陈文灯 黄先开 主编

聚焦考研
Focus NETM

文登培训学校考研系列数学指定用书·第六版

数学

题型集粹与练习题集

http://www.cooo.com.cn

2004版

一本好的数学辅导书，应该具备三个要素：一是看它是否以题型为思路，而不是搞题海战术；二是该书是否具前瞻性，能否适应现在和今后的考试；三是该书是否严格遵循大纲，难度与考试试卷相符或略微偏高。

——陈文灯

经济类

世界图书出版公司

陈文灯 黄先开 主 编
曹显兵 施明存 副主编

聚焦考研

2004版

文登培训学校考研系列数学指定用书·第六版

数学

题型集粹与练习题集

北京聚骄文化发展有限公司 策划

经济类

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目（CIP）数据

数学题型集粹与练习题集．经济类／陈文灯，黄先开编著．－6版．－北京：世界图书出版公司北京公司，2003

ISBN 7－5062－5210－4

Ⅰ．数…　Ⅱ．①陈…　②黄…　Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－习题　Ⅳ．013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第014884号

数学题型集粹与练习题集（经济类）

（2004版文登培训学校考研系列　数学指定用书）

主　　编：陈文灯　黄先开
副 主 编：曹显兵　施明存
责任编辑：世　华
封面设计：千　野

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
（北京朝内大街137号　邮编 100010　电话 62116800）
销　　售：各地新华书店
印　　刷：北京林业印刷厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：28.25
字　　数：536千字
版　　次：2003年2月第6版　2003年3月第2次印刷

ISBN 7－5062－5210－4/O·335　　**定价：38.80元**

服务热线　010—62198078

律师声明

敬启者：

我们，中华人民共和国执业律师，受当事人北京聚骄文化发展有限公司（以下简称为“我方当事人”）委托，全权处理我方当事人代理出版事务及发行聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集（经济类）》一书工作中的著作权事宜。现依据中华人民共和国法律，专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集（经济类）》一书的出版事务代理者，该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书，保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定，我方当事人享有对该作品的独家使用权。同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集（经济类）》一书上使用其名字，即其署名权也由我方当事人独家使用。

在此，我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明：任何单位、个人未经我方当事人书面授权，擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集（经济类）》一书，或者未经我方当事人书面同意，擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名（无论是否经过作者授权），这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律，将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此，侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉，并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现，我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施，追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所
肖　群　律师
张景伟　律师
2003 年 1 月 16 日

作者声明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用，其他出版单位不得以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。

陈文灯

2003 年 1 月 16 日

第六版修订说明

"卧薪尝胆汗泪流，破釜沉舟志未酬；安得妙笔抒锦绣，大师文灯点春秋。"一位署名新浪网友的读者通过网址给我发来这封邮件，令我惴惴多日。对于网友的溢美与厚望，我实在受之有愧，惶恐难当。不过，卧薪尝胆与破釜沉舟，想必能激起广大考生的共鸣。因为它比较真实、比较准确地反映了考生的艰辛之旅与求索之志。考研不易啊！这些年来，我在讲考研班和写考研书上都做了些工作，在全国各地交了很多忘年的学生朋友，他们对于我的授课方式和拙著提出了很多很好的建议，这对我丰富授课内容和完善拙著起了十分重要的作用。我正是带着这种惟恐误人、惟恐负人的责任与沉重，穷尽心智，开始了2004版《数学题型集粹与练习题集》等书的修订工作。

我和黄先开主编的《数学题型集粹与练习题集》(经济类)是《数学复习指南》(经济类)的续篇。该书自第一版问世至今已六个年头了，今年根据刚刚考过的试题和《数学复习大纲》的基本要求，结合最近三年命题的特点及我在去年评阅试卷和在文登学校考研班上的教学实践经验进行了修订，对文字错误进行了地毯式的校对。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书，将会进一步拓宽思路，掌握各类题型的解题方法和技巧，大大提高做题的准确性和速度。

本书有以下特点：

(1)重点突出。本书针对"考纲"要求重点掌握的概念、公式、定理，通过题型的形式予以强化，同时，指出解题的方法和技巧，尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题，按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强，覆盖面大。本书不是一般性的题解书，不搞题海战术，而是以题型为纲，通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题，总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题系作者多年的教学心得、并经几个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以将各知识点串在一起，而且可以拓展思路，遇到"从未见到"的题时，可以从容应对。

