科学版

大学数学学习指导系列

数学分析
学习指导

裘兆泰　王承国　章仰文 编

- 联系紧密的基础知识
- 灵活多样的解题技巧
- 复习总结的理想读物
- 全面系统的考研辅导

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学学习指导系列

数学分析学习指导

裘兆泰　王承国　章仰文 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是数学分析课程的学习指导书，主要介绍单变量微积分.全书按课程内容顺序编排，每章由“概念辨析与问题讨论”和“解题分析”两部分组成.前一部分着重于对基本概念与相关问题的分析，以及对重要内容的进一步讨论；后一部分总结和归纳了解题要点，着重于分析解题的思路与方法.书中有些思想和方法是作者多年教学实践经验的总结.对现行教材中未能深入讨论的一些重要内容，书中也做了补充介绍.

本书可作为数学专业学生、自学读者的学习指导书，也可作为考研复习用书及数学分析习题课的数学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习指导/裘兆泰，王承国，章仰文编 .—北京：科学出版社，2004
(大学数学学习指导系列)
ISBN 7-03-012219-4

Ⅰ.数… Ⅱ.①裘…②王…③章… Ⅲ.数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 087368 号

责任编辑：杨 波 姚莉丽/责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年1月第一次印刷 印张：24
印数：1—4 000 字数：458 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

数学分析是近代数学的基础，也是现代科学技术中应用最为广泛的一门学科.作为高校数学专业最重要的入门课程之一，它对于后续课程的学习，乃至于对学生素质的训练与培养起着举足轻重的作用.

本书的编者长年从事数学分析课程教学，在教学实践中感到极其需要一本从概念到方法上对学习者有指导作用的参考书，以弥补课堂教学的不足，同时也是为了培养学生自学能力、科学思维能力以及独立分析和解决问题的能力.

基于这一目的，我们编写了这本学习指导书，主要阐述数学分析中的基本概念及常用方法与技巧，也适当介绍了一些新思想、新内容、新成果.我们力求使本书具有以下几个特点：

1. 针对性.教学上的重点和学生学习中的难点是本书编写的主要内容.对学生通常感到困难的重要概念及相关问题，我们尽可能做了深入的剖析和比较，对一些重点内容做了进一步讲解，特别是对初学者普遍感到困难的证明问题，从解题思想的建立到思路的逐步展开做了分析介绍，许多问题给出了多种解决途径.我们希望这对启发读者思路，培养学习能力会有所帮助.

2. 新颖性.相当一部分的内容是我们近年来收集和积累的典型例题和问题，有些选自本校和其他重点高校同类课程的考试题、考研题和竞赛题.我们尽可能使问题有新意，题型有特色.在方法上则引进和吸收了近年来发表的研究新成果，也有些属于编者长期教学实践的总结.

3. 普适性.本书起点不高，凡正在学习数学分析课程的读者都能看懂，因此具有广泛的适用性，这也正是我们所希望的.而我们更希望能在帮助读者理解、掌握有关内容和有关方法的同时，着重于引导和启发读者如何思考问题、分析问题和解决问题，从而一步步将内容引向深入.我们采用题型带思路的写法，以期起到触类旁通、举一反三的效果.书中有一部分问题和习题具有一定难度，可供有兴趣的读者思考.事实上，我们编写这本书的目的不仅是想为在学读者提供一本学习指导书，也希望能对准备考研或参加竞赛的同学提供帮助，同时给正在开设数学分析习题课的老师们提供参考资料.

尽管想法很多，编者们也竭力而为之，但限于学识与经验，仍难免挂一漏万.书中的错误与失当之处也自然难免，敬请专家与读者不吝指正，以便修改使之臻于完善.

本书由裘兆泰、王承国、章仰文三位同志合作编写.初稿完成后，由裘兆泰同志

负责对全书作文字加工与格式统一.

本书编写过程中得到上海交通大学数学系领导及同事的关心与支持,在此谨表示衷心的感谢.

