

陈文灯 黄先开 主编



文登培训学校考研系列数学指定用书·第六版

数 学

题型集粹与练习题集

<http://www.cooo.com.cn>

2004 版

一本好的数学辅导书，应该具备三个要素：一是看它是否以题型为思路，而不是搞题海战术；二是该书是否具有前瞻性，能否适应现在和今后的考试；三是该书是否严格遵循大纲，难度与考试试卷相符或略微偏高。

——陈文灯



W 兴 界 图 书 出 版 公 司

陈文灯 黄先开 主 编
曹显兵 施明存 副主编



2004 版

文登培训学校考研系列数学指定用书·第六版

数 学

题型集粹与练习题集

北京聚骄文化发展有限公司 策划



世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目 (CIP) 数据

数学题型集粹与练习题集. 经济类 / 陈文灯, 黄先开编著. - 6 版. - 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2003

ISBN 7-5062-5210-4

I. 数... II. ①陈... ②黄... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 014884 号

数学题型集粹与练习题集 (经济类)

(2004 版文登培训学校考研系列 数学指定用书)

主 编: 陈文灯 黄先开

副 主 编: 曹显兵 施明存

责任编辑: 世 华

封面设计: 干 野

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 邮编 100010 电话 62116800)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京林业印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 28.25

字 数: 536 千字

版 次: 2003 年 2 月第 6 版 2003 年 3 月第 2 次印刷

ISBN 7-5062-5210-4/O·335

定价: 38.80 元

服务热线 010-62198078

律 师 声 明

敬启者：

我们，中华人民共和国执业律师，受当事人北京聚骄文化发展有限公司(以下简称为“我方当事人”)委托，全权处理我方当事人代理出版事务及发行聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集(经济类)》一书工作中的著作权事宜。现依据中华人民共和国法律，专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集(经济类)》一书的出版事务代理人，该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书，保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定，我方当事人享有对该作品的独家使用权。同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集(经济类)》一书上使用其名字，即其署名权也由我方当事人独家使用。

在此，我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明：任何单位、个人未经我方当事人书面授权，擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2004 版《数学题型集粹与练习题集(经济类)》一书，或者未经我方当事人书面同意，擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名(无论是否经过作者授权)，这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律，将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此，侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉，并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现，我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施，追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所

肖 群 律师

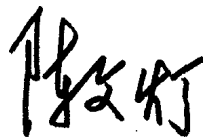
张景伟 律师

2003 年 1 月 16 日

作 者 声 明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用，其他出版单位不得以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。



2003 年 1 月 16 日

第六版修订说明

“卧薪尝胆汗泪流,破釜沉舟志未酬;安得妙笔抒锦绣,大师文灯点春秋。”一位署名新浪网友的读者通过网址给我发来这封邮件,令我惴惴多日。对于网友的溢美与厚望,我实在受之有愧,惶恐难当。不过,卧薪尝胆与破釜沉舟,想必能激起广大考生的共鸣。因为它比较真实、比较准确地反映了考生的艰辛之旅与求索之志。考研不易啊!这些年来,我在讲考研班和写考研书上都做了些工作,在全国各地交了很多忘年的学生朋友,他们对于我的授课方式和拙著提出了很多很好的建议,这对我丰富授课内容和完善拙著起了十分重要的作用。我正是带着这种惟恐误人、惟恐负人的责任与沉重,穷尽心智,开始了 2004 版《数学题型集粹与练习题集》等书的修订工作。

我和黄先开主编的《数学题型集粹与练习题集》(经济类)是《数学复习指南》(经济类)的续篇。该书自第一版问世至今已六个年头了,今年根据刚刚考过的试题和《数学复习大纲》的基本要求,结合最近三年命题的特点及我在去年评阅试卷和在文登学校考研班上的教学实践经验进行了修订,对文字错误进行了地毯式的校对。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书,将会进一步拓宽思路,掌握各类题型的解题方法和技巧,大大提高做题的准确性和速度。

本书有以下特点:

