LIGONG

高等学校理工科参考丛书

GAODENGXUEXIAOLIGONGKECANKAOCONGSHU

电磁学自学指导

高等学校理工科参考丛书

电磁学自学指导

鲁德昌副教授 编著

湖南科学技术出版社

高等学校理工科参考丛书

电磁学自学指导

鲁德昌副教授　编著

责任编辑：陈清山

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路3号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1988年2月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米　1/16　印张：26.75　字数：672,000

印数：1——2,800

ISBN 7—5357—0135—3

TN·5　　定价：6.50元

湘目　87—36

前　言

这是一本为自学青年学习大学物理学或电磁学而编写的参考书。自然，也可供有关专业的大专院校学生参考。

为便于自学，在本书中每一章节都包括《本章内容提要》、《例题》及《习题》等三部分。在《内容提要》中简明扼要地介绍了电磁学的基本理论和基本规律。在所有的例题中均指明了解题思路、解题方法，而在有的例题中，还给出了多种解法。为了辅导自学，在每道习题里，也都给出了解题思路。然而，解题思路不是唯一的，仅供读者参考。

本书原定一九八四年出版，后应出版社的要求进行了多次修改，在修改过程中得到许多同志的指导与帮助，在此谨致谢意。

限于作者水平，书中不妥之处在所难免，请读者批评指正。

北京师范学院分院
鲁德昌

目　录

第一章　静电场

§1-1　库仑定律

库仑定律就是两个点电荷之间的相互作用定律，它是库仑于1785年由实验发现的。其内容是：两个点电荷q_1与q_2之间的相互作用力(静电力)的大小，和q_1与q_2的乘积成正比，和它们之间距离r的平方成反比；作用力的方向沿着它们的联线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

令$\vec{F}$代表q_1给q_2的力、$\hat{r}$代表由q_1指向q_2方向的单位矢量，则

$$\vec{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r} \tag{1-1}$$

无论q_1、q_2的正、负如何，式(1-1) 都适用。当q_1、q_2同号时，$\vec{F}$沿$\hat{r}$方向，即为斥力；当q_1、q_2异号时，q_1与q_2的乘积为负，$\vec{F}$沿$-\hat{r}$方向，即为吸引力。根据牛顿第三定律，q_2给q_1的力为$-\vec{F}$(见图1-1-1)。$\vec{F}$的大小为

$$F=k\frac{q_1q_2}{r^2} \qquad \text{1-2)}$$

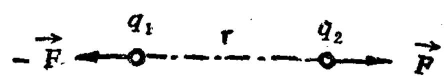


图1-1-1

式中，k是比例系数，它的数值取决于式中各量的单位。

本书采用的单位制是$MKSA$单位制。在这个单位制中，以长度、质量、时间及电流强度四个物理量作为基本量，以米(M)、千克(K)、秒(S)及安培(A)作为基本单位，其它电磁量的单位为导出单位，它们可以根据一定的物理公式或定义导出。

采用$MKSA$单位制时，电量的单位为库仑(当导线中有1A的稳定电流流过时，在1S内通过导线横截面的电量定义为1库仑，即1库仑＝1安·秒)，力的单位为牛顿（简称“牛”)。在库仑定律式(1-1) 中的比例系数k的数值不能任意确定，它是一个有数值有量纲的量，要通过实验来确定。在$MKSA$单位制中，常常将k写成

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

的形式。式中，ε_0称为真空介电常数，实验测得

$$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\text{库仑}^2/\text{牛顿·米}^2$$

相应的k值是

$$k=\frac{1}{4\pi\times8.85\times10^{-12}}=8.99\times10^9\approx9.0\times10^9(\text{牛顿·米}^2/\text{库仑}^2)$$

用这种单位制，库仑定律式(1-1) 可写成如下形式

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r} \tag{1-3}$$

库仑定律中引入的比例常数4π因子，是为了简化一些重要公式的形式。

讨论

1.点电荷

如果带电体的线度比带电体之间的距离小得多，那么静电力就基本上只取决于它们的电量和距离，满足这个条件的带电体叫做点带电体或点电荷。但是，究竟带电体的线度比距离小多少才能被看作点电荷，却没有一个绝对的标准，它取决于讨论问题时所要求的精确程度。例如，两个半径为1厘米的带电体，当球心距离为100米时，可充分精确地被看作点电荷；当球心距离为3厘米时，再看作点电荷就会带来很大误差。

