高等学校数学学习辅导教材

线性代数
全程学习指导

人大·线性代数修订版

李海燕 王艳芳/编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

线性代数

·全程学习指导·

（人大·线性代数修订版）

李海燕　王艳芳　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程学习指导(人大版) / 李海燕,王艳芳编著.
大连 : 大连理工大学出版社, 2003.11
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-2434-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 080903 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:12 字数:300 千字
印数:1 ~ 6 000
2003 年 11 月第 1 版 2003 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:王亚男
封面设计:宋 蕾

定 价:15.00 元

前言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

《线性代数》是一门重要的基础课，也是硕士研究生入学的一门考试科目。由于这门课程概念较多，符号较多，运算复杂，有些结论与大家习惯的数的运算法既有相同、相似的地方，又有较大的反差。对抽象性和逻辑性有较高的要求，因此初学者难以把握。不少同学虽努力学习，但收效甚微。为此我们根据原国家教委审订的"高等数学课程教学基本要求"(教学大纲)和教育部2004年全国硕士研究生入学统一考试教学大纲的要求，融学习指导和考研辅导为一体编写了此书。本书包含了1987～2003年研究生入学考试全部试题。虽然每年的试题都有变化，但是考试内容所涉及的知识点基本相同。另外，试题与灵活的思维方式，熟练的技巧，准确无误的计算能力密切相关。因此，深入掌握基本概念、基本理论、基本方法是至关重要的。精读并学会解一定数量的范例不失为应试的有效途径。

本书按照被全国许多院校经济、管理等专业采

用的赵树源主编的《线性代数》(第三版)(中国人民大学出版社)的章节顺序编写,分为五章,每章均设计了四个板块,即

一、知识点考点精要　列出基本概念、重要定理和主要内容,突出必须掌握或考试出现频率高的核心知识点。

二、典型题真题精解　精选历年研究生入学考试试题中具有代表性的例题进行详尽的分析和解析。这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强,旨在提高同学的分析能力、掌握基本概念和理论,开拓解题思路,熟练掌握解题技巧。

三、教材习题同步解析　针对《线性代数》教材中的习题,几乎给出了全部的解,目的在于方便读者对照和分析。

四、模拟试题自测　自测旨在进一步强化解题训练,反映考试的重点、难点,培养综合能力和应变能力,巩固和提高复习效果。

在编写本书的过程中,得到了鞍山科技大学陈斌教授、李大卫博士、沙秋夫教授、大连大学教务处徐晓鹏同志和信息工程学院赵植武同志的热情帮助,王丽燕教授担任主审,提出了宝贵的意见,邱明全,张金利、柳杨等做了大量的校对工作,编者在此向他们一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促,编者水平有限,疏漏错误难免,欢迎读者批评指正。

编　者

2003 年 10 月

目　录

第一章　行列式

知识点考点精要

行列式的概念和基本性质,行列式按行(列)展开定理及应用.

一、行列式的概念

n 阶行列式定义为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

右式为行列式 D_n 的展开式,其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列,$N(j_1 j_2 \cdots j_n)$表示 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数,$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,即 D_n 的展开式中共有 $n!$ 项,其中每一项都是取自于 D_n 的不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和.各项的符号是:当这一项中 n 个元素的行指标按自然顺序排列时,由这 n 个元素的列指标所组成排列为偶(奇)排列,该项取正(负)号.

D_n 简记为 $|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,n)$.

二、行列式的基本性质

1.行列式与它的转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

2.交换行列式的任意两行(列),其值变号.

若行列式有两行(列)的对应位置的元素相等,其值为零.

3.用数 $k(\neq 0)$乘行列式的某一行(列)的所有元素,等于用 k 乘行列式,即行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外边来.

若行列式某行(列)的所有元素全为零,其值为零.

若行列式有两行(列)的对应位置的元素成比例,其值为零.

4.若行列式的某一行(列)中的各元素均为两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5.若把行列式的某行(列)中各元素同乘数 $k(\neq 0)$,然后加至另一行(列)对应位置元素上,其值不变.

为了帮助读者记忆行列式的性质,归纳如下:

(1)两个翻:全翻(转置)不变;部分翻(交换)变号;

(2)三个零:某行(列)元素全为零;两行(列)对应位置元素相等;两行(列)对应位置元素成比例.

(3)三个可:可提性,可分性,可加性.

三、行列式计算方法及有关定理

1.定义法

2.用行列式性质将行列式化为上(下)三角形方法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{（上三角形）}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{（下三角形）}$$

特别地 $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{（对角形行列式）}$$

具体步骤为：若第一列的第一个元素为0，先将第一行与其他行交换，使第一列第一个元素不为0；然后把第一行分别乘以适当的数加至其他各行，使第一列除第一个元素外其余元素全为0；再用同样的方法处理 a_{11} 的余子式；依次下去，直到将行列式化为上三角形行列式为止，其值为主对角线上元素的乘积.

3. 降阶法

(1)按某行(列)展开

定理：n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i\text{ 行})$$

或

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j\text{ 列})$$

当 $i \neq s$ 时，$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0$；

当 $j \neq t$ 时，$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = 0$.

即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D_n & i=s\\0 & i\neq s\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D_n & j=t\\0 & j\neq t\end{cases}$$

(2)按 k 阶子式展开

定理(拉普拉斯定理):

在 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 中,任取 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式的值,即

$$D_n=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$$

其中,A_i 是 k 阶子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$ 对应的代数余子式$(t=C_n^k)$.

(3)分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵(参看第二章).