(1)重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,通过题型的形式予以强化,同时,指出解题的方法和技巧,尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题,按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强,覆盖面大。本书不是一般性的题解书,不搞题海战术,而是以题型为纲,通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题,总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题系作者多年的教学心得、并经几个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以各知识点串在一起,而且可以拓展思路,遇到“从未见到”的题时,可以从容应对。

另外,本书还编写了模拟试题数学三(十套)、数学四(十套)。这是演练题而不是考前的压题。读者复习完本书后,严格掌握在 3 小时内做完试卷,以此了解自己的水平。

书后附录还给出 2001 年、2002 年以及最新的 2003 年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学三、数学四试题及参考答案。

成书仓促,定有不当及错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

陈文灯



2003.2

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续	1
§1 函数	1
一. 有关函数概念的题型	1
题型 I 判别函数的等价性	1
题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示 无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式	1
二. 函数的性质	2
题型 III 函数奇偶性的判别	2
题型 IV 求解给定函数的周期或周期性证明	3
题型 V 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判 别	4
题型 VI 函数有界性的判别	4
三. 复合函数	5
§2 极限	6
一. 数列的极限	6
题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表达 式,求数列的极限	6
题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限	8
题型 III 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限	10
题型 IV 通项为积分形式的数列的极限	10
题型 V 利用子序列的极限与函数的极限 等值定理,求数列极限	11
二. 函数的极限	12
题型 I $\frac{0}{0}$ 型未定式的定值法	12
题型 II $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的定值法	14
题型 III $\infty - \infty$ 型未定式的定值法	15
题型 IV $0 \cdot \infty$ 型未定式的定值法	16
题型 V $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的定值法	16
三. 无穷小的阶及极限式中常数值确定	17
题型 I 确定无穷小的阶	17
题型 II 极限式中常数值的确定	18

§3 函数的连续性	20
题型 I 函数连续性的讨论(重点)	20
题型 II 确定函数的间断点及其类型	22
题型 III 分段函数式中参数的确定(重点)	23
第二章 导数与微分	26
题型 I 利用导数定义求极限	26
题型 II 利用导数定义求函数在某点处的导 数	27
题型 III 利用导数定义解函数方程	29
题型 IV 求复合函数的导数	30
题型 V 隐函数微分法	32
题型 VI 分段函数的导数的求法(重点)	32
题型 VII 高阶导数的求法	35
题型 VIII 杂 例	36
第三章 不定积分	38
题型 I 第一换元积分法(凑微分法)	38
题型 II 第二换元积分法	41
题型 III 分部积分法	43
题型 IV 杂 例	46
第四章 定积分	48
题型 I 利用定积分定义和性质求解的题型	48
题型 II 利用变上限积分的可微性求解的题 型	51
题型 III 被积函数含有绝对值符号的定积分 的计算	54
题型 IV 利用奇偶函数与周期函数的性质简 化定积分计算	55
题型 V 由三角有理式与其他初等函数通过 四则运算或复合而成的被积函数的 积分	55
题型 VI 被积函数中含“变上限积分”的积分	56
题型 VII 被积函数的分母为两项,而分子为 分母中其中一项的积分	57

题型Ⅷ	定积分等式的证明技巧	58
题型Ⅸ	定积分不等式的证明技巧	61
题型Ⅹ	定积分的杂例	65
题型Ⅺ	广义积分的计算	66
第五章	中值定理	69
题型Ⅰ	有关闭区间上连续函数的命题的证明	69
题型Ⅱ	欲证结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题的证法	70
题型Ⅲ	欲证结论为 $f^{(n)}(\xi)=k$ ($k \neq 0$), 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式的证法	71
题型Ⅳ	欲证结论为 (a, b) 内 $\exists \xi, \eta$ 满足某种关系式的命题的证法	74
第六章	一元微积分的应用	76
§1	导数的应用	76
题型Ⅰ	利用导数判别函数单调增减性的方法证明不等式	76
题型Ⅱ	求函数的极值与最值	77
题型Ⅲ	关于方程根的研究	80
杂例		83
题型Ⅳ	函数图形在区间 I 上凹凸性的判别	85
题型Ⅴ	渐近线类型:(1)水平渐近线;(2)铅直渐近线;(3)斜渐近线	85
§2	定积分的应用	86
题型Ⅰ	微元法及其应用	86
题型Ⅱ	平面图形面积的求法	87
题型Ⅲ	求立体体积	89
第七章	多元函数微分学	91
题型Ⅰ	抽象的复合函数的偏导数的求法	91
题型Ⅱ	多元微分学的有关证明题	93
题型Ⅲ	多元函数的极值	94
题型Ⅳ	杂例	95
第八章	重积分	98
题型Ⅰ	关于二重积分概念及其性质的命题	98
题型Ⅱ	更换积分次序	100
题型Ⅲ	选择积分次序	100
题型Ⅳ	选择坐标系	101
题型Ⅴ*	分段函数的积分	102
题型Ⅵ	涉及二次累次积分不等式的证明	104