2.叠加原理

库仑定律讨论的是两个点电荷之间的静电力，当空间有两个以上的点电荷时，就必须补充另一实验事实——作用于每一点电荷上的总静电力，等于其他点电荷单独存在时作用于该电荷的静电力的矢量和，这叫做叠加原理。这意味着：一个点电荷作用于另一点电荷的力总是符合库仑定律的，无论周围是否存在其他电荷。

例 题

【例题1】 两小球质量都是 m，都用长为l的细线挂在同一点，若它们带上相同的电量，平衡时两线夹角为2θ(见图1-1-2)。设小球的半径都可略去不计，求每个小球上的电量。

解题思路

分析任一电荷所受的力，平衡时，其合力为零，即$\Sigma\vec{F}_i=0$。

解法

小球在平衡位置时，各电荷所受的合力为零。考虑右边电荷，它受细线的张力$\vec{T}$、库仑力(静电力)$\vec{F}$和重力$\vec{P}$的作用，它们的方向如图所示。合力为零时应有

$$T\sin\theta=F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} \qquad (1)$$

$$T\cos\theta=P=mg \qquad (2)$$

(1) 式除以(2) 式得

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{F}{P}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\frac{1}{mg}$$

则 $q^2=4\pi\varepsilon_0 r^2 mg\,\mathrm{tg}\,\theta=4\pi\varepsilon_0(2l\sin\theta)^2 mg\,\mathrm{tg}\,\theta$

$$q=\pm 2l\sin\theta\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

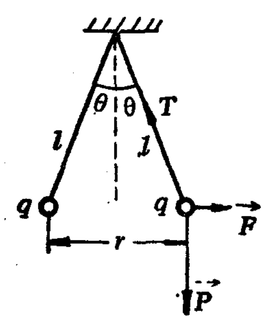


图1-1-2

式中，“±”号说明两球所带电荷q正负均可，只要同号。

【例题2】 氢原子由一个质子(即氢原子核) 和一个电子组成。根据经典模型，在正常状态下，电子绕核作圆周运动，轨道半径是5.29×10^{-11}米。已知质子质量$M=1.67\times10^{-27}$千克，电子质量$m=9.11\times10^{-31}$千克，电荷分别为$\pm e=\pm1.60\times10^{-19}$库，万有引力常数$G=6.67\times10^{-11}$牛顿·米^2/千克^2。(1) 求电子所受的库仑力；(2) 库仑力是万有引力的多少倍？(3) 求电子的速度。

解题思路

根据库仑定律及万有引力求解。

解法

（1）电子所受库仑力的大小

$$F_e=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{9\times10^9\times(1.60\times10^{-19})^2}{(5.29\times10^{-11})^2}=8.23\times10^{-8}\text{牛}$$

$\vec{F_e}$的方向沿半径指向原子核。

（2）原子核对电子的万有引力为

$$F_G=G\frac{Mm}{r^2}$$

由此得库仑力与万有引力的比值

$$\frac{F_e}{F_G}=\frac{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}{G\dfrac{Mm}{r^2}}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 GMm}$$

$$=\frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{6.67\times10^{-11}\times1.67\times10^{-27}\times9.11\times10^{-31}}=2.27\times10^{39}$$

即电子所受的库仑力是万有引力的2.27×10^{39}倍。因此，在处理电子与原子核之间的相互作用的问题时，只需考虑静电力，万有引力可以被忽略不计。

（3）设电子绕核作圆周运动的速度为v，因为$F_e\gg F_G$，故向心力为

$$F_{\text{向}}=\frac{mv^2}{r}\approx F_e$$

$$\therefore\qquad v=\sqrt{\frac{F_e r}{m}}=\sqrt{\frac{8.23\times10^{-8}\times5.29\times10^{-11}}{9.11\times10^{-31}}}=2.19\times10^6\text{米/秒}$$

【例题3】 实验证明：当两个原子核之间的距离小到10^{-15}米时，它们之间的排斥力仍遵守库仑定律。金的原子核中有79个质子，氦的原子核（即α粒子）中有2个质子。已知每个质子带电$e=1.60\times10^{-19}$库，α粒子的质量为6.68×10^{-27}千克。当α粒子与金核相距为6.9×10^{-15}米时（设这时它们都仍可当作点电荷），求（1）α粒子所受的力；（2）α粒子的加速度。