另外，本书还编写了模拟试题数学三(十套)、数学四(十套)。这是演练题而不是考前的压题。读者复习完本书后，严格掌握在3小时内做完试卷，以此了解自己的水平。

书后附录还给出2001年、2002年以及最新的2003年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学三、数学四试题及参考答案。

成书仓促，定有不当及错误之处，恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

陈文灯 陈文灯印

2003.2

目录

第二篇 线性代数

注:带 * 章节,数四考生不必看。

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续

§1　函　数

一． 有关函数概念的题型

题型 Ⅰ　判别函数的等价性

【解题提示】 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则为不同函数.

【例 1.1】 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则与 $f(x)$ 等价的函数是（　）.

(A) $y=\int_0^x(x^2-2x)\mathrm{d}x$.　　(B) $y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t$.

(C) $y=\int f'(x)\mathrm{d}x$.　　(D) $y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$.

【解】 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=l$，则 $f(x)=x^2+2xl$，

两边取 $x\to1$ 时的极限，得 $l=1+2l \Rightarrow l=-1 \Rightarrow f(x)=x^2-2x$.

(A) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

(B) $y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t=x^2-2x$.

(C) $y=f(x)+C=x^2-2x+C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D) $y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$，定义域 $x<0$ 或 $x>2$，与 $f(x)$ 定义域不同，故(B)入选，实际做题时不必像以上那样处理，求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型 Ⅱ　利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

【解题提示】 一种是所谓"凑法"—— 将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式，然后用"无关特性"即可得出 $f(x)$ 的表达式. 另一种方法是先作变量替换再用"无关特性"，然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式. 多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】 求解以下各小题中的 $f(x)$ 表达式：

(1)　$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2,\quad |x|>1.$

(2)　$f(\sin^2x)=\cos2x+\tan^2x,\quad 0<x<1.$

【解】 (1)$f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}+\sin\left[(x+\frac{1}{x})^2-2\right]+2$,

故　$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sin(x^2-2)+2$.

(2)$f(\sin^2x)=1-2\sin^2x+\frac{1}{\cos^2x}-1=-2\sin^2x+\frac{1}{1-\sin^2x}$,

故　$f(x)=-2x+\frac{1}{1-x}$, $0<x<1$.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 满足方程:$af(x)+bf(-\frac{1}{x})=\sin x$,其中 $|a|\neq|b|$,求 $f(x)$.

【解】 令 $t=-\frac{1}{x}$,则 $x=-\frac{1}{t}$,于是原方程变为　$bf(t)+af(-\frac{1}{t})=-\sin\frac{1}{t}$,

由"无关特性"得　$bf(x)+af(-\frac{1}{x})=-\sin\frac{1}{x}$.

解联立方程组 $\begin{cases}af(x)+bf(-\frac{1}{x})=\sin x\\ bf(x)+af(-\frac{1}{x})=-\sin\frac{1}{x}\end{cases}$,

得　$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(a\sin x+b\sin\frac{1}{x})$.

【例 1.4】 设 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2+\cos(xy)$,求 $f(x,y)$.

【解】 令 $u=x+y, v=\frac{y}{x}\Rightarrow x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$,则

$$f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2},$$

故　$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}+\cos\frac{x^2y}{(1+y)^2}$　$(y\neq-1)$.

二． 函数的性质

题型 Ⅲ　函数奇偶性的判别

【解题提示】 判别函数奇偶性的方法:

(1) 主要依据奇偶性的定义.有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

(2)$f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

(1)　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2)　$F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$,其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

(3) $F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)f(x)$，其中 $a>0,a\neq 1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任何 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

【解】 (1) $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=-u}\int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)\xlongequal[偶函数]{f(x)为}-\int_0^{x}f(u)\mathrm{d}u$，

$\because$ $F(x)+F(-x)=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t=0$，

$\therefore$ $F(x)$ 为奇函数.

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，　①

$F(-x)=f(-x)+\int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，　②

$\because$ $f(x)$ 为奇函数　$\therefore f(x)+f(-x)=0$，　③

又　$\because$ $\int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u\xlongequal{令 u=-v}\int_0^{x}\left[\int_0^{-v}f(t)\mathrm{d}t\right](-\mathrm{d}v)=-\int_0^{x}\left[\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，　④

由 ①，②，③，④ 得

$$F(x)+F(-x)=\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\int_0^{x}\left[\int_{-u}^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=0,$$

故　$F(x)$ 为奇函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，

$\because$ $g(x)+g(-x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=0$，

$\therefore$ $g(x)$ 为奇函数.

