研究生
入学考试指导

数学分析

山东科学技术出版社

研究生入学考试指导

数 学 分 析

裘卓明　葛钟美　于秀源

山 东 科 学 技 术 出 版 社

一九八五年·济南

内容提要

该书按数学分析的主要内容，分为极限与连续、微分学、积分学、广义积分与含参变量积分、重积分与曲线曲面积分、级数六章。每章的概述部分简明扼要地叙述其主要定义、定理和公式；例题部分则是通过对典型习题（包括最近几年部分高等学校的研究生入学试题）的分析，帮助读者掌握解决问题的各种方法和技巧；习题部分则可帮助读者检验对理论和方法的掌握程度。

本书由裘卓明、葛钟美、于秀源三位同志分别编写有关章节，并由于秀源定稿。郭大钧教授审阅了全稿。

本书内容翔实，参考价值高，是一本报考硕士研究生用的很好的复习资料，对理工科大学、师范院校的学生和教师也是一本很好的教学参考书。

研究生入学考试指导

数学分析

裘卓明 葛钟美 于秀源

*

山东科学技术出版社出版

（济南市南郊宾馆西路中段）

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 19.5印张 2插页 418千字

1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷

印数：1—7,000

书号 13195·145 定价 4.10元

出版说明

近几年来，我国教育事业有了很大发展，报考研究生的人数大幅度增长，他们之中不但有全日制高等学校的学生，也有电视大学、业余大学在内的各类高校的学生，以及自学成才的青年。但目前适用于应试的参考书，在数量和种类上都远远不能满足考生的迫切愿望。为此，我们将出版一套包括数学、物理、化学、外语等各学科的《研究生入学考试指导》丛书。这套丛书概括了相应课程的主要内容，使之系统化，既可供报考理工科硕士研究生人员在复习时参考，又可帮助理工科大学生提高分析问题的能力，熟练解决问题的技巧，检验对理论和方法的掌握程度。

参加这套丛书编写及指导工作的都是多年从事高等学校教学和科学研究的教授、讲师，他们都具有指导学生报考研究生的丰富经验，有的本身正在辛勤地培养硕士或博士研究生。借此机会，向他们所给予的有力合作与热情支持，表示诚挚的感谢。

1985年5月

目　　录

第一章　极限与连续

概　　述

一、极限的定义、运算及基本性质

1.定义

（1）设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是实数，如果对于任意给定的正数 ε，都有相应的一个自然数 N，使得不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

对于一切$n>N$成立，则称$\{x_n\}$是收敛数列，它收敛于 a，或称$\{x_n\}$以 a 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

不收敛的数列称为发散数列。

（2）设 x_0 是有限数，$f(x)$ 在由

$$0<|x-x_0|<\eta \qquad (\eta>0)$$

规定的区域上有定义，A 是实数．如果对于任意给定的正数 ε，都有相应的一个正数 δ，使得

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

对于一切满足

$$0<|x-x_0|<\delta$$

的x成立，则称当 x 趋于 x_0（记为 $x\to x_0$）时 $f(x)$以A为极限，或称 $f(x)$收敛于A，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

（3）设 x_0 是常数，$f(x)$ 在由

$$x \geqslant x_0 \text{（或 } x \leqslant x_0\text{）}$$

规定的区域上有定义，A 是实数．如果对于任意给定的正数 ε，都有相应的一个 $M>0$，使得

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

对于一切满足

$$x>M \text{（或 } x<-M\text{）}$$

的 x 成立，则称当 x 趋于 $+\infty$（或 $-\infty$）时，$f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{（或} \lim_{x \to -\infty} f(x) = A\text{）}.$$

（4）如果 $\{x_n\}$（或 $f(x)$）以零为极限，则称 x_n（或 $f(x)$）当 $n \to \infty$（或 $x \to x_0$）时是无穷小量．

如果 $\frac{1}{x_n}$（或 $\frac{1}{f(x)}$）当 $n \to \infty$（或 $x \to x_0$）时是无穷小量，则称 x_n（或 $f(x)$）当 $n \to \infty$（或 $x \to x_0$）时是无穷大量．

由上述定义，可知 x_n 不以 a 为极限的充要条件是：存在正数 ε_0，以及无穷多个不相同的自然数 n_1，n_2，n_3，…，使得

$$|x_{n_i}-a| \geqslant \varepsilon_0, \quad i=1, 2, 3, \cdots.$$

类似地，可以给出"当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 不以 A 为极限"的充要条件．

关于上极限、下极限、左极限以及右极限的定义，可类似于上述定义而给出．

2．基本性质与运算

（1）若

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a,\ \lim_{n\to\infty} y_n=b,$$

且 $a>b$，则必有一个自然数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$。

由此可知，如果有自然数 N，使得对于 $n>N$，有 $x_n>y_n$，那么当极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在时，必有

$$\lim_{n\to\infty} x_n\geqslant\lim_{n\to\infty} y_n.$$

特别地，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，而且当 $n>N$ 时，$x_n\geqslant b$，则必 $a\geqslant b$。