题型Ⅶ	杂例	105
第九章*	无穷级数	107

题型Ⅰ	有关级数概念及性质的命题	107
题型Ⅱ	正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$) 的判敛	108
题型Ⅲ	任意项级数的判敛	109
题型Ⅳ	有关数项级数的命题的证明	110
题型Ⅴ	函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域, 幂级数求收敛域、收敛半径 R	112
题型Ⅵ	求函数的幂级数展开式	114
题型Ⅶ	级数求和	116
第十章*	常微分方程	120
题型Ⅰ	可求解的一阶微分方程	120
题型Ⅱ	可降阶的高阶微分方程的解法	124
题型Ⅲ	高阶常系数线性微分方程的解法	125

第二篇 线性代数

第一章	行列式	130
题型Ⅰ	利用行列式的定义计算行列式	130
题型Ⅱ	利用行列式的性质与行(列)展开定理计算行列式	131
题型Ⅲ	按行(列)展开公式求代数余子式	133
题型Ⅳ	利用多项式分解因式计算行列式	134
题型Ⅴ	抽象行列式的计算或证明	134
题型Ⅵ	利用特征值计算行列式	135
题型Ⅶ	n 阶行列式的计算	136
题型Ⅷ	利用克莱姆法则解方程组	139
第二章	矩阵	140
题型Ⅰ	计算逆矩阵	140
题型Ⅱ	已知含有矩阵 A 的等式, 讨论矩阵 A 的可逆性	142
题型Ⅲ	求解矩阵方程	143
题型Ⅳ	利用矩阵结合律简化计算	144
题型Ⅴ	利用伴随矩阵 A^* 进行计算或证明	146
第三章	向量	149
题型Ⅰ	判定向量组的线性相关性	149
题型Ⅱ	已知一组向量线性无关, 讨论另一组向量的线性相关性	152
题型Ⅲ	把一个向量用一组向量线性表示	154
题型Ⅳ	求向量组的极大无关组	157

题型 V	求向量组与矩阵的秩	160
题型 VI	有关矩阵秩的证法	164
第四章 线性方程组		166
题型 I	含有参数的线性方程组的求解	166
题型 II	利用方程组求向量的线性组合	170
题型 III	抽象线性方程组的求解	172
题型 IV	求两个方程组的公共解	172
题型 V	已知方程组的解,反求系数矩阵或 系数矩阵中的参数	174
题型 VI	有关基础解系的证明	176
第五章 特征值与特征向量		179
题型 I	数值型矩阵特征值、特征向量的计 算	179
题型 II	计算抽象矩阵的特征值	181
题型 III	求解特征值、特征向量的逆问题	184
题型 IV	矩阵相似与对角化的讨论	186
题型 V	特征值、特征向量与相似矩阵的应 用问题	191
第六章* 二次型		196
题型 I	化二次型为标准形	196
题型 II	已知二次型通过正交变换化为标 准形,反求二次型中的参数	198
题型 III	有关正定二次型(正定矩阵)命题的 证明	198

第三篇 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率	202
题型 I 利用古典概型与加法定理计算概 率	202
题型 II 利用条件概率与乘法公式计算概率	203
题型 III 利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公 式)计算概率	206
题型 IV 单项选择题	208
第二章 随机变量及其分布	209
题型 I 一维随机变量的分布函数及分布密 度	209
题型 II 二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及 其密度	214
题型 III 一维随机变量函数 $Y = g(X)$ 分布律	