解题思路

根据库仑定律和牛顿第二定律求解。

解法

（1）设α粒子所受的力为$\vec{F}$，因其所受的库仑力远大于万有引力，故$\vec{F}$可视为库仑力，其大小为

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{9\times10^9\times79\times2\times(1.60\times10^{-19})^2}{(6.9\times10^{-15})^2}$$

$$=7.6\times10^2\text{牛}$$

$\vec{F}$为斥力，它的方向在α粒子与金原子核的联线上，背离金原子核。此例说明，在原子尺度下起作用的静电力是非常强的。

（2）由牛顿第二定律$F=ma$可得α粒子的加速度

$$a=\frac{F}{m}=\frac{7.6\times10^2}{6.68\times10^{-27}}=1.1\times10^{29}\text{米/秒}^2$$

$\vec{a}$的方向与$\vec{F}$的方向相同。

【例题4】 三个相同的点电荷放置在等边三角形的各顶点上。在此三角形的中心应放置怎样的电荷，才能使作用在每一点电荷上的合力为零？

解题思路

分析任一顶点电荷所受的力，列出力的平衡方程解之。

解法

设等边三角形为$\triangle abc$，边长为l，各顶点上的点电荷为q。为了使每个点电荷所受的合力均为零，即使整个带电系统处在平衡状态，只能在$\triangle abc$的中心点o处放置一个负电荷$-q_0$。由于对称性，仅分析一点（如a点）电荷q受力情况即可。我们可以利用叠加原理来求a点电荷q所受的合力。

b、c两点电荷作用于a点电荷的库仑力为

$$F_{ba}=F_{ca}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2}$$

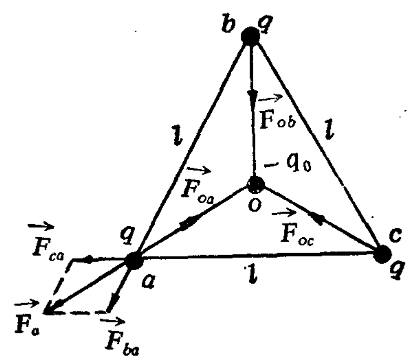


图1-1-3

$\vec{F}_{ba}$与$\vec{F}_{ca}$的合力$\vec{F}_a$为

$$F_a=2F_{ca}\cos30^\circ=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2}$$

$-q_0$作用a点电荷的库仑力的大小为

$$F_{oa}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{(l/\sqrt{3})^2}=\frac{3qq_0}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

各力的方向如图1-1-3所示。a点的总合力若为零，则有

$$F_a=F_{oa}$$

即
$$\frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2}=\frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{l^2}$$

∴
$$q_0=\frac{\sqrt{3}}{3}q$$

由图1-1-3可见，由于等边三角形的对称性，o点电荷$-q_0$所受的合力为零。即

$$\vec{F}_{ao}+\vec{F}_{bo}+\vec{F}_{co}=0$$

注意： 若等边三角形$\triangle abc$各顶点上的点电荷为$-q$，那么，在$\triangle abc$中心点处必须放置一个正电荷q_0。

习　题

1．如图1-1-4所示，设$q=1.0\times10^{7}$库仑，$a=5.0$厘米。求左下角的电荷所受的力。

2．电量都是Q的两个点电荷相距为l，联线中点为O；有另一点电荷q，在联线的中垂面上距O为x处。（1）求q受的力；（2）若q开始时是静止的，然后让它自己运动，它将如何运动？分别就q与Q同号和异号两种情况加以讨论。

解题思路

（1）q受两个电量为Q的点电荷的作用力为$\vec{F}_1$与$\vec{F}_2$，方向如图1-1-5(a)所示。不难看出

$\vec{F}_1$与$\vec{F}_2$的水平分量大小相等，方向相反，互相抵消。因此，电荷q所受的合力应是$\vec{F}_1$与$\vec{F}_2$两力在垂直方向的分量之和。

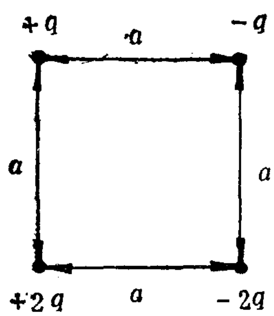


图1-1-4

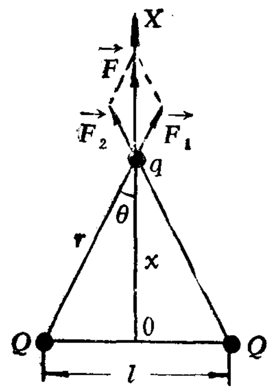


图1-1-5(a)

