

預測海浪中船舶性能的 統計方法

交通部上海船舶运输科学研究所译

1 9 7 6

目 录

前 言.....	(1)
----------	-------

第一章 谱 分 析

1—1 随机过程.....	(5)
1—2 谱密度函数.....	(12)
1—3 线性系统和迭加原理.....	(17)
1—4 过渡波试验技术.....	(23)
1—5 交互谱分析.....	(27)
1—6 时间域分析.....	(32)

第二章 与谱分析有关的概率分布

2—1 超限问题和期望频率.....	(42)
2—2 狭带随机过程的包络分布.....	(47)
2—3 随机过程最大值(峰值)的分布.....	(52)

第三章 雷利概率分布及其特性

3—1 雷利概率分布.....	(62)
3—2 分布特性.....	(64)
3—3 分布的示例.....	(66)
3—4 拟合优度检验.....	(71)

第四章 随机取样和雷利分布

- 4—1 最大或然估算子..... (76)
- 4—2 估算子的统计特性..... (78)
- 4—3 最小 χ^2 估算子 (81)
- 4—4 从少量观测数中估算参数..... (83)

第五章 特殊概率分布的应用

- 5—1 长期概率分布..... (88)
- 5—2 极值统计学..... (104)
- 5—3 二维雷利分布..... (114)
- 5—4 随机过程最大值(峰值)的一般雷利分布..... (124)

第六章 可数过程的应用

- 6—1 泊松随机过程..... (131)
- 6—2 船舶砰击的出现频率..... (137)
- 6—3 砰击剧烈程度的预测..... (142)
- 6—4 甲板淹湿性的频率和剧烈程度..... (145)

第七章 应用于功率特性的统计方法

- 7—1 波浪中的功率特性..... (148)
- 7—2 波浪中的平均功率增量..... (151)
- 7—3 波浪引起的推力和扭矩的变化..... (155)

参考资料

预测海浪中船舶性能的统计方法

M. K. Ochi* 和 W. E. Bolton**

前言

本文拟对船舶在海浪中性能的预测技术中所用的统计方法进行较详细的探讨, 以便有助于进一步把各种统计方法的概念应用到船舶工程的范围中去。

近二十年来, 包括概率和随机过程的统计学已相当广泛地用来预测不规则海浪中的波浪、船舶运动和应力的问题。在此领域中已发表了大量重要的文章, 而其中许多文章已引入本文后面的参考资料。鉴于近来应用统计学的重大进展, 并考虑到把统计学应用于预测技术的需要日益增长, 认为有必要整理各种使预测方法能简易地进行的资料, 并汇总在本文中。为此目的, 特选择与造船工程直接有关的应用统计学的几个方面, 并就其原理与应用加以探讨。

由于主要是准备通过例子来阐述统计学的实际应用, 因此本文对基本原理或基本概念不作严格的数学证明, 但为了帮助充分理解起见, 也尽可能提供足够详细的说明。读者如果对随机过程的严格数学推导特别感兴趣, 建议参阅资料 [1]~[6]。

对于诸如方差分析、回归分析等统计学中的一些题目, 虽在船舶工程方面已有所应用, 但本文不予讨论, 因为有关这些题目已有几本著名的专著。例如, 参考资料 [7]、[8]、[9] 对这些方面作了全面叙述并列举了大量的实用例子。

* 美国海军舰船研究和发展中心。

** 英国海军部实验场。

本文共有七章。

第一章的开头三节是随机过程谱分析的基本原理和概念，它提供了本在文中所要讨论的一种非常重要的预测技术的基础。在1—4和1—6节中分别叙述了另外两种特殊的测预技术——过渡波试验和时间域分析。这些方法已被证明在预测波浪中船舶性能方面具有独特的优点，即过渡波试验方法大大地缩短了确定船舶在波浪中的性能所需要的船模试验时间；而时间域分析有可能用来对紧接着的船舶运动和弯矩等作短期预测。

第二章研究与谱分析特别有联系的概率分布及有关题目，对所谓超限问题将详加讨论，因为它可以用来预测随机过程的峰值与估计船舶砰击的发生频率及船舶运动极值。讨论中对包括在最近预测技术中的假定进行了澄清。大多数的解释都是对狭带随机过程来说的，而讨论谱带宽对概率分布影响的某些结果则在2—3节中阐述。最后这一部分对与随机过程有关的统计量的预测具有重大的意义。