4.拆项法(利用性质 4)

5.递推法:利用行列式的性质或按行(列)展开定理,找出 D_n 与 n 个同结构的较低阶的行列式 D_3,D_2 之间的关系式,从而求出 D_n 的值.

6.归纳法(对阶数归纳)

7.范德蒙行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$

8. 反证法

注意 在解题中，往往几种方法结合使用，使计算大大简化.

四、行列式的应用

1. 用克莱姆法则求非齐次线性方程组的惟一解.

2. 用齐次线性方程组系数行列式的值，讨论其解的情况.

典型题真题精解

【例 1】 利用行列式的定义，求出

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 6 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 6 \\ x & 1 & 2 & 3x \end{vmatrix}$$

的展开式中包含 x^4 和 x^3 的项.

解 由行列式定义知，展开式中的每一项取之于不同行不同列的 4 个元素之积，包含 x^4 的项仅有主对角线 4 个元素之积，若第一列不取 $5x$，而取另两个 x 之一，该项至多取主对角线上的两个含 x 的元素，则至多为 x^3，所以包含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(1234)}5x\cdot x\cdot x\cdot 3x = 15x^4$$

展开式中包含 x^3 的项只有两种情形，第一列取第 2 行和第 4 行元素，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3x \end{vmatrix} = (-1)^{N(2134)}1\cdot x\cdot x\cdot 3x = -3x^3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(4231)}6\cdot x\cdot x\cdot x = -6x^3$$

故展开式中包含 x^4 和 x^3 的项为 $15x^4-9x^3$.

注意　本题主要利用行列式定义,展开式中的每一项是取自于行列式的不同行、不同列的 4 个元素的乘积这一规律.当展开式中某一项含有 a_{ij} 时,该项必不含有第 i 行的其他元素,且也不含第 j 列的其他元素.

【例 2】(010403)　设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$$

则第 4 行各元素余子式之和为______.

解法 1　用 $M_{4j}(j=1,2,3,4)$ 表示第 4 行各元素的余子式,则

$$M_{41}=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}=-56,\qquad M_{42}=\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$M_{43}=\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=42,\qquad M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-14$$

所以　$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-56+0+42+(-14)=-28$

解法 2　用 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 表示第 4 行各元素的代数余子式,由于 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j}$,于是有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_4]{\substack{c_1-c_4\\c_2-c_4}}\begin{vmatrix}3&0&4&0\\0&0&0&2\\0&-7&0&0\\-2&0&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 0 & -7 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{vmatrix}=2\times(-7)\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-28$$

注意　本题最容易出现的是计算错误，审题一定要仔细，求第4行的余子式与求第4行的代数余子式要区分开．行列式的值等于第4行的各个元素与其所对应的代数余子式乘积之和．若本题是：求第4行代数余子式之和，即

$$\begin{aligned}&A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}\\&=(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)^{4+3}M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\&=-(-56)+0-42+(-14)=0\end{aligned}$$

或者

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

（注意到第2行与第4行对应元素成比例，其值为零.）

本题主要是让读者正确理解余子式和代数余子式的概念，并能灵活运用行列式按行(列)展开定理．解法2比解法1计算简便，此类型题是考研常出的题型.

【例3】　计算5阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & a & b & c & d\\ -a & 0 & e & f & g\\ -b & -e & 0 & h & l\\ -c & -f & -h & 0 & k\\ -d & -g & -l & -k & 0\end{vmatrix}$$

分析　由于行列式 D 的元素之间有关系式：$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,5)$，将行列式每行提出一个公因子$(-1)$，再利用转置行列

式，其值不变($D=D^{\mathrm{T}}$)的性质计算之.

解　每行提出公因子(-1)，得

$$D=(-1)^5\begin{vmatrix}0&-a&-b&-c&-d\\a&0&-e&-f&-g\\b&e&0&-h&-l\\c&f&h&0&-k\\d&g&l&k&0\end{vmatrix}=-D^{\mathrm{T}}=-D$$

所以　$2D=0$，即 $D=0$

注意　在行列式中，若元素之间满足关系 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$的 n 阶行列式称 n 阶反对称行列式.利用本例的解法可以证明阶数 n 为奇数的反对称行列式，其值等于零.

【例 4】(970403)　设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

则 $|A|=$________.

解　各列对应元素相加后相等，把第 2,3,…,n 列加到第 1 列，有

$$|A|=\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&1\\n-1&0&1&\cdots&1\\n-1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$
= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[r_n - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \vdots}} (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{n-1}(n-1).
$$

一般地,当行列式的各行(列)的元素之和为同一数时,也可以把各行都加至第 1 行(列),并提取第 1 行(列)的公因子,再把第 1 行(列)的适当倍数分别加至后边各行(列),使行列式化为上(下)三角形,再求其值.这是一种类型的行列式,在计算行列式时需仔细观察之.

如:

$$
D_{n+1} = \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}, D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

都属于这一种类型,请读者自行完成.

【例 5】 解方程

$$\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix} = 0$$

解

$$左式 = \begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3 - r_1 \\ \vdots \\ r_n - r_1}]{r_2 - r_1} [x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

即$[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}=0$,解之得 $x_1=(2-n)a$, $x_2=x_3=\cdots=x_n=2a$ 是方程的 n 个根.

【例 6】 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

分析　当行列式零元素较多时,可考虑直接展开计算

解　按第1列展开,得

$$D_n = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{1+n}b_n\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$$

注意　本题也可以按第 n 行展开.

【例7】　计算6阶行列式

$$D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

解　在行列式 D_6 中第3,4,5列所能组成的3阶子式中只有一个非零子式,利用拉普拉斯定理按第3,4,5列展开,得

$$D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}(-1)^{3+4+5+3+4+5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$