（2）若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它的极限是唯一的。

（3）若有正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,$$

则当
$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} z_n=a$$

时，必有
$$\lim_{n\to\infty} y_n=a;$$

特别地，对于数列 $\{x_n\}$，若有正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时有 $|x_n|\leqslant y_n$，则当

$$\lim_{n\to\infty} y_n=0$$

时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

例如当 $0<\alpha<1$，

$$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)<n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)$$

$$=\frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0,$$

可知

$$\lim_{n\to\infty}((n+1)^a-n^a)=0.$$

（4）任何收敛的数列必是有界数列。

有界数列不一定是收敛的。例如，数列$1+(-1)^{n-1}$有界而不收敛。

（5）若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都收敛，则

$$\{x_n+y_n\},\quad\{x_n-y_n\},\quad\{x_ny_n\}$$

也都收敛，而且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n.$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$，$y_n\neq 0$，那么$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$亦收敛，而且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

例如欲求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n+\frac{3n+1}{3n-1}\right).$$

由

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|<\frac{1}{n}$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n-1}=1,$$

从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n}{n}+\frac{3n+1}{3n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n-1}=1.$$

对于函数的极限，有类似于数列极限的基本性质和运算结果。

二、几个重要定理

1．（*Cauchy* 收敛准则）数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：对于任给的 $\varepsilon>0$，相应地存在自然数N，使得

$$|x_n-x_m|<\varepsilon$$

对一切 $n>N$，$m>N$ 都成立。

Cauchy 准则的意义，不仅在于判断数列的收敛性，也可判断发散性，且被广泛应用．例如，取

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

则对所有的自然数 n，由

$$x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

可知$\{x_n\}$是发散的。

2．单调有界的数列必是收敛的．由此，可以判定极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是存在的。

3．（区间套定理）设有一串闭区间$[a_1, b_1]$, $[a_2,b_2]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$, …满足条件

1° $[a_1, b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$;

则诸〔a_n，b_n〕（$n=1$，2，…）必有唯一公共点 c，而且

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=c.$$

4.（有限覆盖定理）设对于〔a,b〕中的任一点 x，都有一个开区间 I，使得 $x\in I$，以 E 表示所有这种 I 的全体，那么，必可从 E 中选出有限个开区间，它们覆盖区间〔a,b〕。即是：区间〔a,b〕中的任一点 x，必定属于这有限个开区间中的某一个。

5.（致密性定理）设数列$\{x_n\}$是有界的，则必有无穷多个自然数

$$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots,$$

使得数列$\{x_{n_k}\}$是收敛的。

6. 任何非空的实数集必有上确界和下确界。

以上六个定理是等价的。

7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的充要条件是：对于 $\{x_n\}$ 的任一子数列 $\{x_{nk}\}$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk}=a$。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：对于任意的一个数列$\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$（$n=1$，2，…），$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

三、几个重要极限与定理

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\backsim\log n,\quad x^k=o(e^{Ax}).\ (x\to\infty,$$

$A>0$），

$$x^A = o\left(\left|\frac{1}{\log x}\right|^k\right) \quad (x \to 0^+,\quad A > 0).$$

2．（*stolz*）设$\{b_n\}$是单调数列，若

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$存在有限（或$+\infty$），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$也存在有限（或$+\infty$）．

3．（*L'Hospitale*）

（1）若$f'(x)$与$g'(x)$在$(a,\ a+\delta)$上存在$(\delta>0)$，且$g'(x)\neq 0$，则当

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to a+0} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{（}A\text{可以是}\infty\text{）}$$

时，必有 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A.$

（2）若$f'(x)$与$g'(x)$在$(a,\ a+\delta)$上存在$(\delta>0)$，且$g'(x)\neq 0$，则当

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty,\qquad \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

（A可以是∞）时，必有

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

若将$x\to a+0$改为$x\to\infty$，假设条件作相应变化，则结

论仍成立。

关于求极限的问题，大都可以通过阶的估计给予解决，读者可参见本章习题及本书附录。

四、连续函数的基本性质

1. 设 $f(x)$ 在区间 $|x-x_0|<\eta$（$\eta>0$）中有定义，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 连续。如果 $f(x)$在区间 I 中的每一个点都连续，则称 $f(x)$在 I 上连续。

如果

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \quad (\text{或}\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)),$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 是右连续（或左连续）。

$f(x)$在 $x=x_0$ 连续的充分必要条件，是它在$x=x_0$同时是左连续和右连续的。

2. 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 不连续，则称它在 $x=x_0$ 是间断的，$x=x_0$ 是它的间断点。间断点分为三类：