编 者

2002 年 10 月

于上海交通大学

数学符号表

N　自然数集

Z　整数集

R　实数集

$U(x_0,\delta)$　点 x_0 的 δ 邻域，$U(x_0,\delta)=\{x \mid x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\}$

$U^\circ(x_0,\delta)$　点 x_0 的空心 δ 邻域，$U^\circ(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$

$U(x_0)$　点 x_0 的某一邻域

$\in$　属于

$\forall$　任意给出的

$\Rightarrow$　由此推出，蕴含

$\triangleq$　记为，定义为

$x\to x_0^-(x\to x_0^+)$　x 小于(大于)x_0 并趋于 x_0；x 左(右)趋向于 x_0

$f(x_0-0)(f(x_0+0))$　$f(x)$在点 x_0 处的左(右)极限

$\xrightarrow{D}$　在数集 D 上收敛于

$\overset{D}{\Longrightarrow}$　在数集 D 上一致收敛于

$C[a,b]$　区间$[a,b]$上的全体连续函数

$D[a,b]$　区间$[a,b]$上的全体可导函数

$R[a,b]$　区间$[a,b]$上的全体可积函数

$T\subset[a,b]$　对区间$[a,b]$的某种分法 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$\|T\|$　分法 T 的细度，$\|T\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta x_k\}$

$T=T'\cup T''$　分法 T' 与 T'' 的共同加细分法，将 T' 与 T'' 的分点合并作为$[a,b]$分点的新分法

$\xi(T)$或 ξ　分法 T 下的介点集，$\xi(T)=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，$k=1,2,\cdots,n$.

目　录

第 1 章　极限与连续初论

1.1　数 列 极 限

1.1.1　概念辨析与问题讨论

1. 数列极限定义为什么要用 ε-N 语言叙述?

若数列$\{x_n\}$以 a 为极限,从直观上看是表示当数列通项 x_n 的下标 n 无限增大时,x_n 无限逼近常数 a. 这是对数列极限一种形象化的定性叙述,但它并不能准确、严密地定量描述数列的极限过程. 如果要问:何谓“无限增大”? 何谓“无限逼近”? 如何分析和估计 x_n 与 a 逼近的“精度”? 这就不是用上面这些模糊的叙述所能解释清楚的.

数列$\{x_n\}$以 a 为极限的严格定义是:$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$,使得$\forall n>N$ 有

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{1.1.1}$$

这一定义准确而深刻地阐述了“当 n 无限增大时,x_n 无限逼近常数 a”这一数列的极限过程,并对逼近的“精度”给出了量化的估计. 可以这样理解:对于我们事先任意给出的一个精度 $\varepsilon(\forall\varepsilon)$,(1.1.1)表明了当 n 在无限增大过程中存在某一“时刻”$(\exists N)$,只要在这一“时刻”之后$(\forall n>N)$,就可保证所有的 x_n 与常数 a 两者间逼近的精度小于$\varepsilon(|x_n-a|<\varepsilon)$.

从数列极限的定义来看,这里的 ε 事实上具有两重性:一是它的任意性,ε 不依赖于其他任何量,它必须事先任意给出,也正是由于这种任意性说明了 x_n 可以无限逼近常数 a;二是它的相对固定性,当 ε 一旦给出,就认为暂时固定,以便利用这一暂时固定的 ε 确定相应的 N,换句话说,N 取值的大小依赖于事先给出的 ε.

对于初学数学分析的读者来说,用 ε-N 语言叙述的数列极限定义看起来很抽象,往往感到难以准确地把握,而且在具体应用时也会出现不少问题:有关定义的叙述既不能多写,又不能少写,甚至将所叙述内容的前后次序颠倒一下都会导致概念性错误. 因此,学习数学分析特别要提倡多看(书)、多思、多练,要通过对实例的剖析和实践训练,提升对定义与概念的认识、理解和掌握,逐步培养自己的数学抽象能力和严密的思维与推理能力,这既是学好数学分析的必要前提,也是数学训练最重要的目的.

2. 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 有哪些常用的等价定义?

在分析证明中,数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 常用的等价定义有以下几个:

Ⅰ　$\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得 $\forall n>N$ 有 $|x_n-a|<\varepsilon$；

Ⅱ　$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得 $\forall n>N$ 有 $|x_n-a|<C\varepsilon$($C>0$ 为常数)；

Ⅲ　$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得 $\forall n>N$ 有 $|x_n-a|<\varepsilon^k$(或 $\varepsilon^{\frac{1}{k}}$，$k\in\mathbf{N}$)；

Ⅳ　$\forall\varepsilon>0$，数列 $\{x_n\}$ 中只有有限项在 $U(a,\varepsilon)$ 之外.