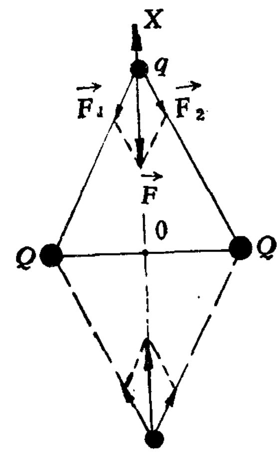


图1-1-5(b)

(2) 若q与Q同号，q将沿中垂线作加速运动到无穷远；若q与Q异号，q将在始终指向平衡位置0的力作用下，在中垂线上以0为中心，作周期性振动，如图1-1-5(b)所示。

3. 铁原子核里两质子间相距4.0×10^{-15}米，每个质子带电$e=1.60\times10^{-19}$库，(1) 求它们之间的库仑力；(2) 比较这力与每个质子所受重力的大小。

4. 两个点电荷带电$2q$和q，相距l，将第三个电荷放在何处所受合力为零？

5. 两个同号点电荷所带电量之和为Q，问它们带电量各为多少时，相互作用力最大？

§1-2 电场强度

一、电场

两个带电体并不直接接触，但它们之间却有相互作用力。这种作用力是怎样传递的呢？大量的实验表明在电荷的周围存在着一种特殊的物质，人们把这种物质称为电场。当物体带电时，在它的周围就有电场存在。可以说每个带电体都被电场包围着，即使在真空中的带电体也是如此。电场的一个重要特征是对位于其中的电荷要施以作用力。当一个带电体A位于另一带电体B附近时，即处在带电体B的电场中，它所受到的作用力就是它所在处的电场作用的。同样，带电体B也处在带电体A的电场中，它所受到的作用力也是它所在处的电场施于它的。因此，我们可以把带电体间的相互作用过程归结为：电荷产生电场，电场对位于其中的电荷施以作用力。

静止电荷周围的电场称为静电场。

二、电场强度

电场强度是一个反映电场本身性质的物理量。电场中任一点的电场强度为一矢量，其大小等于单位电荷在该点所受电场力的大小，其方向与正电荷在该点所受力的方向一致。用$\vec{E}$

表示电场强度，简称场强，即

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0} \tag{1-4}$$

式中，q_0为试探电荷。

电场强度的单位是牛顿/库仑，又可写成伏/米。

讨论

试探电荷应满足以下两个条件：

（1）它的几何线度必须足够小，即它必须是点电荷。

（2）它的电量要足够小，使得由于它的置入不引起原有电荷的重新分布，否则测出来的将是重新分布后的电荷激发的电场。

三、点电荷的场强

取一点电荷q，求距离点电荷为r处的P点的场强。

设在距点电荷q为r处有一试探电荷q_0，则按库仑定律，作用在q_0上的力$\vec{F}$等于

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}$$

式中，$\hat{r}$是从电荷q指向q_0的单位矢量。根据定义，该点的场强是

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{1-5}$$

若q是正电荷，则场强的方向是由电荷所在处指向P点；若q为负，则$\vec{E}$自P点指向q，如图1-2-1所示。

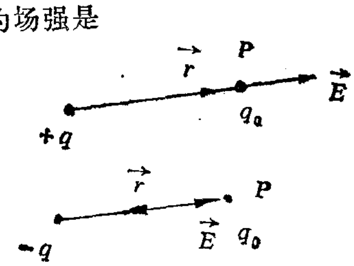


图1-2-1

四、均匀电场

一般来说，电场所在空间不同点的场强，其大小和方向都可以不同。如果电场中空间各点的场强，其大小和方向都相同，这种电场叫做均匀电场（或称匀强电场），它是一种特殊情况。

