

梁绍鸿 著

初等数学复习及研究

# 平面几何题解

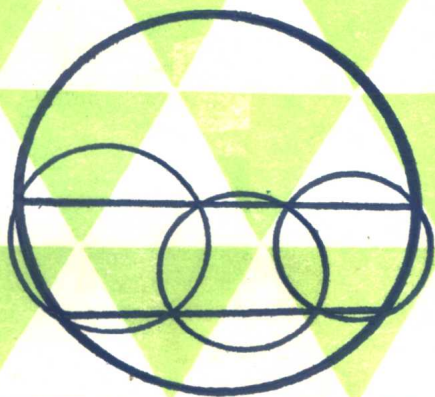
(下册)

尚 强 编

王忠汉 李梦樵

唐以荣 黄承宏

校



中国地质出版社

# 平面几何题解

(下册)

尚 强 编

王忠汉 李梦樵 校  
唐以荣 黄承宏

中国展望出版社

一九八五年·北京

# 目 录

## (下 册)

|             |         |
|-------------|---------|
| 第五章 作图..... | ( 1 )   |
| 习题二十五.....  | ( 1 )   |
| 习题二十六.....  | ( 12 )  |
| 习题二十七.....  | ( 20 )  |
| 习题二十八.....  | ( 32 )  |
| 习题二十九.....  | ( 41 )  |
| 习题三十.....   | ( 47 )  |
| 习题三十一.....  | ( 56 )  |
| 习题三十二.....  | ( 66 )  |
| 复习题五.....   | ( 72 )  |
| 总复习题.....   | ( 101 ) |
| 附录          |         |
| 名词索引.....   | ( 305 ) |

## 第五章 作 图

### 习 题 二 十 五

3. 自定圆外一已知点  $P$  求作割线交定圆于  $A, B$ , 使  $PA=AB$ .

**解:** 设  $\odot O(r)$  为定圆, 取  $PO$  中点为  $O_1$ , 作  $\odot O_1(r/2)$  交  $\odot O(r)$  于  $A$ , 连  $PA$  交  $\odot O(r)$  于  $B$ , 则割线  $PAB$  为所求.

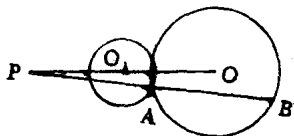


图25—3

4. 在已知直线上求一点, 自它向一定圆引切线, 使两切点的距离等于定长.

**解:** 设定直线  $l$ , 定圆  $\odot O(r)$ , 定长  $d$ , 作  $\odot O\left(\frac{r_2}{\sqrt{r_2 - (d/2)^2}}\right)$ , 交  $l$  于  $P$ , 则  $P$  为所求.

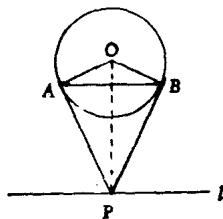


图25—4

5. 在已知直线上求一点, 使它对两个定圆的视角相等.

**解:** 设定直线  $l$ , 两定圆  $\odot O_1(r_1)$ ,  $\odot O_2(r_2)$ , 作与  $\odot O_1(r_1)$  与  $\odot O_2(r_2)$  的相似圆(习题二十一第15题)交  $l$  于  $P$ , 则  $P$  点为所求.

6. 设  $A$  是定直线  $a$  上的定点,  $B$  是线外的定点. 在  $a$  上求一点  $P$ , 使  $PA+PB$  等于定长.

解: 设定长为  $s$ , 在  $a$  上取一点  $B'$ , 使  $AB' = s$ , 作  $BB'$  中垂线交  $a$  于  $P$ , 则  $P$  为所求.

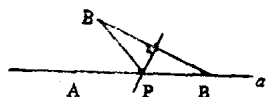


图25—6

7. 在已知三角形一边上求一点, 使它至其它两边的距离和等于定长.