命题的等价性证明通常采用循环证法，也可以采用命题之间相互对证的方法. 本例所涉及的证明都不困难，可作为初学者的基本训练题. 这里我们以由定义Ⅱ证原定义为例，说明按定义证明极限问题的基本要点，可供读者参考.

由Ⅱ$\Rightarrow$原定义. $\forall\varepsilon>0$，令 $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{C}$. 对 $\varepsilon'>0$，由Ⅱ可知 $\exists N\in\mathbf{N}$，使得 $\forall n>N$ 有

$$|x_n-a|<C\varepsilon'=\varepsilon.$$

3. 按定义论证数列极限问题常用的两种放大方法.

用 ε-N 方法论证数列极限的关键是对 $\forall\varepsilon>0$，找出相应的 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

为了方便地求出所需的 N，对 $|x_n-a|$ 常采用放大的方法.

(1) 适当放大. 若有

$$|x_n-a|\leqslant\varphi_1(n)\leqslant\varphi_2(n)\leqslant\cdots\leqslant\varphi(n),$$

则要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，事实上只要 $\varphi(n)<\varepsilon$ 就行了. 一般经放大后的 $\varphi(n)$ 形式相对简单，从 $\varphi(n)<\varepsilon$ 中比较容易解出 n. 由此即可得出相应的 $N=N(\varepsilon)$.

(2) 条件放大. 若在 $n>N_0$ 的条件下有

$$|x_n-a|\leqslant\psi_1(n)\leqslant\psi_2(n)\leqslant\cdots\leqslant\psi(n),$$

再由 $\psi(n)<\varepsilon$ 解出 n，得到相应的 N_1. 此时应取 $N=\max(N_0,N_1)$，才能保证当 $n>N$ 时 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

应该注意的是：第一，无论是用适当放大方法或条件放大方法，都要求最后的 $\varphi(n)$ 或 $\psi(n)$ 形式简单，并且必须仍然是一个趋于 0 的序列；第二，要熟悉一些常用的不等式，以便在进行放大时灵活应用(见 1.1.1 节第 4 部分).

4. 几个重要的不等式.

在数列极限证明中，为了对逼近的精度进行估计，通常要采用放大的方法. 这时，不等式就是一种重要的工具. 下面介绍的是三个最基本和最常用的不等式.

(1) **Bernoulli 不等式**　当 $a\geqslant-2$ 时，对 $\forall n\in\mathbf{N}$ 有

$$(1+a)^n\geqslant1+na.$$

(2) **Schwarz 不等式**　对 $\forall a_k,b_k,k=1,2,\cdots,n$，有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

(3) **AG 不等式**(算术平均-几何平均不等式) 对 $\forall a_k \geqslant 0, k=1,2,\cdots,n$,有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} .$$

熟悉和掌握一些基本和重要的不等式,往往能使极限证明更方便和清晰.例如,要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,就可以利用 AG 不等式得出一个很简洁的证法:因为

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-2\text{个}}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} \leqslant \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}$$

$$= 1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

于是有

$$0 \leqslant \sqrt[n]{n}-1 < \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

对 $\forall \varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1$,则对 $\forall n>N$,就有

$$|\sqrt[n]{n}-1| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

也即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

5. Cauchy 收敛准则在极限证明中的作用.

如所熟知,数列的 Cauchy 收敛准则是数列收敛的等价命题,它也是判断数列敛散性的重要理论依据.

数列的 Cauchy 收敛准则两种常用的形式是:$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$,使得

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \forall m,n > N,$$

或者

$$|x_{x+p} - x_n| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}.$$

可以看出,Cauchy 收敛准则是从数列自身特征出发得出的命题,不需要其他附加条件.在数学分析的后续内容中,还会有各种形式的 Cauchy 收敛准则(如函数极限、定积分与广义积分、数项级数与函数级数等),它的思想将贯穿于数学分析课程的始终.因此有些数学分析教材上称 Cauchy 收敛准则为"数学分析中头等重要的定理",确实也恰如其分.

尽管用 Cauchy 收敛准则判定数列极限时并没有提供计算极限的方法,但它的长处也正在于此——在论证极限问题时不需要事先知道极限值.事实上,在许多理

论问题中,极限的存在与否要比计算极限值重要得多.