第三章叙述有关雷利(Rayleigh)概率分布的各种问题。这种分布配合谱分析已广泛地用来预测在航区中的波浪和船舶运动。讨论了包括特征函数在内的许多分布特性，以便于进一步将雷利分布应用于各种实用问题。本章中讨论了两个拟合优度统计检验法—— χ^2 (chi平方)检验法和科尔莫哥洛夫—斯米尔诺夫(Kolmogorov—Smirnov)检验法。它们在分析试验数据时起着重要的作用。特别是从结合一个实际例子来引进科尔莫哥洛夫—斯米尔诺夫检验法，因为该检验法过去还未曾用于船舶工程领域，它的主要特点是考虑了每一观测值而不是仅考虑观测值的组合。

第四章讨论从一个随机取样母需进行谱分析而估计雷利参数的一些方法。这些方法的一个优点是它们可以用少数观测取样来获得参数的置信限。引进了两种不同的估计方法，一个是用最大或然性的估计法，另一个是用最小 χ^2 的估计法。本章的第一部分叙述了最大或然性估算子的推导与其统计特性，然后结合实际应用的例子来叙述用最小 χ^2 估算子的估计方法。利用这种方法，雷利参数就

可以简单地通过计算大于或小于预先给定常数的观测数目来估算。本章的最后一部分详细介绍了从少量数目观测中估计雷利参数的置信区间的方法。

第五章谈到把特殊分布应用于预测船舶性能时所遇到的四个特殊问题。第一个问题是船舶运动的长期预测，对此已有多钟不同的处理方法，在文中通过举例对这问题作了简要说明。解此问题的最适当的方法是基于长期分布为短期分布的边际分布这一概念，而短期分布可以作为一个条件概率分布来考虑。但是，这种方法只能获得数值解，另一种方法是用韦布尔 (Weibull) 分布，这时概率分布可用数学公式来表达。这方面曾有过较详细的研究，因此可以了解它的经验特性，同时也不难从试验数据中获得分布参数的估计。第二个特殊问题是预测船舶性能的极值。结合大量观测的极值的渐近概率分布阐述了顺序统计学的应用 其中详细介绍了冈贝尔 (Gumbel) 的三个渐近分布，这对其分布参数的估算是有帮助的。第三个问题是二维雷利分布理论。虽然该理论至今尚未应用于船舶工程领域，但是将来应用的趋势是明显的。本章要讨论的第四个问题即最后一个问题是关于非狭带随机过程峰值的推广的雷利概率分布。

第六章概述可数过程，着重介绍泊松 (Poisson) 过程在船舶砰击和甲板淹湿性现象中的应用。从泊松过程的两个重要性质 (其一是关于两个相继事件之间的时间间隔，另一是关于等待到第 m 次事件发生的时间长度)，分别导出了两个相继砰击之间的时间间隔和两剧烈砰击之间时间间隔的概率密度函数的表达式。求得了船舶砰击出现的频率，其中用到了超限问题与第二章中所讲的相位面图等有关技术，求得了砰击的碰撞压力概率，由它可估算出平均压力和有义压力。但是可能更有用的是利用顺序统计学所求得的极值压力的概率密度函数。关于甲板淹湿性，虽然它和砰击问题不同，即前者仅与相对运动有关，而后者还与相对速度有关，但在统计学上这两种现象是相似的，所以这里泊松过程又可以应用。最后确定了流过甲板的水头压力的概率密度函数。

最后一章，即第七章，概述了统计学在预测波浪中功率特性的应用。虽然，船

船运动的预测可以根据船速和螺旋桨转数不变情况下的线性假定来进行，但在海浪中附加阻力、推力和扭矩等这些功率特性的增加对推进系统是很敏感的，因而线性的假定不一定满足，用来估计船舶在不规则波中的速度应答的线性迭加方法可能无效。而不规则波中功率量的统计特性将按平均增量和对平均值的变差来讨论。其中给出了预测海波中功率平均增量的方法，与实船试验结果很一致。功率量对海浪中平均增量的变差似乎服从雷利概率分布律；但是以不规则波上所得结果为基础的这个变差的预测方法尚在发展中