又　$\because$ $f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$，

又　显然有 $0=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$，

$\therefore$ $f(x)$ 为奇函数.

故　$F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 Ⅳ　求解给定函数的周期或周期性证明

【解题提示】 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x)=f(ax)$，由于

$$F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)\xlongequal[f(x)的周期]{\because T 是}f(ax)=F(x),$$

故　$\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a$，$x=b$ 均对称 $(a\neq b)$，求证：$y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，

于是，$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]$

$=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$，

故 $f(x)$ 是周期函数,其周期 $T=2(b-a)$.

题型 V 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

【解题提示】 若没有言明函数 $f(x)$ 可导,则用单调性定义判别;若言明函数 $f(x)$ 可导,则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,证明 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内单调增加.

【证】 $F'(x)=-\dfrac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{f(x)}{x-a}=-\int_a^x\dfrac{f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t+\int_a^x\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t$

$$=\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t,$$

$\because\ (x-a)^2>0\quad f(x)$ 单调上升,当 $x>t$ 时,$f(x)-f(t)\geqslant 0$,

$\therefore\ F'(x)\geqslant 0$,故 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

题型 VI 函数有界性的判别

【解题提示】 证明或判别函数有界性的思路:

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x\to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$($l$ 为有限数),试证:$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【证】 $\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, $\therefore$ 对于取 $\varepsilon=\dfrac{|l|}{2}$, $\exists X>0$,

当 $x>X$ 时,恒有 $|f(x)-l|<\dfrac{|l|}{2}$,

又 $|f(x)-l|>|f(x)|-|l|$ 所以 $|f(x)|-|l|<\dfrac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)|<\dfrac{3}{2}|l|$.

$\because f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续,由闭区间上连续函数有界性,可知 $\exists S$,使 $|f(x)|<S,x\in[a,X]$.

取 $M=\max\left\{S,\dfrac{3}{2}|l|\right\}$,则对 $\forall x\in[a,+\infty)$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$,

即函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【例 1.10】 试证 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【证】 令 $g(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,

$\because\ g(-x)=\int_0^{-x}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x -u\mathrm{e}^{(-u)^2}(-\mathrm{d}u)=\int_0^x u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$,

$\therefore\ g(x)$ 为偶函数.因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}g(x)$ 也为偶函数,所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上

有界即可.

$$\because \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 对于取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, $\exists X>0$, 当 $x\in[X,+\infty)$ 时, 有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\quad 即\quad 0<f(x)<1,$$

又 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续, 于是, $\exists l>0$, 使对 $\forall x\in[0,X]$, 恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant l$, 取 $M=\max\{1,l\}$, 则 $\forall x\in[0,+\infty)$, 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

三． 复合函数

【解题提示】 将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法:

(1) 代入法(适用于初等函数的复合);

(2) 分析法(适用于初等函数与分段函数的复合, 或两分段函数的复合);

(3) 图示法(适用于两分段函数的复合).

【例 1.11】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【解】 $$f[f(x)]=\frac{1}{1-f^2(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n次}$, 若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

【解】 $$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

比较以上两式可知 $\quad f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (由数学归纳法可证.)

于是 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}=\frac{x}{|x|}\ (x\neq 0).$$

【例 1.13】 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{\varphi(x)} & \varphi(x)<1\\ \varphi(x) & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}.$$

(ⅰ)　当 $\varphi(x) < 1$ 时,

$x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1$,即 $\begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$,

$x \geqslant 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1$,即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant x < \sqrt{2}$;

(ⅱ)　当 $\varphi(x) \geqslant 1$ 时,

$x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geqslant 1$,即 $\begin{cases} x < 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leqslant x < 0$,

$x \geqslant 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geqslant 1$,即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \sqrt{2}$;

综上所述,有　$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x + 2 & -1 \leqslant x < 0 \\ e^{x^2-1} & 0 \leqslant x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$.

【例 1.14】　设 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + |x|), \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$,求 $f[\varphi(x)]$.

