB=\varnothing$时，有

$$A+B=A\overline{B}+B\overline{A};$$

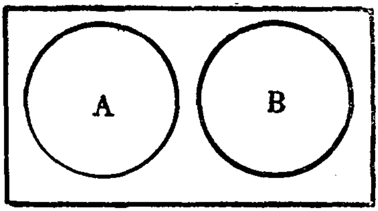
当$A\subset B$时，有

$$A\overline{B}=\varnothing,\qquad AB=A,\qquad A+B=B.$$

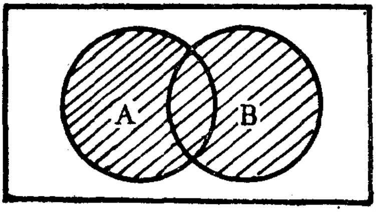
以上所述事件的各种关系，可以用几何图形直观地表示如下（图中矩形区域均表示样本空间Ω）：



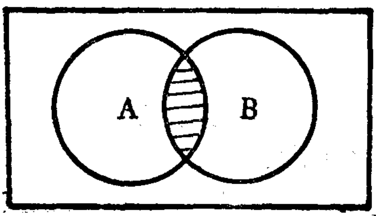
$B\supset A$



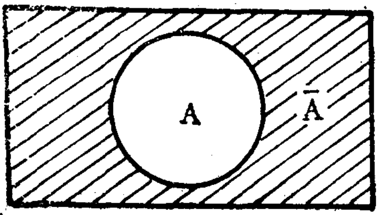
$AB=\varnothing$



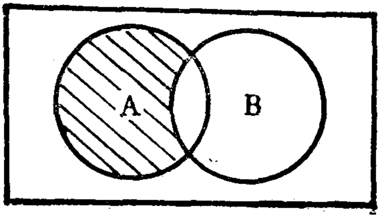
$A+B$



AB



$A+\overline{A}=\Omega$



$A-B=A\overline{B}$

例1 检验某种圆柱形产品，要求直径和长度都合格才算合格。

设事件 A——直径合格；

B——长度合格。

则 $A+B$——直径和长度至少有一者合格，不能确定产品是否合格；

$A\overline{B}$——直径合格而长度不合格，产品不合格；

$B\overline{A}$——长度合格而直径不合格，产品不合格；

$\overline{A}\,\overline{B}$——直径和长度都不合格，产品不合格；

$\overline{A}+\overline{B}$——产品不合格

$(\overline{A}+\overline{B}=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}A)$；

AB——产品合格。

例2 射击目标三次，设事件

A_i——第i次击中，$i=1,2,3$。

则事件 $A=A_1A_2A_3$——三次都击中；

$B=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$——击中2次；

$C=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$——击中1次；

$D=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$——三次都未击中。