用 Cauchy 收敛准则论证数列收敛时通常也采用放大的方法.类似于前述按定义论证数列极限的做法(见 1.1.1 节第 3 部分),我们有

$$|x_m - x_n| \leqslant \varphi_1(n) \leqslant \varphi_2(n) \leqslant \cdots \leqslant \varphi(n), \tag{1.1.2}$$

或者

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \psi_1(n) \leqslant \psi_2(n) \leqslant \cdots \leqslant \psi(n). \tag{1.1.3}$$

对于事先任意给出的 $\varepsilon>0$,同样可以从 $\varphi(n)<\varepsilon$ 或者 $\psi(n)<\varepsilon$ 中确定所需要的 N.但读者应该注意,无论用哪种形式的 Cauchy 收敛准则,按命题要求所确定的 N 只能与 ε 有关,而与其他变量无关.因此,在经放大后(1.1.2)中最后一项 $\varphi(n)$ 不能含"m";而(1.1.3)中最后一项 $\psi(n)$ 不能含"p",且 $\varphi(n)$,$\psi(n)$ 都必须是以 0 为极限的序列.

6. 考虑下列说法是否能作为数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件:

Ⅰ　$\forall \varepsilon>0$, $\forall p\in \mathbf{N}$, $\exists N\in\mathbf{N}$,使得 $\forall n>N$ 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$;

Ⅱ　$\forall \varepsilon>0$, $\exists N, p\in\mathbf{N}$,使得 $\forall n>N$ 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$;

Ⅲ　$\forall \varepsilon>0$, $\forall n, p\in\mathbf{N}$ 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

上述三种说法都不能作为数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件.

先看Ⅰ.可令 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbf{N}$.这是一个发散数列,但对 $\forall\varepsilon>0$ 及 $\forall p\in\mathbf{N}$,当 n 充分大时总有

$$|x_{n+p}-x_n| = \frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p-1}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \frac{p}{n+1} < \varepsilon.$$

顺便说明Ⅰ的另一种提法是:对每个 $p\in\mathbf{N}$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$,是否能保证数列 $\{x_n\}$ 必定收敛?

这种说法之所以不能保证数列 $\{x_n\}$ 收敛,关键是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$ 对于 p 而言并不是一致的.它的含义是指对任意给出的 $\varepsilon>0$ 和每个固定的 $p\in\mathbf{N}$,只要 n 充分大($n>N$)时,就有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 成立.这里所取的 N 不但与 ε 有关,一般还与 p 有关.

再看Ⅱ.只要令 $x_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$, $n\in\mathbf{N}$,可见 $\{x_n\}$ 是发散的.但若取 $p=2$,则总有

$$|x_{n+p}-x_n| = 0, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

对于Ⅲ.显然是数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分条件,但并不是必要条件,能满足提法Ⅲ要求的数列 $\{x_n\}$ 只能是常数数列.

7. 从子列收敛条件构造数列的几个问题.

收敛数列的任何一个子列均收敛,而发散数列中仍可能有收敛子列,这是熟知的事实.现在的问题是:在已知子列满足一定的收敛条件下,“倒过来”构造原数列.

首先考虑,是否能构造数列$\{x_n\}$,使$\{x_n\}$有 $m(m=2,3,\cdots)$个子列,趋向于 m 个不同的极限?

再考虑,是否能构造数列$\{x_n\}$,使$\{x_n\}$有无穷多个子列,趋向于无穷多个不同的极限?

进一步考虑,是否能构造数列$\{x_n\}$,使$\{x_n\}$中有子列可趋向于$[0,1]$上的任意实数?

第一个问题不难解决,例如我们令数列$\{x_n\}$为

$$1,2,\cdots,m,1,2,\cdots,m,\cdots,1,2,\cdots,m,\cdots$$

可以看出$\{x_n\}$中有 m 个子列,分别趋向于 $1,2,\cdots,m$.

借用这一思想可构造满足后一问题要求的数列$\{x_n\}$.先列出如下数表

$$\begin{array}{c}1,2,3,4,\cdots\\1,2,3,4,\cdots\\1,2,3,4,\cdots\\\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

然后按次对角线方向从右上方到左下方顺序取项,组成数列$\{x_n\}$:

$$1,2,1,3,2,1,4,3,2,1,\cdots$$

这个数列中含无穷多项 1,无穷多项 2,等等.因此它有无穷多个子列,可趋向于任意一个自然数.