解: 设定  $\triangle ABC$  及定长  $s$ , 作与  $AB$  距离为  $s$  的平行线交  $AC$  于  $C'$ , 在  $AB$  上取  $B'$ , 使  $AB' = AC'$ , 连  $B'C'$  交  $BC$  于  $P$ , 则  $P$  为所求.

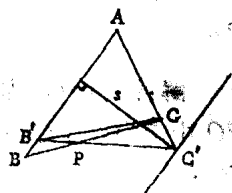


图25—7

8. 在已知三角形一边上求一点, 自它引其他两边的平行线, 使与其他两边交成的平行四边形有一定的周长.

解: 设定  $\triangle ABC$  及定长  $s$ , 在  $AB$ 、 $AC$  上各取一点  $E$ 、 $F$ , 使  $AE = AF = s$ , 连  $EF$  交  $BC$  于  $P$ , 则  $P$  为所求.

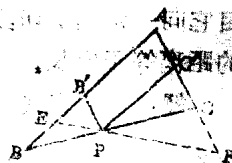


图25—8

9. 在直角三角形的弦上求一点, 自它引勾股的平行线, 使与勾股交成的矩形合于下列条件之一:

(1) 两邻边的差(绝对值)等于定长;

(2) 两邻边的平方和等于常数.

**解：**(1) 设定长  $s$ ，在  $AB$  (或延长线) 上取一点  $E$ ，使  $AE = s$ ，在  $AC$  延长线 (或线段  $AC$ ) 上取一点  $F$ ，使  $AF = s$ ，连  $EF$  交  $BC$  于  $P$ ，则  $P$  为所求。

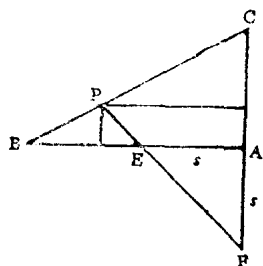


图 25—9

(2) 设常数为  $r^2$ ，作  $\odot A(r)$  交于  $P$ ，则  $P$  为所求。

10. 设  $AB$ 、 $CD$  是固定的两线段。在已知直线  $l$  上求一点  $P$ ，使  $\triangle PAB$  与  $\triangle PCD$  等积。

**解：** 设  $AB$  交  $CD$  于  $Q$ ，作  $l_1 \parallel AB$  且相距  $CD$ ，作  $l_2 \parallel CD$  且相距  $AB$ ，设  $l_1$  交  $l_2$  于  $R$ ，连  $QR$  交  $l$  于  $P$ ，则  $P$  为所求。

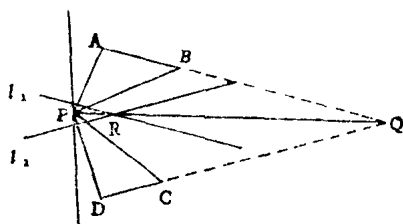


图25—10

11. 过三角形一边上某定点作两直线，要把三角形的面积三等分。

**解：** 设  $P$  在  $\triangle ABC$  的  $BC$  边上，作  $BC$  边的三等分点  $E$ 、 $F$ ，过  $E$  作  $EE_1 \parallel AP$  交折线  $BAC$  于  $E_1$ ，过  $F$  作  $FF_1 \parallel AP$  交折线  $BAC$  于  $F_1$ ，则直线  $PE_1$ 、 $PF_1$  为所求。

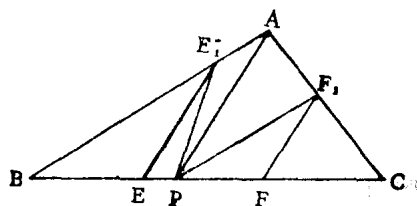


图25—11

12. 设 $P$ 、 $Q$ 是 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 边上的两定点，先过 $P$ 求作一直线把 $\triangle ABC$ 划分为两块，再过 $Q$ 求作一直线把含有 $Q$ 的一块又划分为两块，使前后所得三块均等积。