五、电场强度的叠加原理

1.点电荷组

点电荷组所产生的电场在某点P的场强等于各点电荷单独存在时所产生的电场在P点场强的矢量叠加，这叫做场强矢量叠加原理。

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{1-6}$$

2.连续分布电荷

如果产生电场的电荷是连续分布的，可将电荷分成无限小的单元dq，视dq为一点电荷，

则电荷在P点的场强为dq对P点所产生的场强$d\vec{E}$的积分，即

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r} \tag{1-7}$$

式中r为dq至P点的距离。

有时我们把电荷看成在一定体积内连续分布（体分布），有时把电荷看成在一定曲面上连续分布（面分布），有时把电荷看成在一定曲线上连续分布（线分布），等等。与此相应地就需要引入电荷的体密度、面密度、线密度等概念。

若电荷分布在细长的线上，则定义电荷线密度η_e如下：

$$\eta_e=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l}=\frac{dq}{dl}$$

式中dq为线元dl上的电量，η_e的单位为库仑/米。由于$dq=\eta_e dl$，所以全部线分布电荷在P点产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\eta_e dl}{r^2}\hat{r} \tag{1-8}$$

若电荷分布在一个平面或曲面上，则定义电荷面密度σ_e如下：

$$\sigma_e=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}=\frac{dq}{dS}$$

式中dq为面积元dS表面上的电量，σ_e的单位为库仑/米^2。由于$dq=\sigma_e dS$，所以全部面分布电荷在P点产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma_e dS}{r^2}\hat{r} \tag{1-9}$$

若电荷连续分布在一个体积内，则定义电荷体密度ρ_e如下：

$$\rho_e=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}=\frac{dq}{dV}$$

式中dq是体积元dV内的电量。ρ_e的单位为库仑/米^3。由于$dq=\rho_e dV$，所以全部体分布电荷在P点产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_e dV}{r^2}\hat{r} \tag{1-10}$$

讨论

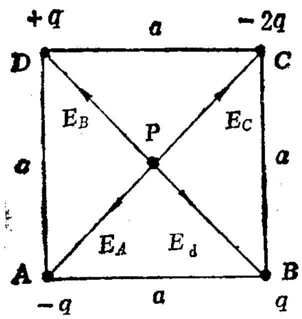
式(1-7)～式（1-10)是矢量的积分形式，不能当作标量积分计算，在具体运算时，通常必须把$d\vec{E}$在X、Y、Z三坐标轴方向上的分量式dE_X、dE_Y、dE_Z写出，然后再积分。

例　　题

【例题1】 如图1-2-2(a)所示之正方形，$q=1.0\times10^{-18}$库仑，$a=5.0$厘米，求中心点P的场强的大小和方向。

解题思路

这是已知点电荷组求场强的问题。考虑正方形的对称性，可先求对角线的场强，然后根据叠加原理求P点的合场强。



（注：右下角应为$2q$，误为q）

图1-2-2（a）

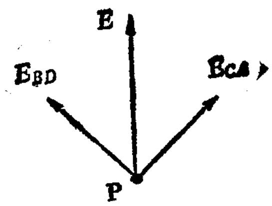


图1-2-2（b）

解　法

由图1-2-2(a)可知

$$E_{CA}=E_C-E_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r^2}-\frac{q}{r^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$E_{BD}=E_B-E_D=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r^2}-\frac{q}{r^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

E_{CA}与E_{BD}大小相等相交90°，方向如图1-2-2(b)所示。

$$\therefore\quad E=\sqrt{E_{CA}^2+E_{BD}^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}q}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\sqrt{2}q}{a^2}=9\times10^9\times\frac{2\sqrt{2}\times1.0\times10^{-18}}{(5\times10^{-2})^2}$$

$$=1.02\times10^{-5}\text{牛顿/库仑}$$

$\vec{E}$的方向垂直向上。

【例题2】 求均匀带电细棒（1）在通过自身端点的垂直面上；（2）在自身的延长线上和（3）在细棒的中垂线上的场强分布。设棒长为$2l$，带电总量为q。

解题思路

先求细棒外任一点$P(Z,r)$的场强，然后再求(1)、(2)和(3)的场强分布。

解法1

（1）设电荷线密度为η_e，则$\eta_e=\dfrac{q}{2l}$，P为细棒外任一点。由图1-2-3(a)所示几何关系，有：

$$\rho=r\csc\theta,\quad z=Z-r\operatorname{ctg}\theta,\quad dz=r\csc^2\theta d\theta。$$

带电长度元dz在P点产生的电场强度为

$$dE=\frac{\eta_e dz}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}$$

它的两个分量为

$$dE_z=\frac{\eta_e dz}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}\cos\theta=\frac{\eta_e r\csc^2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0(r\csc\theta)^2}\cos\theta$$