类似地,对最后一个问题可考虑如下数表

$$\begin{array}{c}\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\\[2mm]\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{7},\frac{2}{9},\cdots\\[2mm]\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{7},\frac{3}{8},\cdots\\\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

仍按对角线方法取项,组成数列$\{x_n\}$:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\cdots$$

若 x_0 为$(0,1)$内有理数,记 $x_0=\frac{p}{q}$($p,q\in\mathbf{N}$ 且互质,$p<q$),则在$\{x_n\}$中可

以找到一个以 x_0 为极限的子列$\{x_{n_k}\}$.例如可取

$$x_{n_k}=\frac{p}{q}+\frac{1}{k}=\frac{pk+q}{qk},\quad k=2,3,\cdots$$

当 k 充分大时总可以使$x_{n_k}\in(0,1)$,且有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\dfrac{p}{q}$.

若 x_0 为$(0,1)$内无理数,记 x_0 的无限不循环十进制小数表示式为 $x_0=0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_k\cdots$,则在$\{x_n\}$中可找到有理数子列$\{x'_{n_k}\}$:

$$x'_{n_k}=\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_2}{10^2}+\cdots+\frac{\beta_k}{10^k},\quad k\in\mathbf{N},$$

使$\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0$.

若 $x_0=0$ 或 1,只要分别取 $x_{n_k}=\dfrac{1}{k}$或$x_{n_k}=\dfrac{k-1}{k}$$(k=2,3,\cdots)$就行了.

8. 考虑由下列条件是否能推出数列$\{x_n\}$收敛?

Ⅰ $\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$,$\{x_{n_k}^{(2)}\}$均收敛,并有相同的极限,其中$\{n_k^{(1)}\}\cap\{n_k^{(2)}\}=\varnothing$且$\{n_k^{(1)}\}\cup\{n_k^{(2)}\}=\mathbf{N}$.

Ⅱ $\{x_n\}$的 m 个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$,$\{x_{n_k}^{(2)}\}$,$\cdots$,$\{x_{n_k}^{(m)}\}$均收敛,并有相同的极限,其中$\{n_k^{(s)}\}\cap\{n_k^{(t)}\}=\varnothing(s,t=1,2,\cdots,m;s\neq t)$且$\bigcup\limits_{i=1}^{m}\{n_k^{(i)}\}=\mathbf{N}$.

Ⅲ $\{x_n\}$的无穷多个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$,$\{x_{n_k}^{(2)}\}$,$\cdots$均收敛,并有相同的极限,其中$\{n_k^{(s)}\}\cap\{n_k^{(t)}\}=\varnothing(s,t=1,2,\cdots;s\neq t)$且$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{n_k^{(i)}\}=\mathbf{N}$.

Ⅰ中的条件充分,可以推出数列$\{x_n\}$收敛.事实上,若有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}=a$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists K_1,K_2\in\mathbf{N}$,使得

$$|x_{n_k}^{(1)}-a|<\varepsilon,\forall k>K_1\quad 及\quad |x_{n_k}^{(2)}-a|<\varepsilon,\forall k>K_2.$$

取 $N=\max\{n_{K_1},n_{K_2}\}$,则对$\forall n>N$,

若 $n\in\{n_k^{(1)}\}$,必有某个 $n_k^{(1)}=n>N\geqslant n_{K_1}$,使得$|x_n-a|<\varepsilon$;

若 $n\in\{n_k^{(2)}\}$,必有某个 $n_k^{(2)}=n>N\geqslant n_{K_2}$,使得$|x_n-a|<\varepsilon$.

从而有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 成立.

顺便指出,Ⅰ的一个常用特例是:若数列$\{x_n\}$的奇子列$\{x_{2n-1}\}$与偶子列$\{x_{2n}\}$均收敛,并有相同极限,则$\{x_n\}$必收敛.

条件Ⅱ是条件Ⅰ的自然推广,不再赘述.

对于Ⅲ,要注意对数列$\{x_n\}$的子列拆分从有限多个转变成为无穷多个,情况

已有质的变化,不再能保证$\{x_n\}$的收敛性必定成立.例如,令$\{x_n\}$为

$$1,0,1,0,0,1,0,0,0,\cdots,1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n个},\cdots$$

则总可以将数列$\{x_n\}$拆分成无穷多个满足要求的子列:

$$x_{n_k}^{(1)}:1,0,0,\cdots,0,\cdots$$

$$x_{n_k}^{(2)}:1,0,0,\cdots,0,\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n_k}^{(i)}:1,0,0,\cdots,0,\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此时恒有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(i)}=0(i\in\mathbf{N})$,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$并不存在.