**解：**作 $BC$ 边的三等分点 $E_1$ 、 $E_2$ ，作 $E_1F_1 \parallel AP$ 交折线 $BAC$ 于 $F_1$ ，若 $F_1$ 在 $AC$ 上，仿§67例题86作一直线 $QF_2$ 将 $\triangle PF_1C$ 面积等分，则 $PF_1$ 、 $QF_2$ 为所求直线。

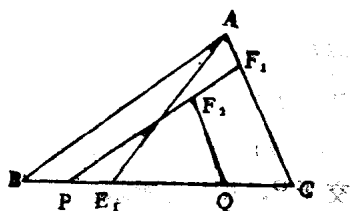


图25—12 (a)

若 $F_1$ 在 $AB$ 上， $QF_2$ 作法如下：

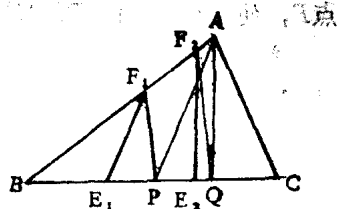


图25—12 (b)

当 $BP > PQ$ ，作 $E_2F_2 \parallel AQ$ 交折线 $CAF_1$ 于 $F_2$ ；

当 $BP < PQ$ 时，在 $PF_1$ 上取一点 $F_2$ ，使 $PF_2 = \frac{PB \cdot PF_1}{PQ}$ 。

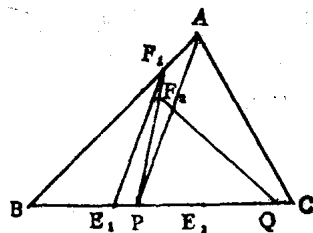


图25—12 (c)

13. 在定圆中，求作内接三角形，使一边有定长，其它两边分别通过定圆内的两个已知点。

**解：**设 $P$ 、 $Q$ 是定圆 $\odot O(r)$ 内二定点， $a$ 是定线段。

作 $\triangle O_1 B' C'$ , 使 $O_1 B' = O_1 C' = r$ ,  
 $B' C' = a$ .

作 $O'$  使 $\triangle O' P Q \sim \triangle O_1 B' C'$   
 (在 $PQ$ 二侧各一点)作 $\odot O'$  ( $O' P$ ) 交  
 $\odot O (r)$  于 $A$ , 延长 $AP$ 、 $AQ$ 交 $\odot O (r)$   
 于 $B$ 、 $C$ , 则 $\triangle ABC$ 为所求。

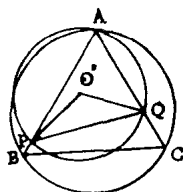


图25—13

14. 设 $l$ 是通过定圆的中心 $O$ 的定直线,  $A$ 、 $B$  是这圆上的  
 的两定点且同在 $l$ 的一侧. 在定圆上求一点 $P$ , 连 $PA$ 、 $PB$ 交 $l$   
 于 $M$ 、 $N$ , 使 $OM = ON$ .

**解:** 由习题十第25题得知,  
 作法如下:  
 设直线 $AB$ 交 $l$ 于 $Q$ , 作 $QD$ 切 $\odot O$   
 于 $D$ , 连 $DO$ 交 $\odot O$ 于 $P$ , 则 $P$ 为  
 所求。

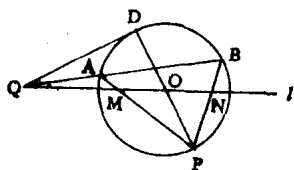


图25—14

15. 在一圆形撞球台上有两球恰位于一直径上, 试问应  
 循什么方向击其中一球使撞球台边反射后正好撞着另一球?