	(分布密度)的求法	216
题型 IV	二维随机变量 (X, Y) 函数 $g(X, Y)$ 的分布律(分布密度)的求法	217
第三章	随机变量的数字特征	221
题型 I	一维随机变量的数字特征	221
题型 II	一维随机变量函数的数字特征	224
题型 III	求二维随机变量的数字特征	226
题型 IV *	二维随机变量 (X, Y) 函数 $Z = g(X, Y)$ 的数字特征	228
题型 V	多维随机变量数字特征的求解技巧 ($(0-1)$ 分布分解法简介)	229
题型 VI	有关证明题	231
第四章	大数定律和中心极限定理	233
题型 I	估算随机事件的概率	233
题型 II	试验次数 n 的确定	236
题型 III	证明题	237
第五章 *	数理统计初步	239
题型 I	样本容量 n , 样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的求法	239
题型 II	求抽样分布	242
题型 III	统计量的点估计 $\left\{ \begin{array}{l} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{array} \right.$	243
题型 IV	正态总体均值与方差的区间估计	245
题型 V	估计量的评选标准	248
题型 VI	一个正态总体均值的假设检验	250
题型 VII	一个正态总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的假设检验	251
题型 VIII	两个正态总体均值的检验	252

篇后篇 单项选择题的解题技巧

数学三	模拟试题(一)及参考答案	266
数学三	模拟试题(二)及参考答案	273
数学三	模拟试题(三)及参考答案	279
数学三	模拟试题(四)及参考答案	285
数学三	模拟试题(五)及参考答案	293
数学三	模拟试题(六)及参考答案	298
数学三	模拟试题(七)及参考答案	305
数学三	模拟试题(八)及参考答案	311

数学三	模拟试题(九)及参考答案	317	数学四	模拟试题(八)及参考答案	375
数学三	模拟试题(十)及参考答案	324	数学四	模拟试题(九)及参考答案	382
数学四	模拟试题(一)及参考答案	330	数学四	模拟试题(十)及参考答案	388
数学四	模拟试题(二)及参考答案	337	附录 1	2001 年硕士研究生入学考试数学试题 三、四及参考答案	394
数学四	模拟试题(三)及参考答案	344	附录 2	2002 年硕士研究生入学考试数学试题 三、四及参考答案	409
数学四	模拟试题(四)及参考答案	351	附录 3	2003 年硕士研究生入学考试数学试题 三、四及参考答案	426
数学四	模拟试题(五)及参考答案	357			
数学四	模拟试题(六)及参考答案	363			
数学四	模拟试题(七)及参考答案	368			

注:带 * 章节,数四考生不必看。

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续

§ 1 函 数

一. 有关函数概念的题型

题型 I 判别函数的等价性

【解题提示】 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则为不同函数.

【例 1.1】 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在,且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则与 $f(x)$ 等价的函数是().

(A) $y = \int_0^x (x^2 - 2x) dx$.

(B) $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt$.

(C) $y = \int f'(x) dx$.

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$.

【解】 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$, 则 $f(x) = x^2 + 2xl$,

两边取 $x \rightarrow 1$ 时的极限,得 $l = 1 + 2l \Rightarrow l = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$.

(A) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

(B) $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt = x^2 - 2x$.

(C) $y = f(x) + C = x^2 - 2x + C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$, 定义域 $x < 0$ 或 $x > 2$, 与 $f(x)$ 定义域不同,故(B)入选,实际做题时不必像以上那样处理,求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

【解题提示】 一种是所谓“凑法”——将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式,然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$ 的表达式.另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”,然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式.多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】 求解以下各小题中的 $f(x)$ 表达式:

(1) $f(x + \frac{1}{x}) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sin(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 2, \quad |x| > 1.$

(2) $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, \quad 0 < x < 1.$



【解】 (1) $f(x + \frac{1}{x}) = \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} + \sin[(x + \frac{1}{x})^2 - 2] + 2,$

故 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sin(x^2 - 2) + 2.$

(2) $f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = -2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x},$

故 $f(x) = -2x + \frac{1}{1 - x}, \quad 0 < x < 1.$

【例 1.3】 设 $f(x)$ 满足方程: $af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x$, 其中 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$.

