全国18所省市重点中学编

帮你学

·数理化·

初中 1

前　言

杨　乐

由全国18所重点中学编辑的丛书《帮你学》，现在与大家见面了。

祖国的社会主义现代化建设需要大批人才。在人才培养与训练中，中学数理化课程起着重要与基本的作用。全国中学理科老师勤奋工作，广大同学努力学习，近十年来教学质量不断提高。

然而我国幅员广大，各地、各校的情况千差万别，中学教学水平上还存在着较大的不平衡。现在，在全国享有盛誉的18所重点中学的老师编辑这套丛书，把他们多年积累的宝贵的教学思想、方法、经验贡献出来，通过丰富多采、饶有趣味的各种栏目加以介绍，必将对我国中学理科教学水平的提高起到重要的作用。我深信《帮你学》定会成为中学同学们的良师，也会成为老师们的益友。

目录

·数理化·初中·1·1988·

教学辅导

初三平面几何学习漫谈

北京师范学院附中　邵元铭

一、在深入理解基本概念的基础上，要准确、灵活地掌握定理是很重要的一环。例如在学习相交弦定理和切割线定理时，可按照下面的思路去理解：

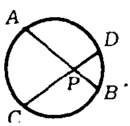


图 1

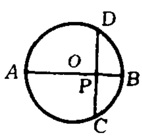


图 2

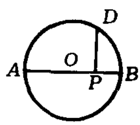


图 3

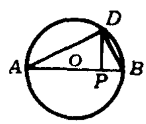


图 4

$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow \underbrace{PA \cdot PB = PC \cdot PD}_{AB\text{是直径，}AB \perp PD} \Rightarrow PA \cdot PB = PD^2 \Rightarrow$ 在 $Rt\triangle ABD$ 中 $DP \perp AB$ 各线段间的关系。

对图形的变化情况要一目了然：

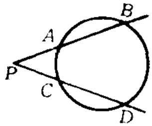


图 5

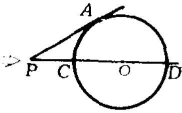


图 6

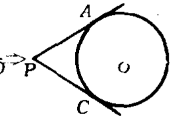


图 7

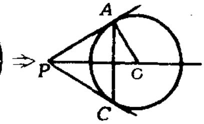


图 8

$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow PA^2 = PC \cdot PD \Rightarrow PA = PC \Rightarrow$ 在 Rt$\triangle PAO$与等腰$\triangle PAC$中，各线段间的关系。

进一步把相交弦定理和切割线定理统一起来理解。圆为已知，半径为 r，若P点对圆来说位置一定，则有过A点直线与圆交于A、B点。

$$PA \cdot PB = |PO^2 - r^2|$$

这时，我们对相交弦定理和切割线定理才有了深入的理解，在今后证题过程中，遇到直线和圆有公共点时，就会想到上面这些图形，定理的运用才会得心应手。

二、平面几何的学习，只停留在弄懂有关概念，记住了定理的内容，是很不够的。还必须善于观察和思考，严密的推理和判断。头脑要象一个加工厂，把学过的东西进行加工，创造出新的东西来。如何进行“加工”举例说明。

例1　如图9，AB是⊙O的弦，分别延长AB和BA使AC＝BD，CP、DQ分别切⊙O于P、Q点，求证：弦AB的中点M与P、Q在同一直线上。

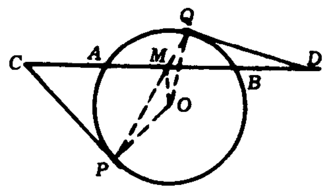


图 9

这是一道综合性较强的题，在头脑里如何“加工”呢？把一个复杂的题分解成简单的与学过的定理有关的图形。用一句形象的话来说，看一下解题的“分镜头”吧！

CP与⊙O切于P点　$OP \perp CP$

同理　　　　　$OQ \perp DQ$

由切割线定理

$$\left.\begin{array}{l} CP^2 = CA \cdot CB \\ DQ^2 = DB \cdot DA \\ AC = BD \\ CB = DA \end{array}\right\} \Rightarrow PC = DQ$$