**解:** 设 $P$ 、 $Q$ 为位于定圆 $\odot O (r)$   
 一直径的两定点,  $P$ 球被击, 显然  
 $OP$ 方向为所求。

利用 § 57 例题64, 作 $P$ 、 $Q$ 之  
 比为 $OP : OQ$ 的阿氏圆, 设此圆交  
 $\odot O (r)$ 于 $A$ , 则 $PA$ 方向为所求。

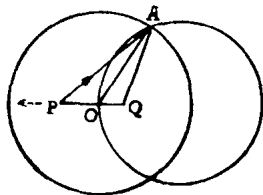


图25—15

16. 求作已知扇形的内切圆。

**解:** 设 $OAB$ 为已知扇

形,  $M$  为  $\widehat{AB}$  中点, 作  $MN \perp OB$  于  $N$ , 在  $OB$  延长线上取点  $C$ , 使  $BC = MN$ , 作  $BZ \parallel CM$  交  $OM$  于  $Z$ , 作  $ZD \perp OB$  于  $D$ , 则  $\odot Z$  ( $ZD$ )

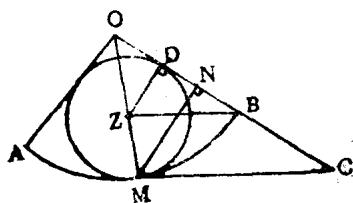


图 25—16

17. 已知一定圆及一定直线, 求作一圆, 令切定圆于定点, 而且切于定直线。

**解:** 设  $A$  为定圆  $\odot O$  上的定点, 定直线  $l$ . 作关于  $OA$  的对称线  $l'$ , 作直线  $a \perp OA$  于  $A$ , 过  $A$  作  $\odot O'$ , 使切于三直线  $l, l', a$ , 则  $\odot O'$  为所求。

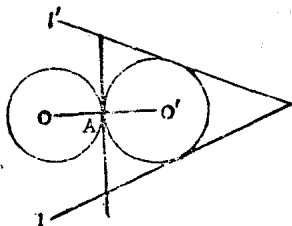


图 25—17

18. 求定一点, 使对三已知圆的视角均相等。

**解:** 利用习题二十一第16题即可。

19. 一直线上有  $A, B, C, D$  四点排成  $\{ABCD\}$  的顺序, 在线外求一点  $P$ , 使  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$ 。

**解:** 利用 § 57 例题

64, 在  $l$  上取点  $B', C'$ , 使  $B'A : B'C = BA : BC$ ,  $C'B : C'D = CB : CD$ , 分别以  $BB', CC'$  为直

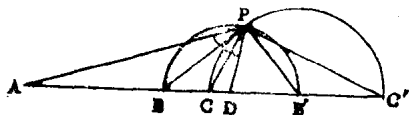


图 25—19

径作圆，设它们交于 $P$ ，则 $P$ 为所求。

20. 已知 $\triangle ABC$ 及三线段 $l, m, n$ ，求一点 $P$ 合于 $PA:PB:PC=l:m:n$ 。

解：利用 § 57 例题 64，作 $A, B$ 之比为 $l:m$ 的阿氏圆， $B, C$ 之比为 $m:n$ 的阿氏圆，设它们交于 $P$ ，则 $P$ 为所求。

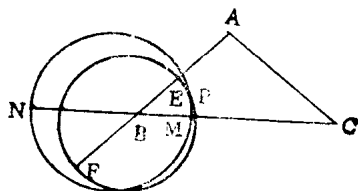


图 25—20

21. 已知 $\triangle ABC$ ，求一点 $S$ 使合于 $SA \cdot BC = SB \cdot CA = SC \cdot AB$ 。这样的 $S$ 点叫做 $\triangle ABC$ 的等力点。一般三角形都有两个等力点，惟正三角形只有一个这样的点。

解：利用 § 57 的习题 64，作 $A, B$ 之比为 $CA:BC$ 的阿氏圆， $B, C$ 之比为 $AB:CA$ 的阿氏圆，设它们交于 $S$ ，则 $S$ 为所求。

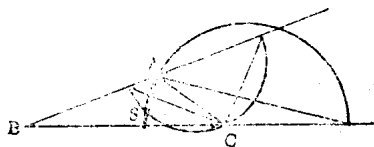


图 25—21

22. 在 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 边上求一点 $P$ ，使 $AP$ 是 $BP$ 与 $CP$ 的比例中项。