9. 关于单调子列的存在性.

命题 1.1.1 任意数列$\{x_n\}$中必存在单调子列$\{x_{n_k}\}$.

对上述命题先要说明两点:①并没有明确要求子列$\{x_{n_k}\}$必定为单调递增或是单调递减.事实上这两种可能性都存在,这要看数列$\{x_n\}$本身的结构如何;②考虑子列$\{x_{n_k}\}$的单调性时,可以忽略前面的有限项,只要从某项起子列具有单调性就行了.

现在对数列$\{x_n\}$分情况讨论.

1° 若$\{x_n\}$中无最大项,可任取$n_1\in\mathbf{N}$,对于x_{n_1},$\exists n_2>n_1$,使得

$$x_{n_2}>x_{n_1};$$

类似地,对x_{n_2},$\exists n_3>n_2$,使得

$$x_{n_3}>x_{n_2};$$

如此继续,便得出$\{x_n\}$中严格递增的子列$\{x_{n_k}\}$.

2° 若$\{x_n\}$中有最大项,记最大项为x_{n_1},考虑数集$\{x_n\mid n>n_1\}$,设它仍有最大项(否则回到情况1°),记最大项为x_{n_2},显见$n_2>n_1$且

$$x_{n_2}\leqslant x_{n_1};$$

再考虑数集$\{x_n\mid n>n_2\}$.如此继续,便得出$\{x_n\}$中的递减子列$\{x_{n_k}\}$.

这一命题的证明手法值得注意,它通过具体构造出满足要求的子列$\{x_{n_k}\}$从而达到证明的目的,故可称之为“构造性证明”.在构造子列时既要保证其符合单调性要求,同时还必须保证下标序号严格递增,即要有

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

我们顺便还得到一个十分有用的结果：若$\{x_n\}$为有界数列，则$\{x_n\}$中必存在收敛子列. 这一命题称之为“致密性定理”.

1.1.2　解题分析

1.1.2.1　用 ε-N 方法论证数列极限问题

在用 ε-N 方法论证数列极限问题时，适当地采用放大技巧和灵活应用不等式是解决问题的关键(见 1.1.1 节第 3 部分与第 4 部分)，同时也应记得一些常用的极限式，例如

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$$

等，在某些问题中能起到简化证明的作用. 下面几个例子都说明了这一点.

例 1.1.1　设 $x_n>0, n\in\mathbf{N}, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

分析　按题设条件，$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$，使得$\forall n>N$有

$$|\sqrt[n]{x_n}-a|<\varepsilon\ \Rightarrow\ 0<\sqrt[n]{x_n}<a+\varepsilon\ \Rightarrow\ 0<x_n<(a+\varepsilon)^n.$$

$\{(a+\varepsilon)^n\}$是否为趋于 0 的数列？现 $0\leqslant a<1$，因此当 ε 充分小时，总可以使 $0<a+\varepsilon<1$. 但必须先要界定 ε 的大小，使 $a+\varepsilon$ 确实成为一个小于 1 的正常数.

证明　因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a<1$，令 $\varepsilon_0=\dfrac{1-a}{2}>0, \exists N_0\in\mathbf{N}$，使得$\forall n>N_0$有

$$|\sqrt[n]{x_n}-a|<\frac{1-a}{2}\ \Rightarrow\ 0<\sqrt[n]{x_n}<\frac{1+a}{2}\ \Rightarrow\ 0<x_n<\left(\frac{1+a}{2}\right)^n.$$

记$\dfrac{1+a}{2}=q(0<q<1)$，因$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，故$\forall\varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbf{N}$，使得$\forall n>N_1$有

$$0<q^n<\varepsilon.$$

取 $N=\max(N_0,N_1)$，则对$\forall n>N$有

$$|x_n|<q^n<\varepsilon,$$

也即有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.1.2　证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1, k\in\mathbf{N})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=0\quad(\alpha>0)$.