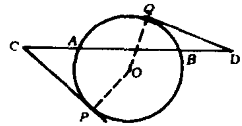


图10

$$\left.\begin{array}{l} \text{连结}OM \\ \because M\text{是}AB\text{弦的中点} \end{array}\right\} \Rightarrow OM \perp AB$$

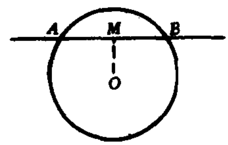


图11

连结OC，PM，在四边形CPOM中

$OM \perp CM$，$OP \perp CP$

$\therefore \angle OMC + \angle OPC = 180°$

∴P、O、M、C四点共圆

$\therefore \angle 1 = \angle 2$　　　　①

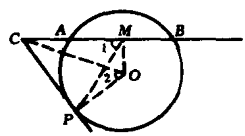


图12

同图12一样，可以证出

$\angle 3 = \angle 4$　　　　②

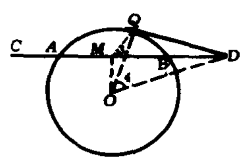


图13

再把这些“分镜头”合起来，“加工”的工作就可以完成了。

由各“分镜头”得的结果集中到图14来看。

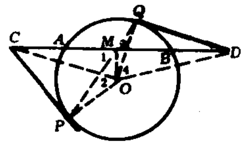


图14

$Rt\triangle CPO \cong Rt\triangle DQO$

$\therefore \angle 2 = \angle 4$　　　　③

由①、②、③式可推出$\angle 1 = \angle 3$

$\because$AMB在一条直线上

$\therefore$P、M、Q三点在一条直线上。

当然在一开始考虑证P、M、Q三点共线时，就要分析出证$\angle 1 = \angle 3$。才能很好的利用这些“分镜头”。

下面给出一道习题，希望同学们试试看：

例 2　如图15,在锐角$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高，以AB、DC分别为直径的圆在$\triangle ABC$内交于P点，求证：$\triangle PBD$与$\triangle PAC$等积。

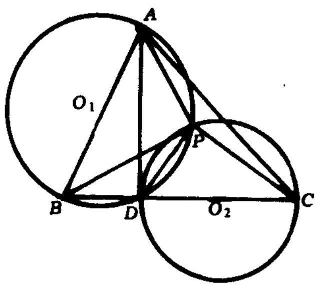


图15

我以为世界上最可宝贵的就是“今”，最易丧失的也是“今”，因为他最容易丧失，所以更觉得它可以宝贵。

——李大钊

圆幂定理中常数$|OP^2-R^2|$的应用

华东师范大学二附中　张佩蓓

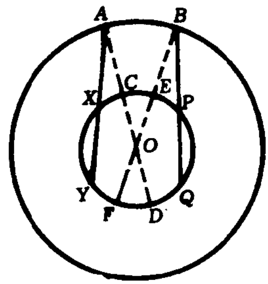
圆幂定理是有关圆的一条重要定理，它既是进行有关计算的工具，也是作比例中项，论证线段成比例，四点共圆等方面的重要依据。

在学习圆幂定理时，同学们往往只记住几个成比例的式子，而对于圆幂定理中的常数$|OP^2-R^2|$注意不够，如果能记住这个常数，则在解题过程中将会简捷，列举下列数例。

例1　两个同心圆中，A、B为大圆上任意两点，过A、B作小圆的割线AXY和BPQ，则$AX\cdot AY=BP\cdot BQ$，同学中普遍的证法是：

证法1　添作辅助线，连AO交小圆于C、D，连BO交小圆于E、F，再由割线定理得证（见图），证明过程中还必须证出$AC=BE$，$AD=BF$。

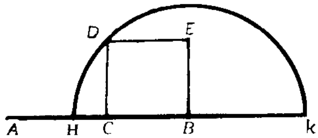
证法2　分别过A、B作小圆的切线，再由切割线定理以及计算出切线长得证。



如果熟记切线长就是常数OA^2-r^2，则可直接得到$AX\cdot AY=OA^2-r^2$，$BP\cdot BQ=OB^2-r^2$（其中r为小圆半径），又因为$OA=OB$从而得证，不必添作任何辅助线。