解：设 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心，以 $OA$ 为直径作圆交 $BC$ 于 $P$ ，则 $P$ 为所求。

23.  $a, b$ 是平行的两定直线， $P$ 是 $a$ 上的定点， $Q$ 是 $a, b$ 外的定点。求过 $Q$ 作直线 $l$ 交 $a, b$ 于 $A, B$ ，使 $PA=PB$ 。

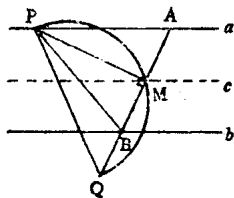


图 25—23

**解：**以 $PQ$ 为直径作圆交 $a$ 、 $b$ 的中线 $c$ 于 $M$ ，直线 $QM$ 为所求。

24. 过定圆 $\odot O$ 内一定点 $P$ 作弦 $AB$ ，使 $A$ 、 $B$ 至直线 $OP$ 的距离差(绝对值)等于定长。

**解：**设定长 $d$ 、作直线 $l$ 使与 $OP$ 相距 $d$ ，作 $\odot O(OP)$ 交 $l$ 于 $Q$ ，设 $PQ$ 直线交 $\odot O$ 于 $A$ 、 $B$ ，则弦 $AB$ 为所求。

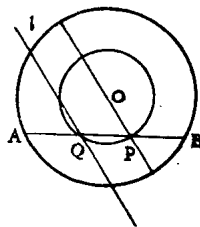


图25—24

25. 已知边长，求作菱形，使边长恰为两对角线的比例中项。

**解：**设定长 $AB$ ，作直线 $l$ 距 $AB$ 为 $AB/4$ ，以 $AB$ 为直径作圆交 $l$ 于 $O$ ，延长 $AO$ 至 $C$ 使 $OC=AO$ ， $BO$ 至 $D$ 使 $OD=BO$ ，则 $ABCD$ 为所求菱形。

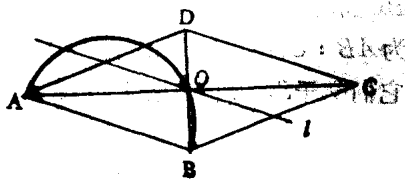


图25—25

26. 已知三边的长，求作四边形，使它同时有外接圆和内切圆。

**解：**设定长 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，由§67例题88，作边长为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $a+c-b$ 的四边形，使其有外接圆。

27. 在定圆中，求作定长的弦，使被一已知弦平分。

**解：**设定圆 $\odot O$ ，定长为 $a$ ， $CD$ 为定弦，任作 $\odot O(r)$ 的

一弦  $EF = a$ ，作  $\odot O(r')$  使切于  $EF$ ，  
而交  $CD$  于  $M$ ，作弦  $AB \perp OM$  于  $M$ ，  
则  $AB$  为所求。

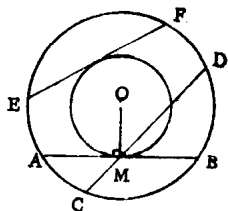


图 25—27

28. 已知两同心圆及一点  $P$ ，求过  $P$  作一直线  $l$  交外圆于  $A$ 、 $B$ ，使自这两交点所作  $l$  的垂线恰好切于内圆。

解：设两定圆  $\odot O(R)$ 、 $\odot O(r)$ ，  
( $R > r$ )

任作  $\odot O(R)$  的一弦  $CD = 2r$ ，作  
 $ON \perp CD$  于  $N$ ，作圆  $\odot O(ON)$  交以  
 $PO$  为直径的圆于  $M$ 。则直线  $PM$  为  
所求。