(i) 可去间断点 x_0：

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq f(x_0).$$

例如

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases} \qquad x_0=0.$$

(ii) 第一类间断点：左右极限均存在，但

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

例如 $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $x_0=0$。

(iii) 第二类间断点：其它间断点。

例如 $$f(x)=\sin\frac{1}{x},\ x_0=0.$$

3．若$f(x)$与$g(x)$都在$x=x_0$连续，则$f(x)\pm g(x)$与$f(x)g(x)$也在$x=x_0$连续；此外，若$g(x_0)\neq 0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$在$x=x_0$连续。

4．设$f(x)$在$[a,b]$上严格增加（减少），并且连续，$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则在$[\alpha,\beta]$上存在$y=f(x)$的反函数，它也是单调增加（减少）并且连续的。

5．设$z=f(y)$在$y=y_0$连续，$y=g(x)$在$x=x_0$连续，$g(x_0)=y_0$，则$z=f(g(x))$在$x=x_0$连续。

由上面三个性质以及基本初等函数连续性推知，初等函数在其定义域上是连续的．

例如讨论函数$y=x\left[\frac{1}{x}\right]$在半轴$x>0$上的不连续点．

显然

$$y=x\left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases}0, & x>1\\(n-1)x, & \frac{1}{n}<x\leqslant\frac{1}{n-1}\ (n\geqslant 2).\end{cases}$$

对于任意固定的n（$n\geqslant 2$），有

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}(n-1)x=1-\frac{1}{n},$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}-0} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{n}-0} nx=1;$$

而在 $x=1$，有

$$\lim_{x\to 1+0} x\left[\frac{1}{x}\right]=0, \qquad \lim_{x\to 1-0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1,$$

所以，$x=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$，都是第一类间断点.

五、闭区间上连续函数的性质

1. 若 $f(x)$在 $[a, b]$上连续，则在$[a,b]$上有界，而且它有最大值和最小值，即存在 x_1、$x_2\in[a,b]$，使得对于任何的 $x\in[a,b]$，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2).$$

若将闭区间$[a, b]$易为开区间，则此结论不一定成立，例如，$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0, 1)$上连续，但它在 $(0,1)$ 上是无界的，而且不存在最大值和最小值.

2. （介值定理）设 $f(x)$是$[a, b]$上的连续函数，x_1与x_2是$[a, b]$中的任意两点，$f(x_1)<f(x_2)$，那么，对于任意的数 c，$f(x_1)<c<f(x_2)$，在 x_1与x_2之间必有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=c.$$

介值定理常用以确定方程根的存在性。例如设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b,$$

则在 $[a, b]$中必有一点 ξ，使得

$$(\xi f)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)).$$

不妨设至少有两个点 x_i，x_j，使得

$$f(x_i)\neq f(x_j),$$

以M与 m 分别表示 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值，且设 $f(x')=m$，$f(x'')=M$，显然

$$m<\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))<M.$$

因此由介值定理，必有点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

六、一致连续性

1．如果对于任给的正数 ε，都有与之相应的正数 δ，使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

对一切满足

$$|x_1-x_2|<\delta,\ x_1\in \mathrm{I},\ x_2\in \mathrm{I}$$

的x_1，x_2成立，则称 $f(x)$在 I 上是一致连续的．

显然，$f(x)$在 I 不是一致连续的充要条件是：存在正数 ε_0以及两个不同的点列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，$x_n\in \mathrm{I}$，$y_n\in \mathrm{I}$，$(n=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0,\ |f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0\quad(n\geqslant1)$$

2．(Cantor) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则它在$[a,b]$上一致连续．

若将$[a,b]$改为开区间(a,b)，则此结论不一定成立．

例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续．

又如 $f(x)=x\log x$ 在$(0,1)$上一致连续，在$(1,\infty)$上不一致连续。

由于

$$\lim_{x\to 0} x\log x=0=\lim_{x\to 1} x\log x$$

所以，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当

$$|x|\leqslant\delta_1 \quad 或|x-1|\leqslant\delta_1$$

时，均有

$$|x\log x|<\frac{\varepsilon}{4},$$

因此，对于任意的 $x_1,\ x_2\in(0,\ \delta_1]$或$[1-\delta_1,\ 1)$，皆有

$$|x_2\log x_2-x_1\log x_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另外，$x\log x$ 在$[\delta_1,\ 1-\delta_1]$上是连续的，从而是一致连续的，因此，存在 $\delta_2>0$，使得当 $x_1,\ x_2\in[\delta_1,\ 1-\delta_1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_2$时，总有

$$|x_2\log x_2-x_1\log x_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$，则无论 $x_1,\ x_2$属于三个区间中的哪一个，只要$|x_2-x_1|<\delta$，总有

$$|x_2\log x_2-x_1\log x_1|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这证明了 $x\log x$在 $(0,1)$上的一致连续性。

若取 $\quad x_n=n,\ y_n=n+\dfrac{1}{\log n}(n=2,\ 3,\ \cdots)$。

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0,$$