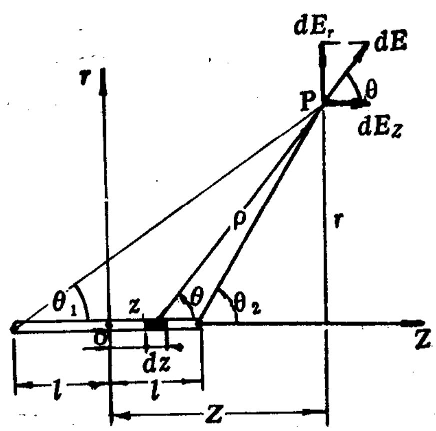


图1-2-3（a）

$$= \frac{\eta_e \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} d\theta$$

$$dE_r = \frac{\eta_e dz}{4\pi\varepsilon_0 \rho^2} \sin\theta = \frac{\eta_e r \csc^2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 (r\csc\theta)^2} \sin\theta = \frac{\eta_e \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} d\theta$$

整个带电棒在P点产生的电场强度的两个分量为

$$E_z = \frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_r = \frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0 r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

考虑P点在细棒右端的垂直面上，则

$$\theta_2 = 90°, \quad \sin\theta_2 = 1, \quad \cos\theta_2 = 0$$

$$\sin\theta_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4l^2}}, \quad \cos\theta_1 = \frac{2l}{\sqrt{r^2 + 4l^2}}$$

并将$\eta_e = \frac{q}{2l}$代入上式得

$$E_z = \frac{q}{2l 4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4l^2}}\right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4l^2}}\right)$$

$$E_r = \frac{q}{2l 4\pi\varepsilon_0 r} \frac{2l}{\sqrt{r^2 + 4l^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \frac{q}{\sqrt{r^2 + 4l^2}}$$

$$\therefore \quad \vec{E} = E_z \vec{i} + E_r \vec{j} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4l^2}}\right)\vec{i} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2 + 4l^2}}\vec{j}$$

同理，P点在细棒左端点的垂直面上，场强的两个分量大小均与上述相等，但E_z 方向相反。

（2）设$P(Z,0)$在细棒右侧延长线上，线电荷元$\eta_e dz$在$P(Z,0)$点产生的场强为

$$dE = \frac{\eta_e dz}{4\pi\varepsilon_0 (Z - z)^2}$$

方向沿$\overrightarrow{op}$方向，如图1-2-3(b)所示。整个带电细棒在$P(Z,0)$点产生的电场强度为

$$E = \frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{dz}{(Z - z)^2} = \frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{Z - z}\right]_{-l}^{l}$$

$$= \frac{\eta_e 2l}{4\pi\varepsilon_0 (Z^2 - l^2)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (Z^2 - l^2)}$$

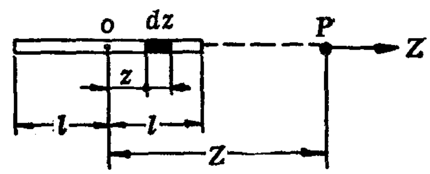


图1-2-3(b)

式中 $q = 2l\eta_e$ 为细棒带电总量。同理，若$P(Z,0)$点在细棒左侧延长线上，则场强大小与上述相同，但方向相反。

（3）如图1-2-3(c)所示，距原点z处的$dq = \frac{q}{2l} dz$在垂线上r处$P(0,r)$点的电场强度为

$$dE = \frac{(q/2l) dz}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + z^2)}$$

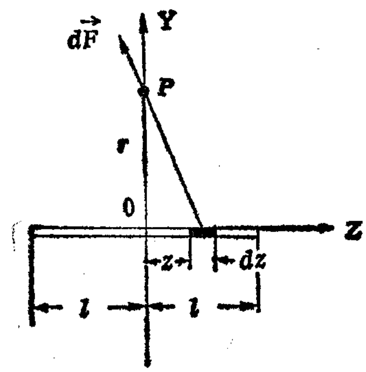
将$\overrightarrow{dE}$分解为dE_z和 dE_r，再考虑对称性，则

$$E_z = \int dE \cos\theta = 0$$

$$E_r=\int dE\sin\theta=\int_{-l}^{l}\frac{(q/2L)dz}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+l^2}}$$