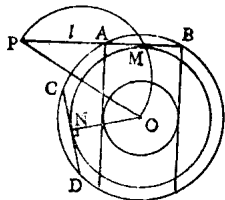


图 25—28

29. 以一固定线段为一边求作平行四边形，使这边的对边恰好是一定圆的弦。

解：设固定线段  $AB$ 、定圆  $\odot O$ 。

任作  $\odot O$  的一弦  $EF = AB$ ，作  $ON \perp EF$  于  $N$ ，作圆  $\odot O(ON)$ ，作  $OM \perp AB$  于  $M$ 。设  $\odot O(ON)$  交  $OM$  于  $G$ ，作  $\odot O$  弦  $CD \perp OM$  于  $G$ ，则  $ABCD$  为所求作的平行四边形。

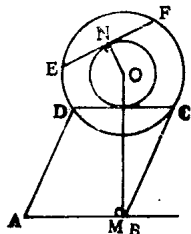


图 25—29

30. 在定圆中，求作内接三角形，使两边各等于定长，第三边(所在直线)通过一已知点。

解：设定圆 $\odot O$ ，定点 $P$ ，定长 $b, c$ 。

在 $\odot O$ 上任取一点 $A'$ ，在 $\odot O$ 上作二点 $B', C'$ ，使 $A'C'=b, A'B'=c$ ，作 $ON \perp B'C'$ 于 $N$ 。作 $\odot O(N)$ 及以 $OP$ 为直径的圆，设它们交于 $M$ ，连 $PM$ 交 $\odot O$ 于 $B, C$ ，在 $\odot O$ 上取一点 $A$ ，使 $\angle CBA = \angle C'B'A'$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

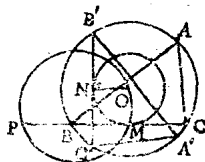


图25—30

31. 已知一顶点的位置及三边的长，求作三角形，使定顶点的对边(所在直线)通过一定点。

解：设定点 $P, A$ 及定长 $a, b, c$ 。

作 $\triangle A'B'C'$ 使 $B'C'=a, C'A'=b, A'B'=c$ ， $A'D' \perp B'C'$ 于 $D'$ 。作以 $PA$ 为直径的圆，交 $\odot A(A'B')$ 于 $D$ ，在 $PD$ 上取 $B, C$ ，使 $BD=B'D', DC=D'C'$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

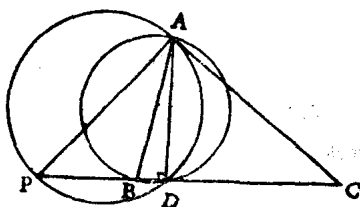


图25—31

32. 已知周长、一角及这角的平分线，求作三角形。

解：设 $\angle EAF$ 为定角，它的角平分线 $AT$ 等于定长 $t$ ，令 $AE=AF=s/2$ (半周长)，作 $\odot I$ 切 $AE, AF$ 于 $E, F$ ，过 $T$ 作直线切 $\odot I$ 且交 $AE, AF$ 于 $B, C$ 。则 $\triangle ABC$ 为所求。

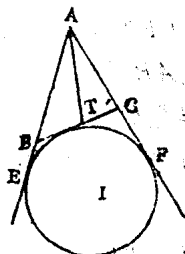


图25—32

33. 已知周长、一角、夹这角的两边之比，求作三角形。

解：设  $\angle EAF$  为定角， $AE = AF = s/2$  (半周长)。定长为  $p : q$ ，在  $AE$ 、 $AF$  上各取点  $B'$ 、 $C'$ ，使  $AB' = p$ ， $AC' = q$ 。作  $\odot I$  切  $AE$ 、 $AF$  于  $E$ 、 $F$ ，过  $I$  作  $B'C'$  的垂线交  $\odot I$  于  $D$ ，过  $D$  作  $\odot I$  的切线交  $AE$ 、 $AF$  于  $B$ 、 $C$ ，则  $\triangle ABC$  为所求。

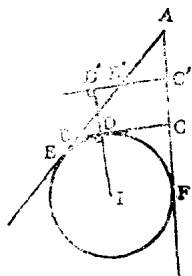


图 25—33

34. 已知周长、一角及对边的高，求作三角形。

解：设  $\angle EAF$  为定角，定长  $h$ ， $AE = AF = s/2$  (半周长)，作  $\odot I$  使切  $AE$ 、 $AF$  于  $E$ 、 $F$ ，作  $\odot A(h)$  与  $\odot I$  的公切线交  $AE$ 、 $AF$  于  $B$ 、 $C$ ，则  $\triangle ABC$  为所求。