【解】 令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$, 于是原方程变为 $bf(t) + af(-\frac{1}{t}) = -\sin \frac{1}{t},$

由“无关特性”得 $bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x}.$

解联立方程组
$$\begin{cases} af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x \\ bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x} \end{cases},$$

得 $f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \sin x + b \sin \frac{1}{x}).$

【例 1.4】 设 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 + \cos(xy)$, 求 $f(x, y)$.

【解】 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 则

$$f(u, v) = (\frac{u}{1+v})^2 - (\frac{uv}{1+v})^2 + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v} + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2},$$

故 $f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} + \cos \frac{x^2 y}{(1+y)^2} \quad (y \neq -1).$

二. 函数的性质

题型 III 函数奇偶性的判别

【解题提示】 判别函数奇偶性的方法:

(1) 主要依据奇偶性的定义. 有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数; 偶函数之积为偶函数; 偶数个奇函数之积为偶函数; 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数).

(2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若函数的定义域关于原点不对称, 则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt \right] du$, 其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.



(3) $F(x) = \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}\right)f(x)$, 其中 $a > 0, a \neq 1, f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对任何 x, y 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

【解】 (1) $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u)(-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} -\int_0^x f(u)du,$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(t)dt = 0,$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数.

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt \right] du, \quad ①$$

$$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t)dt \right] du, \quad ②$$

$$\therefore f(x) \text{ 为奇函数} \quad \therefore f(x) + f(-x) = 0, \quad ③$$

$$\text{又} \quad \therefore \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t)dt \right] du \xrightarrow{\text{令 } u = -v} \int_0^x \left[\int_0^{-v} f(t)dt \right] (-dv) = -\int_0^x \left[\int_0^{-u} f(t)dt \right] du, \quad ④$$

由 ①, ②, ③, ④ 得

$$F(x) + F(-x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt - \int_0^{-u} f(t)dt \right] du = \int_0^x \left[\int_{-u}^u f(t)dt \right] du = 0,$$

故 $F(x)$ 为奇函数.

$$(3) \text{ 令 } g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数.

$$\text{又} \quad \therefore f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$$

$$\text{又} \quad \text{显然有 } 0 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x) = g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 IV 求解给定函数的周期或周期性证明

【解题提示】 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期的函数, 证明 $f(ax) (a > 0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x) = f(ax)$, 由于

$$F(x + \frac{T}{a}) = f[a(x + \frac{T}{a})] = f(ax + T) \xrightarrow[\substack{\text{是} \\ f(x) \text{ 的周期}}]{\because T} f(ax) = F(x),$$

故 $\frac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形与 $x = a, x = b$ 均对称 ($a \neq b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$,

$$\begin{aligned} \text{于是, } f(x) &= f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) = f[b + (2a-x-b)] \\ &= f[b - (2a-x-b)] = f[x + 2(b-a)], \end{aligned}$$



故 $f(x)$ 是周期函数, 其周期 $T = 2(b - a)$.

题型 V 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

【解题提示】 若没有言明函数 $f(x)$ 可导, 则用单调性定义判别; 若言明函数 $f(x)$ 可导, 则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, 证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内单调增加.

$$\begin{aligned} \text{【证】 } F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x-a} = -\int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^2} dt + \int_a^x \frac{f(x)}{(x-a)^2} dt \\ &= \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-a)^2} dt, \end{aligned}$$

$\because (x-a)^2 > 0$ $f(x)$ 单调上升, 当 $x > t$ 时, $f(x) - f(t) \geq 0$,

$\therefore F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

题型 VI 函数有界性的判别

【解题提示】 证明或判别函数有界性的思路:

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【证】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, $\therefore$ 对于取 $\epsilon = \frac{|l|}{2}$, $\exists X > 0$,

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$,

又 $|f(x) - l| > |f(x)| - |l|$ 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|$.

$\because f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S$, 使 $|f(x)| < S, x \in [a, X]$.