【解】　图示法的解题程序:

(1) 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图象;

(2) 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xou 坐标面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线);

(3) 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间;

(4) 将(3)所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|], \quad (*)$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像,图 1.1 所示,以及 $f(u) = \dfrac{1}{2}(u + |u|)$ 的分界点 $u = 0$　(xOu 平面上的 x 轴)

当 $x < 0$ 时　$u = x, (u < 0)$

当 $x \geqslant 0$ 时　$u = x^2, (u \geqslant 0)$

将以上所得结果代入$(*)$式,得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$.

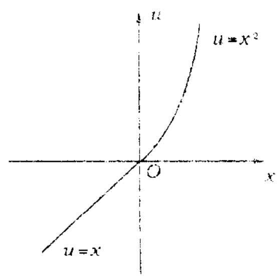

图 1.1

§2　极　限

一.　数列的极限

题型Ⅰ　已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

【解题提示】　或者利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序:① 判断极限的存在性

$\left|\begin{array}{l}\text{单调性}\\\text{有界性}\end{array}\right.$，方法可用数学归纳法或不等式的放缩法；② 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，然后通过解关于 l 的方程，求得 l 的值，从而得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$）. 或者利用数列极限的定义求解（先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，然后在通项的两边取极限得出 l 的数值，再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n-l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量）.

【例 1.15】 设 $x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l=2+\frac{1}{l}\ \Rightarrow\ l^2-2l-1=0\ \Rightarrow\ l=1\pm\sqrt{2},$$

$\because$ 由题设可知 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}>2$ $\therefore$ $l=1+\sqrt{2}$.

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：

$$|x_n-l|=\left|(2+\frac{1}{x_{n-1}})-(2+\frac{1}{l})\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{l}\right|=\frac{|x_{n-1}-l|}{lx_{n-1}}(\because x_{n-1}=2+\frac{1}{x_{n-2}}>2,$$

$$l=2+\frac{1}{l}>2)<\frac{|x_{n-1}-l|}{4}<\frac{|x_{n-2}-l|}{4}\Big/4=\frac{|x_{n-2}-l|}{4^2}<\frac{|x_{n-3}-l|}{4^3}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{4^{n-1}}$$

$$=\frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}}=\frac{|1-\sqrt{2}|}{4^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}},$$

$$\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}=0\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}(x_n-l)=0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}+1.$$

【例 1.16】 设 $x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限，

$\Rightarrow l=1+\dfrac{l}{1+l}\Rightarrow l^2-l-1=0\Rightarrow l=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，由题设可知 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：

$$|x_n-l|=\left|\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)-\left(1+\frac{l}{1+l}\right)\right|$$

$$=\frac{|x_{n-1}-l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|}<\frac{|x_{n-1}-l|}{2(1+l)}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{2^{n-1}(1+l)}=\frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)}=\frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}$$

$$\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}=0\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}(x_n-l)=0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

【另解】 由题设可知 $x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$

$x_2-x_1=(1+\dfrac{x_1}{1+x_1})-1=\dfrac{x_1}{1+x_1}>0$. 于是，$x_2>x_1$.

设 $x_n > x_{n-1}$，

则 $x_{n+1} - x_n = (1 + \frac{x_n}{x_n + 1}) - (1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}) = \frac{x_n}{1 + x_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$

$$= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} > 0,$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

$\because x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}(\because x_{n-1} > 0) < 2 \quad \therefore \{x_n\}$ 有界.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.设其为 l，于是

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}})$，即 $l = 1 + \frac{l}{1 + l} \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，由题设可知 l 非负.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

【例 1.17】 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$，其中 $a > 0, x_0 > 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【证】 $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$，$\therefore \{x_n\}$ 有界.

又 $\because \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) \leqslant \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}) = 1$，$\therefore \{x_n\}$ 单减，

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在， 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$， 则由

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$，可得 $l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l}) \Rightarrow l = \sqrt{a}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

注：单调数列的极限既可用极限定义法，又可用单调有界数列必有极限的定理去求解.若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 II 求解 $n \to \infty$ 时，n 项和的极限

【解题提示】 方法有：

(1) 特殊级数求和法.

(2) 利用幂级数求和法.

(3) 利用定积分定义求极限.

(4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$，剩余的可用一个通式表示，则用定积分定义求解数列的极限；若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$，而剩余的不能用一个通式表示，但其各项是按递增或递减排列的，则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}\right)$