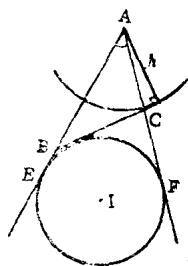


图 25—34

35. 已知周长、一角、内切圆半径，求作三角形。

解：设定长  $r$  及定角  $\angle EAF$ ， $AE = AF = s/2$  (定半周)

作  $\odot I_1$  切  $AE$ 、 $AF$  于  $E$ 、 $F$ ，如图作直线  $b$ 、 $c$  距  $AC$ 、 $AB$  都为  $r$ 。设  $b$ 、 $c$  交于  $I$ ，作  $\odot I$  切  $AE$ 、 $AF$ ，作  $\odot I_1$ 、 $\odot I$  的一内公切线交  $AE$ 、 $AF$  于  $B$ 、 $C$ ，则  $\triangle ABC$  为所求。

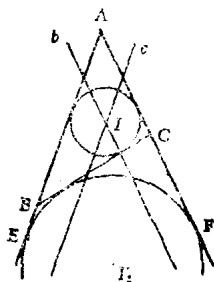


图 25—35

36. 已知内切圆半径、一角及对边的高，求作三角形。

解：设定长  $r, h$ ，定角  $\angle EAF$ 。

作  $\odot I$  切于  $AE, AF$  且半径为  $r$ ，作  $\odot A(h)$  与  $\odot I$  的外公切线交  $AE, AF$  于  $B, C$ ，则  $\triangle ABC$  为所求。

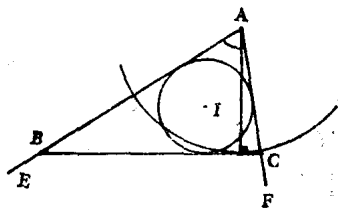
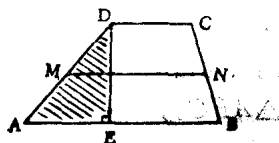


图25—36

## 习题二十六

2. 已知一底、一腰、高、中横线，求作梯形。

解：设定长  $a, b, h, m$ ，作  $\triangle EAD$ ，使  $\angle AED = 90^\circ$ ， $AD = b$ ， $DE = h$ ，在直线  $AE$  上取点  $B$ ，使  $AB = a$ 。设  $M$  为  $AD$  中点，作  $MN \parallel AB$  且  $MN = m$ ，延长  $BN$



至  $C$ ，使  $NC = BN$ ，则  $ABCD$  为所求。

图26—2

3. 已知高及两对角线，求作平行四边形。

解：设定长  $h, e, f$ ，作  $\triangle EAO$  使  $\angle AEO = 90^\circ$ ， $AO = e/2$ ， $OE = h/2$ ，作  $\triangle EOB$ ，使  $\angle BEO = 90^\circ$ ， $OB = f/2$ ，延长  $AO$  至  $C$ ，使  $OC = AO$ ， $BO$  至  $D$  使  $OD = BO$ ，则  $ABCD$  为所求。

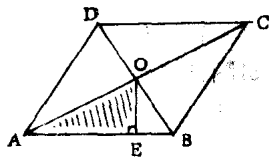


图26—3

4. 已知腰的高及底边，求作等腰三角形。

**解：**设实长 $h$ 、 $a$ ，作 $\triangle MAB$ ，使 $AB=a$ ， $AM=h$ ， $\angle AMB=90^\circ$ ，作 $AB$ 中垂线，设交直线 $BM$ 于 $C$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