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\}$, 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leq M$,

即函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【例 1.10】 试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x t e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【证】 令 $g(x) = \int_0^x t e^{t^2} dt$,

$$\because g(-x) = \int_0^{-x} t e^{t^2} dt \xrightarrow{\text{令 } u = -t} \int_0^x -u e^{(-u)^2} (-du) = \int_0^x u e^{u^2} du,$$

$\therefore g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x) = e^{-x^2} g(x)$ 也为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上



有界即可.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x^2}}{2x e^{x^2}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 对于取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists X > 0$, 当 $x \in [X, +\infty)$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad 0 < f(x) < 1,$$

又 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 于是, $\exists l > 0$, 使对 $\forall x \in [0, X]$, 恒有 $0 \leq f(x) \leq l$, 取 $M = \max\{1, l\}$, 则 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

三. 复合函数

【解题提示】 将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法:

- (1) 代入法 (适用于初等函数的复合);
- (2) 分析法 (适用于初等函数与分段函数的复合, 或两分段函数的复合);
- (3) 图示法 (适用于两分段函数的复合).

【例 1.11】 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

$$\text{【解】} \quad f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)]$.

$$\text{【解】} \quad f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} / \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}, \quad \vdots$$

比较以上两式可知 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (由数学归纳法可证.)

$$\text{于是} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0).$$

【例 1.13】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}.$$



(i) 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2};$$

(ii) 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2};$$

综上所述, 有
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x + 2 & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1} & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

【例 1.14】 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 图示法的解题程序:

(1) 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图象;

(2) 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xOu 坐标面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线);

(3) 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间;

(4) 将(3) 所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|], \quad (*)$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像, 图 1.1 所示, 以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$ 的分界点 $u = 0$ (xOu 平面上的 x 轴)

当 $x < 0$ 时 $u = x, (u < 0)$

当 $x \geq 0$ 时 $u = x^2, (u \geq 0)$

将以上所得结果代入(*)式, 得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$.

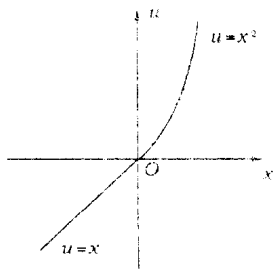


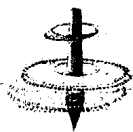
图 1.1

§ 2 极 限

一. 数列的极限

题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

【解题提示】 或者利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序: ① 判断极限的存在性)



单调性

有界性

方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;②先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

【例 1.15】 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 2 + \frac{1}{l} \Rightarrow l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{2},$$

$\because$ 由题设可知 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} > 2 \therefore l = 1 + \sqrt{2}$.

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{l}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|x_{n-1} - l|}{lx_{n-1}} \quad (\because x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2, \\ l = 2 + \frac{1}{l} > 2) &< \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4} / 4 = \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - l|}{4^3} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}} \\ &= \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}}, \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1$.

【例 1.16】 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限,

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{l}{1+l}\right) \right| \\ &= \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1+l)} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} &= 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

【另解】 由题设可知 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$x_2 - x_1 = \left(1 + \frac{x_1}{1+x_1}\right) - 1 = \frac{x_1}{1+x_1} > 0. \quad \text{于是, } x_2 > x_1.$$



设 $x_n > x_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } x_{n+1} - x_n &= \left(1 + \frac{x_n}{x_n + 1}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) = \frac{x_n}{1 + x_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} > 0, \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

$$\because x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} (\because x_{n-1} > 0) < 2 \quad \therefore \{x_n\} \text{ 有界.}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设其为 l , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right), \text{ 即 } l = 1 + \frac{l}{1 + l} \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l \text{ 非负.}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

【例 1.17】 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, 其中 $a > 0, x_0 > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证】 $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \therefore \{x_n\}$ 有界.

又 $\because \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}) = 1, \therefore \{x_n\}$ 单减,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \text{ 可得 } l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l}) \Rightarrow l = \sqrt{a},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

注: 单调数列的极限既可用极限定义法, 又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

【解题提示】 方法有:

- (1) 特殊级数求和法.
- (2) 利用幂级数求和法.
- (3) 利用定积分定义求极限.
- (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的可用一个通式表示, 则用定积分定义求解数列的极限; 若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 而剩余的不能用一个通式表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】 求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$