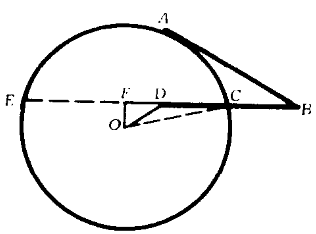
例2　设C为线段AB的中点，BCDE是以BC为边的正方形，以B为圆心，BD为半径的圆与AB及其延长线相交于点H及K。求证：$AH\cdot AK=2AC^2$。

大部分同学添作AD连线



后，先证明AD为⊙B的切线，再由切割线定理得证，如果由 $AH \cdot AK = AB^2 - DB^2 = (2AC)^2 - (\sqrt{2}AC)^2 = 2AC^2$，则可以不必添作辅助线直接由计算的方法得证。

例 3 D为⊙O内一点，OD = 2，AB切⊙O于点A，且AB = 6，BD连线交⊙O于C，且DC = CB = 3，求：圆O的半径长。



解 延长BD交⊙O于E，由切割线定理，首先可求出BE = 12，从而求得DE = 6，EC = 9，再作OF⊥EC后，由直角△OFD解出 $OF = \frac{\sqrt{7}}{2}$，进而又从直角△OFC中解得 $OC = \sqrt{22}$，显然后面部分的计算是比较繁琐的。如果用 $CD \cdot DE = R^2 - OD^2$，就能很快求得。

$R^2 = CD \cdot DE + OD^2 = 18 + 4 = 22$，$R = \sqrt{22}$。

避免了两次用勾股定理的计算过程。

例 4 AB为⊙O的直径，C为⊙O上任一点，以C为圆心作圆切AB于D点，交⊙O于E、F两点，连结EF交CD于M，求证：M为CD的中点

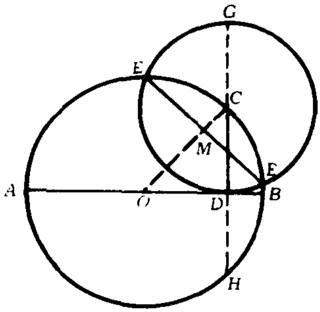
本题的解法路子较窄，初看起来似乎难以考虑，但若细细分析，它的主要条件是圆内相交两弦，因此很自然地想到相交弦定理的应用。如果牢记圆幂定理中常数 $|oP^2 - R^2|$，则能简捷地得到下列两个关系式：

在⊙C内考虑有：

$EM \cdot MF = R_C^2 - MC^2 = CD^2 - MC^2$；

在⊙O内考虑有：

$EM \cdot MF = R_O^2 - MO^2 = OC^2 -$



MO^2。

由这两式可得到：

$OC^2-MO^2=CD^2-MC^2$即

$MC^2=MO^2-(OC^2-CD^2)=MO^2-OD^2=MD^2$

$\therefore MC=MD$

以上解法在思考方法上比较直截了当。显然本题直接应用相交弦定理的比例式，也可以同样方便地得到证明，但必须把DC延长交⊙C于G点，CD延长交⊙O于H，在⊙C内有$ME\cdot MF=MD(MC+CD)$，在⊙O内则有$ME\cdot MF=MC\cdot(MD+CD)$，因此有

$MD\cdot MC+MD\cdot CD=MC\cdot MD+MC\cdot CD$，

$\therefore MC=MD$

为了熟记圆幂定理中的常数$|oP^2-R^2|$，必须知道它的来龙去脉，在无限多条过某一点的弦或割线中，要抓住其中特殊位置下的一条（即过圆心的那条），则就很快得出两线段之积等于R^2-oP^2（相交弦时）或oP^2-R^2（切割线时）。

（上接第9页）

$(x+y-9)(x+y+1)=0$

即　$x+y-9=0$

或　$x+y+1=0$

以下步骤省略。

由以上各例可见，只要我们在解题时注意分析观察，灵活、巧妙地运用乘法公式，就可以使许多复杂的问题简单化，棘手的难题迎刃而解。

初二代数解题的一把“钥匙”

天津南开中学　胡　珊

同学们经过初一阶段的学习，初步掌握了乘法公式，知道了在遇到一些特殊形式的多项式乘法时，用乘法公式计算比较简便，在进行某些因式分解时，用乘法公式可以顺利解决。然而，有的同学缺乏对乘法公式的灵活运用，在学习新知识时，往往忽略了与旧知识的联系。于是，在解题时常常“卡壳”。