第一章 谱 分 析

1—1. 随机过程

一个随机过程是一族随机变量，记为 $\{X(t); t \in T\}$ ，它可以通过统计特性来描述。其中 T 表示观测时间。

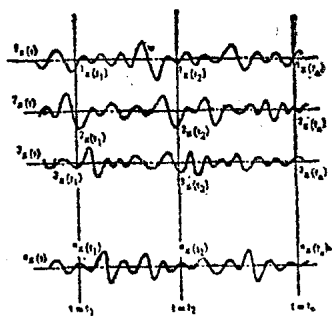
如果 $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 则随机过程称为离散时间过程；而如果 $T = \{-\infty, +\infty\}$ ，则称为连续时间过程。

例如，考虑 $X(t)$ 为一波浪离开观测所得的波浪记录另线的距离。 $X(t)$ 随时间随机地变化，但是观测数据作出的直方图表明， $X(t)$ 服从正态概率分布。如果 $X(t)$ 取峰谷间的波幅，则观测所得将表明 $X(t)$ 很像服从雷利概率分布。波浪离另线的距离与峰谷间的幅度一样，都是时间的函数，都称为随机过程。

但是上述例子假设过程是平稳的和各态历经的（定义将在后面给出），这个假设在短期观测船舶和海洋工程的现象时已被普遍采用。另一方面，随机性的精确定义需要下述概念，即随机过程的统计特性是通过许多同时做的观测，而不是单一的观测来建立的。

为了更好地理解这个概念，假设把大量同样的波高测量仪在相同条件下放在某海区同时进行测量，把每一个波高仪的记录都收集起来，这些记录的整体表明了波高作为时间函数的变化，称为集合。波高可用某一个时间的随机函数来表征， n 个波高仪有 $^1x(t)$ ， $^2x(t)$ ， $\dots\dots^n x(t)$ ，它们彼此不同，如图（1—1）所示，因此集合由一组 n 个记录来表示，这里的 n 必须是一个大的数。要指出的是，任意一条记录 $^k x(t)$ 只不过是可观测到的许许多多记录中的一个特殊例子。

集合 $\{^1x(t), ^2x(t), \dots\dots^n x(t)\}$ 的特征可用统计值来表达。例如，对图



(图 1—1) 随机过程 $x(t)$ 的集合

(1—1) 所示的例子考虑一个任意选择的时间 $t=t_1$ 。集合中所有元素的瞬时振幅 $\{^1x(t_1), ^2x(t_1), \dots, ^nx(t_1)\}$ 具有不同的数值, 但其平均值可以由

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kx(t_1)$ 获得, 并称为集合的平均。在不同的时间 $t=t_2$ 的集合平均可按类

似的方法求得, 但该值不一定与 $t=t_1$ 时相同。幸而, 如果随机过程为平稳的则此种麻烦不会出现。实际求取随机过程统计特性时还存在另一个困难, 因为为了估算, 需要一个由大量记录组成的集合。但这一困难可以通过一个附加假设来消除, 即假设随机过程是各态历经的。在这个条件下, $X(t)$ 的统计特性可以从单一记录的时间历经代替许多记录的集合来求得。这是预测一个航区的波浪和船舶运动这项新技术的基本假设。但是应该指出, 各态历经的假设不能用于某些特殊问题, 例如, 单个波浪记录不能用于预测风程影响明显区域的波浪特性。

在讨论谱分析之前, 将先从一般到特殊的顺序按下列随机过程分类予以概述, 这样最近预测技术中所包含的基本概念与假设就可以明白理解。

(A) 具有独立增量的随机过程。

如果在不重复的时刻 $t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$, 随机变量 $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, $\dots$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是统计独立的, 则称 $X(t)$ 为独立增量过程。

要指出, 随机变量 $X(t_i)$ 和 $X(t_j)$ 不一定是独立的, 而增量 $X(t_j) - X(t_i)$ 可以是

独立的。两者的差别可用(D)项小标题中的一个例子来加以阐明。

独立增量随机过程有时也称为可加过程。这是因为取决于其增量的一个随机过程 $X(t)$ 的特性, 在加上或减去一个过程 $Y(t)$ 是不受影响的。因为新随机过程 $X(t) \pm Y(t)$ 的增量与老过程 $X(t)$ 的增量是一样的。

(B) 马尔可夫 (Markov) 过程:

马尔可夫过程是这样—个过程: 它在任何给定时刻之后的状态仅仅取决于该给定时刻的状态而与以前任何时间的状态无关。简单地说, 如果过程的“现在”是已知的, 则过程的“将来”行为与其“过去”无关。令 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 并给出较早时间的值为 $X(t_1)=x_1$, $X(t_2)=x_2$, $\dots$ 时, 考虑随机过程 $X(t)$ 在时间 t_n 不超过某一值 X_n 的概率。则对马尔可夫过程,

$$\begin{aligned} \Pr \{ X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \dots, X(t_{n-1})=x_{n-1} \} \\ = \Pr \{ X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1} \} \quad (1-1) \end{aligned}$$

注意到这种条件分布仅取决于在 $t=t_{n-1}$ 时的最近一个值 $X(t)=x_{n-1}$ 。

(1-1) 式右边的条件概率函数称为转移概率函数。应该指出, 如果随机过程的增量 $X(t_j)-X(t_i)$ 对所有 $t < t_i < t_j$ 都与 $X(t)$ 独立, 则该过程是马尔可夫过程。

(C) 平稳过程:

如果集合的所有统计特性都不随时间的迁移而变化, 即在时间 t 对整个集合取一定平均值的所有统计函数在 $(t+\tau)$ 时取同一值, 而且对所有的 τ 都是一样, 则这个随机过程称为平稳的。因此, 对任意选择的 t_1 和 t_2 , 图(1-1)中随机变量 $X(t_2)$ 的统计特性与 $X(t_1)$ 的统计特性相同。

把严格的平稳性定义稍作放宽, 可以提出一种弱的(或协方差)平稳条件: 集合的概率分布与时间有关, 而集合的平均值和协方差具有如下特性:

(i) 集合平均值是一常数

$$E[x(t)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k_x(t) = m \quad (\text{对所有的 } t) \quad (1-2)$$

(ii) 自协方差函数仅取决于时间间隔

$$\begin{aligned}\text{Cov}[x(t), x(t+\tau)] &= E[\{x(t) - E[x(t)]\} \{x(t+\tau) - E[x(t+\tau)]\}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{k_x(t) - m\} \{k_x(t+\tau) - m\} \\ &= R(\tau) \quad (\text{对所有的 } t) \quad (1-3)\end{aligned}$$

应该指出, 如果随机过程 $x(t)$ 是严格平稳的, 则它也是弱平稳的, 反之就不成立。但如果 $x(t)$ 是弱平稳的而且是正态的随机过程 (由 (1-10) 式定义), 则按严格意义上说也是平稳的。波浪和船舶运动可认为是属于这一范畴的。

弱平稳的定义可以引伸到两个随机过程, 即如果每个过程都满足 (1-2) 和 (1-3) 式所给定的条件, 而且其交互协方差仅与时间间隔 τ 有关, 即

$$\begin{aligned}\text{Cov}[x(t), y(t+\tau)] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{k_x(t) - m_x\} \{k_y(t+\tau) - m_y\} \\ &= R_{xy}(\tau) \quad (\text{对所有的 } t) \quad (1-4)\end{aligned}$$

则这两个过程就称为联合弱平稳过程。

(D) 具有平稳增量的过程

如果随机过程的增量 $X(t_j) - X(t_i)$ 是独立的, 而且它的概率分布仅取决于 $(t_j - t_i)$, 则该过程称为具有平稳增量的。必须指出, 过程 $X(t)$ 本身可以不是平稳的, 但其增量却是平稳的。为了弄清这点差别, 特举如下例子:

考虑一个随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$, 它表示在不规则海浪中砰击出现的次数。随机过程 $N(t)$ 不是平稳的, 因为它的概率分布与时间 t 有关。而且 $N(t_1)$ 和 $N(t_2)$ 不是独立的, 因为当 $t_2 \geq t_1$ 时 $N(t_2) \geq N(t_1)$ 。现设 $X(t)$ 是另一个随机过程, 其定义为

$$X(t) = N(t+t_0) - N(t_0) \quad (1-5)$$

$X(t)$ 表示在 t 时开始的 t_0 时间间隔所出现的砰击次数。因此随机过程与 t 无关, 且仅与 t_0 有关, 即虽然 $N(t)$ 不是平稳过程, 但却是一个具有平稳增量的随机

过程。如第六章将要讨论到的，在给定时间周期出现的碰击次数的预测就是根据这个性质。

(E)各态历经随机过程

假设一个平稳随机过程满足如下两个条件：

(i) 集合中的每一条记录统计地等价于其他所有的记录。

(ii) 在任一瞬时中集合的所有统计特性都可用相当长时间间隔取出的一条记录来代替，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F[k_x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F[k_x(t)] dt \quad (1-6)$$