所以 $\vec{E}=E_r\vec{j}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+l^2}}\vec{j}$



（注：$d\vec{F}$与横坐标Z的夹角为θ）

图1-2-3(c)

讨 论

在解(1)中，$E_r=\frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$

令$\cos\theta_1=\frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$；$\cos\theta_2=\frac{-l}{\sqrt{r^2+l^2}}$代入上式得

$E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+l^2}}$。由此可见，解(3)为解(1)的一个特解。

解法2

选取如图1-2-3(d)所示坐标系，o为原点，设$P(r,0)$为通过该棒端点o的垂直面上任一点，棒上任一带电线元dz在P点产生的场强dE可分解为dE_z和dE_r，则有

$$dq=\frac{q}{2l}dz,\quad dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}$$

$$=\frac{qdz}{8\pi\varepsilon_0 l(r^2+z^2)}$$

$$dE_z=dE\sin\theta,\quad dE_r=dE\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}},\quad \sin\theta=\frac{x}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

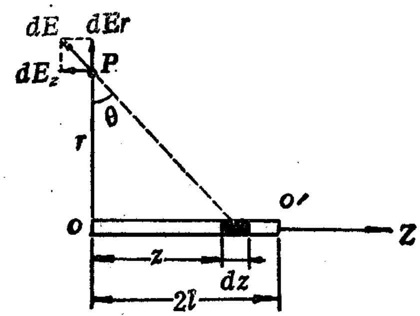


图1-2-3(d)

根据叠加原理，整个带电细棒在P点产生的场强为

$$E_z=\int_0^{2l}dE_z=\int_0^{2l}\frac{qzdz}{8\pi\varepsilon_0 l(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}[(r^2+z)^{-1/2}]_0^{2l}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\sqrt{r^2+4l^2}}\right)$$

$$E_r=\int_0^{2l}dE_r=\int_0^{2l}\frac{qrdz}{8\pi\varepsilon_0 l(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{qr}{8\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{z}{r^2(r^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^{2l}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+4l^2}}$$

$\vec{E}_z$沿Z轴负向，$\vec{E}_r$沿r的正向。若P点取在过另一端点o'的垂直面上，E_z、E_r 大小均与上述相同，但$\vec{E}_z$沿Z轴正向。

讨 论

(1) 在解法1的结果中，令$\theta_1=90°$或$\theta_2=90°$，即得解法2中E_z和E_r的解，可见解法2为解法1的一个特解。

(2) 若为一无限长均匀带电细棒，电荷线密度为η_e，则$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$代入下式得

$$E_z=\frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)=0$$

$$E_r=\frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

故无限长细棒外任一点P的场强为

$$\vec{E}=E_r\vec{j}=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{j}$$

【例题3】 如图1-2-4，一半径为R的均匀带电圆环，电荷总量为q。(1) 求轴线上离环中心O为x处的场强E；(2) 画出E-x曲线；(3) 轴线上什么地方场强最大？其值是多少？

解题思路

先将带电圆环分割成无限多个电荷元dq，求出dq在P点产生的场强$d\vec{E}$，然后利用线电荷的场强公式（1-8）对$d\vec{E}$进行积分，求出总场强。

解法1

（1）设电荷线密度为η_e，则

$$\eta_e=\frac{q}{2\pi R}$$

由图1-2-4(a)可知：

$$dL=Rd\theta,\quad r=(x^2+R^2)^{1/2}\qquad \cos\alpha=\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}$$

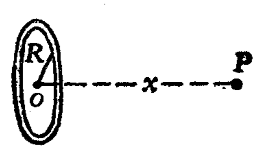


图1-2-4

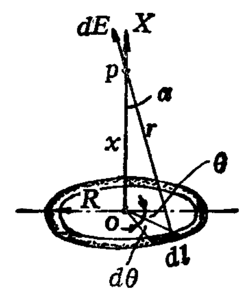


图1-2-4(a)

线元dl所带电量为$\eta_e dl$，它在P点产生的场强为

$$dE=\frac{\eta_e dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\eta_e dl}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}$$

由于对称性，合场强在X方向上。

$$dE_x=dE\cos\alpha=\frac{\eta_e dl}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{x\eta_e Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

整个带电圆环在P点产生的场强为

$$E=E_x=\int dE_x=\frac{\eta_e Rx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$