本文仅以初二代数中所涉及到的有关类型题为例，帮助同学们对乘法公式灵活、扩展运用的练习。

一、根式的化简

例1　化简$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$　$(1<a<2)$

解原式$=\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1}-\sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1}$

$=\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}$

$\because a<2$　则$a-1<1$

又$a>1$　$\therefore \sqrt{a-1}<1$

$\therefore \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}=\sqrt{a-1}+1-(1-\sqrt{a-1})=2\sqrt{a-1}$

练习：化简$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$

二、分析一元二次方程根的判别式的情况

例2　证明：k为任何值时，关于x的方程$x^2-2kx+2k^2+6k+11=0$均无实数根。

证明：$\Delta=4k^2-4(2k^2+6k+11)$

$=-4(k^2+6k+11)$

证到这一步，便匆忙下结论：$\because -4(k^2+6k+11) < 0$，$\therefore$原方程无实数根，显然是草率了。可是，若细致地分析起来，$k^2 \geq 0$，$11 > 0$，$6k$如何呢？分析不下去了。在这里只要用一下乘法公式，便顺利解决。

$-4(k^2+6k+11) =$
$-4[(k+3)^2+2]$

$\because (k+3)^2 \geq 0$，

$\therefore (k+3)^2+2 > 0$

$\therefore -4[(k+3)^2+2] < 0$，此题得证。

三、解有关根与系数的关系一类题

已知一方程，不论是在不解方程的限制下，求此方程两根之间的关系式的值，如求方程两根的平方和、倒数和等等，还是求满足一定条件的新方程，都离不开乘法公式的变形应用，在此不再举例。

四、杂题类

例4 已知a、b、c是$\triangle ABC$的三边，且有$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$

求证 $\triangle ABC$是等边三角形

证明$\because (a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

配方得$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$

$\because$ a、b、c 均为实数，

$\therefore$其差平方非负数，

$\therefore$必有$a-b=b-c=c-a=0$

$\therefore a=b=c$

此题得证。

例5 x为何值时，代数式$x^2-64x+1986$有最小值？最小值是多少？

解：$x^2-64x+1986$
$=(x^2-2\times32x+32^2)+962$
$=(x-32)^2+962$

$\therefore$当$x=32$时，代数式$x^2-64x+1986$有最小值，最小值是962。

练习：在关于x的方程$\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}(m^2-m+1)=0$中，问m为何值时，方程两根之差的绝对值最小？最小值为何值？

五、解特殊二元二次方程组

例6 解方程组

$$\begin{cases} x^2+xy=8x+3 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2+xy=8y+6 & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解：(1)+(2)得

$x^2+y^2+2xy=8x+8y+9$

整理得

$(x+y)^2-8(x+y)-9=0$

（下转第7页）

初学不等式应注意的几种情况

福州三中　陈淑文

不等式的性质与等式的性质，不等式的同解原理与方程的同解原理，除在形式上有类同外，是有很大的差别，因不等式有方向问题，故不等式的问题比等式的问题要复杂。尤其是与零有关的变形问题，在解题中更应注意。

如由等式$a=b$成立，可以得出$ac=bc$，这里c可以是正数、负数或零。但由不等式$a>c$并不能得出$ac>bc$，而是有条件的。当$c>0$时，这个式子才成立；当$c<0$时，得出的则是$ac<bc$；而当$c=0$时，得出的结果却是$ac=bc$。

又如由等式$ac^2=bc^2$不能得出$a=b$，因为这里c^2可以取零值。而由不等式$ac^2>bc^2$则可以得出$a>b$，因为由已知式可知$c=0$是不可能，只能得出$c^2>0$，因此根据不等式性质二可得$a>b$。

例1　已知$x<y$，试比较$\frac{1}{y}$与$\frac{1}{x}$的大小。

分析：$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{x}$是由x，y分别都除以xy得到的。欲知它们的大小，关键在于xy的符号，注意到$xy\neq 0$，而xy的符号取决于x、y的符号。这样就不难得到答案。