式中 $F[k_x(t)]$ 是该集合的任一个统计特性。如果这些条件都满足，则该过程称为各态历经的，而且在数据的统计分析时就有可能进行重要的简化，因为图(1-1)所示的任一选择的记录供给了所有的统计信息，而这些信息本来是要通过对同一现象同时得出的大量记录进行分析才能获得的。

如果随机过程并不对所有函数 $F[k_x(t)]$ 满足(1-6)式的条件，而仅对平均值

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F[k_x(t)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k_x(t) \quad (1-7)$$

与协方差

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F[k_x(t)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{k_x(t) - m\} \{k_x(t + \tau) - m\} \quad (1-8)$$

满足，则过程可称为是弱各态历经的。应该注意到各态历经的随机过程必须首先是平稳的。

表1-1为平稳过程与平稳各态历经过程的平均值、均方值等各种统计值的比较，正如表中所看到的，前者是一组几条记录的集合的平均值，后者是单一记

表 1—1 平稳过程与平稳各态历经过程的各种统计值的比较

	平 稳 过 程	平稳而各态历经过程
平 均 值	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(t)$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot dt$
均 方 值	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{x(t)\}^2$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{x(t)\}^2 \cdot dt$
自相关值	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(t) \cdot x(t + \tau)$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt$
互相关值	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(t) \cdot y(t + \tau)$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt$

录的时间平均值。

处理波浪和船舶运动时是假设满足各态历经性的。甚至对水池造的波来说通常也可认为是具有各态历经性的。因此造波的特性可通过分析由一个波浪传感器所得时间历经记录来确定，而大可不必在整个水池上分布许多波浪传感器以获得数据。因此本文以后部分所讨论的随机过程是在满足各态历经性的假设下来处理的。

(F)具有狭带谱的随机过程

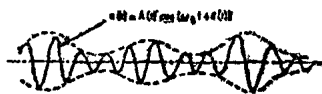
狭带随机过程定义为：该过程仅包含一个小范围频率，而且该过程的谱密度（或所有频率范围的平均功率）的有义部分限制在一个狭频带中，其宽度与此带的中央频率相比是很小的。从这个狭带随机过程中取出的样本函数 $X(t)$ 是具有缓慢变化的振幅（或包络） $A(t)$ 和相位 $\varepsilon(t)$ 的正弦波，如图（1—2）所示，它可表示为

$$x(t) = A(t) \cdot \cos \{ \omega_0 t + \varepsilon(t) \}$$

$$A(t) \geq 0, \quad 0 \leq \varepsilon(t) < \infty$$

(1-9)

式中 $A(t)$ 和 $\varepsilon(t)$ 是时间的函数, 而 ω_0 是谱带的平均频率。



(图 1-2) 狭带随机过程的时间历经

当外来信号通过一个狭带过滤器时的随机噪音波就是狭带过程的一个典型例子。这种情形相当于当输入是一个宽带过程时一个强烈谐振系统的应答。假设表示船舶运动过程的能谱是狭带的, 则这个过程的包络和峰服从雷利概率分布, 这将在 2-2 和 2-3 一节中加以讨论。虽然这个假设的合理性尚未被证实, 但根据这个假设的预测技术已广泛应用于船舶工程方面。

随机过程可以根据它们的概率分布来分类。在船舶工程中所经常遇到的有两种随机过程(正态过程和泊松过程)。波浪及在海浪中的船舶运动、波浪引起的船体应力、推力和扭矩的变化等都可属于正态过程; 而船舶砰击和甲板淹湿性可作泊松过程来处理。因为泊松过程在第六章中讨论, 其定义将在后面给出。正态过程的定义如下:

如果对每一个整数 n 及每一组时刻 $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, 在图 1-1 所示的随机变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 的联合分布具有正态概率密度函数(1-10), 则这个随机过程称为正态(或高斯(Gauss))随机过程。

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x}-\mathbf{m})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})} \quad (1-10)$$

其中

$$\mathbf{x} = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))'$$

$$m = (m_1, m_2, \dots, m_n)'$$

$$m_i = E[x(t_i)]$$

$|\Sigma| = \Sigma$ 的行列式

$\Sigma = x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ 的协方差矩阵

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

这里 $\sigma_{ij} = \text{Cov}[x(t_i), x(t_j)]$; $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