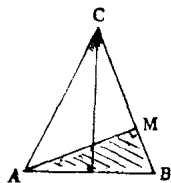


图26—4

5. 已知两边的中线及第三边，求作三角形。

**解：**设定长 $m_1$ 、 $m_2$ 及 $a$ ，作 $\triangle MBD$ ，使 $MB=m_1$ ， $MD=m_2$ ， $BD=3a/2$ ，在 $BD$ 内取一点 $C$ ，使 $BC=a$ ，延长 $CM$ 至 $A$ ，使 $MA=CM$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

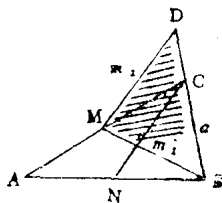


图26—5

6. 已知两边的中线及这两边中的一边，求作三角形。

**解：**设定长 $m_1$ 、 $m_2$ 及 $b$ ，作 $\triangle CGN$ ，使 $CN=b/2$ ， $GN=m_1/3$ ， $CG=2m_2/3$ ，延长 $CN$ 至 $A$ ，使 $NA=CN$ ， $NG$ 至 $B$ 使 $GB=2NG$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

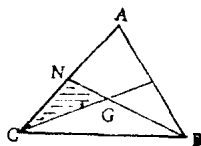


图26—6

7. 已知两边的中线及第三边的高，求作三角形。

**解：**设定长 $m_1$ 、 $m_2$ 及 $h$ ，作 $\triangle AGD$ 使 $AG=2m_1/3$ ， $GD=h/3$ ， $\angle ADG=90^\circ$ ，在直线 $AD$ 上取点 $B$ ，使 $GB=2m_2/3$ ，连 $AB$ 中

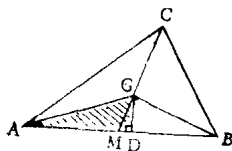


图26—7

点 $M$ 与 $G$ ，将 $MG$ 延长至 $C$ ，使 $GC = 2MG$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

8. 已知两边的中线及其中一边的高，求作三角形。

解：设定长 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $h_1$ ，作 $\triangle BGD$ ，使 $\angle BDG = 90^\circ$ ， $GB = 2m_2/3$ ， $GD = h_1/3$ ，在直线 $BD$ 上取点 $M$ ，使 $GM = m_1/3$ ，延长 $MG$ 至 $A$ ，使 $GA = 2MG$ ， $BM$ 至 $C$ 使 $MC = BM$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

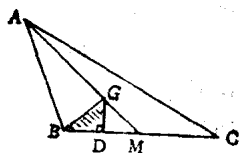


图26—8

9. 已知两边的高及其中一边的中线，求作三角形。

解：设定长 $h_1$ 、 $h_2$ 及 $m_1$ ，取一线段 $AM = m_1$ ，在 $AM$ 上取点 $G$ ，使 $MG = m_1/3$ ，作 $\triangle MGE$ ，使 $GE = h_1/3$ ， $\angle GEM = 90^\circ$ ，作 $\triangle AGD$ 使 $GD = h_2/3$ ， $\angle GDA = 90^\circ$ ，设直线 $ME$ 、 $AD$ 交于 $C$ ，延长 $CM$ 至 $B$ ，使 $MB = CM$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

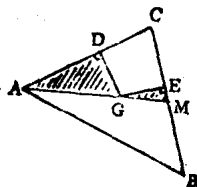


图26—9

10. 已知第一边的长，第二边的高，第二第三两边的和，求作三角形。

解：设定长 $a$ 、 $h_2$ 、 $s$ ，作 $\triangle BCE$ ，使 $BC = a$ ， $BE = h_2$ ， $\angle BEC = 90^\circ$ ，在 $CE$ 上取点 $D$ ，使 $CD = s$ ，作 $BD$ 中垂线交直线 $CE$ 于 $A$ ，则 $\triangle ABC$ 为所求。

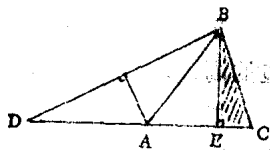


图26—10

11. 已知第一边的长、第二边的高、第三边的中线，求