解：当$x<y<0$或$0<x<y$时，$xy>0$。根据不

等式性质二得：$\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$。

当 $x<0<y$ 时，$xy<0$。根据不等式性质三得：$\frac{1}{y}>\frac{1}{x}$。

例 2　由 $x<1$ 能否得出 $x^3<x^2$？由 $x^3<x^2$ 能否得出 $x<1$？为什么？

在解这类问题时，要特别注意零的特殊性。

解：由 $x<1$ 不能得出 $x^3<x^2$。因为 $x=0$ 适合 $x<1$ 条件，而当 $x=0$ 时，$x^3<x^2$ 不成立。

而由 $x^3<x^2$ 可以得出 $x<1$。$\because x^3<x^2$，$\therefore x\neq 0$，故 $x^2>0$。因而可得 $x<1$。

例 3　x 为何值时 $\frac{|x-3|}{2x-9}$ 值为负？

分析：欲使 $\frac{|x-3|}{2x-9}$ 值为负，必须且只须 $|x-3|$ 与 $2x-9$ 异号。由此 $x-3\neq 0$，$|x-3|$ 为正，所以 $2x-9$ 为负。这里应注意到绝对值有等于零的可能。

解：依题意得　$x-3\neq 0$，且 $2x-9<0$。由此得 $x\neq 3$，且 $x<4\frac{1}{2}$。

$\therefore$ 当 $x<4\frac{1}{2}$ 且 $x\neq 3$ 时 $\frac{x-3}{2x-9}$ 值为负。

例 4　x 为何值时 $\frac{(x-3)^2}{5-2x}$ 为非负值？

解：依题意得 $\frac{(x-3)^2}{5-2x}\geqslant 0$

$\therefore \dfrac{(x-3)^2}{5-2x}=0$ 或 $\dfrac{(x-3)^2}{5-2x}>0$。

由 $\dfrac{(x-3)^2}{5-2x}=0$ 得 $x-3=0$ 且 $5-2x\neq 0$ 解得 $x=3$。

由 $\dfrac{(x-3)^2}{5-2x}>0$ 得 $x-3\neq 0$ 且 $5-2x>0$ 解得 $x<\dfrac{5}{2}$。

$\therefore$ 当 $x<\dfrac{5}{2}$ 或 $x=3$ 时 $\dfrac{(x-3)^2}{5-2x}$ 为非负值。

这里要注意把方程和不等式分别解，避免由 $\dfrac{(x-3)^2}{5-2x}\geqslant 0$ 得 $5-2x\geqslant 0$ 的错误。

例 5 解不等式 $\dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)^2}\geqslant 0$

解：$\dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)^2}=0$ 或 $\dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)^2}>0$

由 $\dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)^2}=0$ 得 $x^2(2x-1)=0$，且 $x-2\neq 0$，解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$。

由 $\dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)^2}>0$ 得 $x\neq 0$，$x-2\neq 0$，且 $2x-1>0$。由此得 $x>\dfrac{1}{2}$，且 $x\neq 2$。

故原不等式的解是 $x=0$ 或 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$，且 $x\neq 2$。

思考：x 为何值时 $\dfrac{(|x|-2)\cdot(x-1)^2}{x^2-6x+9}$ 值为非负值。在解此题中应注意些什么问题？

重视知识发生过程的学习
——谈从指数到对数的演变

北京八中　潘波涛

初中数学中指数到对数的演变过程，恰恰反映了数学思维的发生，发展的过程，是一个很生动的数学思维的“历史课”，而掌握了这个过程无疑对学生的学习是十分有益的。因为它符合人类认识的过程，也是自然科学发生，发展的典型。

指数概念在初中有两次扩展：第一次扩展是由连乘意义下的$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}$（a为任意实数，n为自然数），得到三个算律：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$，但当$a^m\div a^n=a^{m-n}$时，必须限定$a\neq0$，$m>n$。由此自然发展到$m=n$和$m<n$的情况，一方面是仍然可以除，另一方面是法则是否可用？于是规定了$m=n$时$a^0=1$（$a\neq0$），$m<n$时$a^m\div a^n=a^{m-n}=a^{-p}=\frac{1}{a^p}$（$a\neq0$，$p=n-m$），这样指数已经由自然数扩展成了整数，而底数a限定为$a\neq0$。这时a^n的连乘定义已经不再适用了，而三个算律却仍然成立。（严格说来，应逐条证明）

第二次扩展是把指数从整数扩展到分数，这是在初二