证明　(1) 先考虑 $k=1$ 的情况，即证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

因 $a>1$,记 $a=1+\lambda \quad (\lambda>0)$,则有

$$0<\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+\lambda)^n}=\frac{n}{1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n}$$

$$<\frac{2}{(n-1)\lambda^2} \quad (n\geqslant 2).$$

对 $\forall\,\varepsilon>0$,令 $\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\varepsilon$,可得出 $n>\frac{2}{\varepsilon\lambda^2}+1$. 只要取 $N=\max\left(\left[\frac{2}{\varepsilon\lambda^2}\right]+1,2\right)$,则 $\forall\, n>N$ 有

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\varepsilon.$$

再考虑一般情况. 注意到 $a^{\frac{1}{k}}>1 \quad (a>1)$,而 $\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k$,则由上述证明可知 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, N\in\mathbf{N}$,使得 $\forall\, n>N$ 有

$$0<\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{n^k}{a^n}<\varepsilon^k,$$

也即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$(见 1.1.1 节第 2 部分).

(2) 因为 $e>2$,于是 $\forall\, n\in\mathbf{N}$ 有

$$e^n>(1+1)^n\geqslant 1+n>n \quad\Rightarrow\quad n>\ln n.$$

由此得出

$$0\leqslant\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{\frac{2}{\alpha}\ln n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}<\frac{\frac{2}{\alpha}\ln([n^{\frac{\alpha}{2}}]+1)}{n^\alpha}$$

$$<\frac{\frac{2}{\alpha}([n^{\frac{\alpha}{2}}]+1)}{n^\alpha}\leqslant\frac{\frac{2}{\alpha}\cdot 2[n^{\frac{\alpha}{2}}]}{n^\alpha}\leqslant\frac{\frac{4}{\alpha}\cdot n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}=\frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

对 $\forall\,\varepsilon>0$,令 $\frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}}<\varepsilon$,可得出 $n>\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$. 只要取 $N=\left[\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]+1$,则 $\forall\, n>N$ 有

$$0\leqslant\frac{\ln n}{n^\alpha}<\frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}}<\varepsilon,$$

也即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$.

上述证法对放大技巧的要求较强,如果考虑 $\alpha=1$ 的特别情况(即证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=$

0),我们可利用极限式 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 得出另一种简洁的证法:

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,于是 $\forall\,\varepsilon>0$,考虑 $e^{\varepsilon}-1>0$, $\exists\,N\in\mathbf{N}$,使得 $\forall\,n>N$ 有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<e^{\varepsilon}-1 \quad\Rightarrow\quad 0\leqslant\sqrt[n]{n}<1+(e^{\varepsilon}-1)=e^{\varepsilon},$$

两边同时取对数就有

$$0\leqslant\frac{\ln n}{n}<\varepsilon,$$

也即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

例 1.1.3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

分析　要证数列 $\{x_n\}$ 极限不存在,按定义应说明对 $\forall\,a\in\mathbf{R}$, $\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall\,N\in\mathbf{N}$, $\exists\,n>N$,使 $|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

事实上我们只要考虑 $-1\leqslant a\leqslant1$,为方便计可先假定 $0\leqslant a\leqslant1$. 若令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$,则无论 N 取何自然数,我们总可以适当选取 $n>N$,使 $-1<\sin n<-\frac{1}{2}$(例如取 $\left(2N\pi+\frac{3}{2}\pi\right)-\frac{\pi}{6}<n<\left(2N\pi+\frac{3}{2}\pi\right)+\frac{\pi}{6}$),从而就有 $|\sin n-a|>\frac{1}{2}$.

证法一　不妨设 $0\leqslant a\leqslant1$ ($-1\leqslant a<0$ 时同样可证). 考虑 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$,对 $\forall\,N\in\mathbf{N}$,取 $n=\left[\left(2N\pi+\frac{3}{2}\pi\right)+\frac{\pi}{6}\right]$,则 $n>N$,且由

$$\left(2N\pi+\frac{3}{2}\pi\right)-\frac{\pi}{6}<n<\left(2N\pi+\frac{3}{2}\pi\right)+\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad -1<\sin n<-\frac{1}{2},$$

于是有

$$|\sin n-a|>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

如果利用数列极限的四则运算性质,还可以用反证法证明这一结果.

证法二　用反证法. 倘若有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=2\lim_{n\to\infty}\sin1\cos(n+1)=0,$$

也即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\sin2n=2\lim_{n\to\infty}\sin n\cos n=0.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 存在,故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin2n=0$. 由此得出

$$1=\lim_{n\to\infty}(\sin^2n+\cos^2n)=\lim_{n\to\infty}\sin^2n+\lim_{n\to\infty}\cos^2n=0.$$

显见矛盾.