假设过程是弱平稳和各态历经的, 则

$$\begin{cases} m_1 = m_2 = \dots = m_n = m \text{ (常数)} \\ \sigma_{ij} = E[x(t_i)x(t_j)] - m^2 = R_{xx}(\tau) - m^2 \end{cases} \quad (1-11)$$

式中 $R_{xx}(\tau)$ 为 $X(t)$ 的自相关函数, $\tau = t_j - t_i$ 。

这样就可以看出, 平均值和自相关函数完全确定了过程的概率分布, 而联合概率函数成为仅是时间差 $\tau = t_j - t_i$ 的函数, 而不是 t_i 和 t_j 分别的函数。

正态过程的一个重要特性是, 从一个正态过程按线性运算(包括微分、积分)而推得的任意随机过程本身都是一个正态过程。这就意味着如果输入随机过程(如波浪)是正态的, 则输出随机过程(船舶运动)也是正态的, 只要它们之间存在线性关系。正态过程的另一个例子是首部相对于波浪的运动, 因为它是波浪、纵摇和升沉运动的线性组合, 而它们都可看成是正态随机过程。类似的, 波浪和首部运动之间的相对速度也可以看作是一个正态过程。

1—2. 谱密度函数

一般说来可以用两种不同的方法来估计像船舶运动等随机过程的统计特性。一种是在时间域内得到随机取样, 另一种是在频率域里进行谱(调和)分析。前

者将在第四章中讨论，后者是本章的主要论题。

谱分析的主要优点在于它能帮助我们(1)理解像船舶运动这种随机过程的物理机理(应答特性)，(2)估计在任意给定随机波浪中线性系统的运动，(3)获得在时间域内模拟随机运动的可能。

谱分析基于如下两个定理：

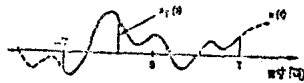
1. 维纳—辛钦 (Wiener—Khinchine) 定理，它表明只要随机过程为弱平稳的，则自相关函数和谱密度函数之间是由傅里叶 (Fourier) 变换相联系着的。

2. 线性系统中的输出谱密度函数与输入谱密度函数之比等于该系统的脉冲应答函数的傅里叶变换的平方。

因为谱分析中所遇到的公式的严格数学推导超出了本文的范围，故在下面所述及的谱分析理论仅限于介绍其在力学或船舶工程方面经常出现的问题。谱分析所用到的详细数学理论可在参考资料 [4] ~ [7] 中找到。

首先讨论均方值 (见表 1—1) 和谱密度函数。研究随机过程 $x(t)$ ，并设 $X_T(t)$ 如图 (1—3) 所示为

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{对 } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{对 } T < |t| \end{cases} \quad (1-12)$$



(图 1—3) $\{x_T(t); -T \leq t \leq T\}$ 的定义

其傅里叶变换 $X_T(\omega)$ 为

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1-13)$$

其逆变换为

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (1-14)$$

为了 $x(t)$ 的傅里叶变换的存在, 用(1-12)式引进的截断函数 $x_T(t)$ 是必要的, 因为若没有 $x_T(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ 就不一定收敛于一个有限的值。

设 $\overline{P}_x$ 为随机过程 $x_T(t)$ 的均方根值。其式如下:

$$\begin{aligned} \overline{P}_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{x_T(t)\}^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{x(t)\}^2 dt \end{aligned} \quad (1-15)$$

要指出, $x_T(t)$ 对一个有限的值 T 具有一个有限的均方值。利用傅里叶变换的巴什瓦(Parseval)定理, 均方值可用频率表示为

$$\overline{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega \right\} \quad (1-16)$$

而随机过程 $x_T(t)$ 的谱密度函数 $S_{xx}(\omega)$ 按定义为

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} |X_T(\omega)|^2 \quad (1-17)$$

不难看出, S_{xx} 是一个实的取正值的函数, 而且当 x_T 是实的时, 它对于原点对称的。这样, 从方程(1-16)和(1-17)可以推导出如下均方值与谱密度函数之间的关系式, 即,

$$\begin{aligned} \overline{P}_x &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \\ &= \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (1-18)$$

因此, 均方值等于在频率从零到无穷远处谱密度函数下面的曲边梯形的面积。