近世幾何學初編

Casey 原著
李儼編譯

商務印書館

Casey

A Sequel to Euclid

近世幾何學初編

李儼編譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新華書店總經售
商務印書館印刷廠印刷
上海天通菴路一九〇號
㊀(53422·1)
1952年5月初版 1955年2月5版
印數5,401—6,900 定價¥16,700

序

本書係克濟氏(Casey)所著,原名 A Sequel to Euclid,論述近世幾何學,由淺入深,甚便學習.各國都有譯本,數學史上亦曾加介紹,實爲這方面的權威著作.我國尙無譯本,特加編譯,俾便讀者.青年初學者手此一書,可據以窺見近世幾何學之堂奧.書中所設習題多有他書所未舉者,卽多年積學者亦可就此獲得新解.茲根據作者的原意,將書名譯爲「近世幾何學初編」.希望讀者據以發揚光大,使這一門科學在國內能有發展.此書曾經劉文海同志校對一過,幷此誌謝.

一九五二年一月五日

李儼序於天水

目　次

第　一　編

第　二　編

第　三　編

第　四　編

第五編

第六編

近世幾何學初編

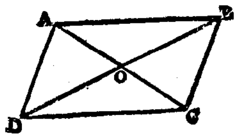
第一編

第一章

角、三角形、平行線、平行四邊形之理論

定理 1. 平行四邊形之兩對角線互爲平分.

命 $ABCD$ 爲平行四邊形，其兩對角線 AC, BD 互爲平分.



證明 AC 交於平行線 AB, CD.

而 $\angle BAO=\angle DCO$.

同理 $\angle ABO=\angle CDO$.

又 邊 AB=邊 CD.

$\therefore\ AO=OC$,

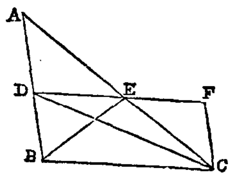
$BO=OD$.

系 1. 四邊形之兩對角線互相爲平分，則此四邊形爲平行四邊形。

系 2. 四邊形之兩對角線分爲四等三角形，則此四邊形爲平行四邊形。

定理 2. 通過 ABC 三角形 AB 邊中點之直線與 BC 邊平行，必通過第三邊 AC 之中點。

證明　通過 C 作 AB 之平行線 CF 與 DE 之延長交於 F 點.



$$CF=BD.$$

故 $BCFD$ 爲平行四邊形.

然　$BD=AD$　(假設)，

$$\therefore\quad CF=AD.$$

又　$\angle FCE=\angle DAE,$

$$\angle EFC=\angle ADE,$$

$$\therefore\quad \triangle ADE=\triangle EFC.$$

$$\therefore\quad AE=EC,$$

即　AC 等分於 E.

系　$DE=\frac{1}{2}BC$,　因 $DE=\frac{1}{2}DF$.

定理 3. 接連 ABC 三角形 AB, AC 兩邊中點 D, E 之

直線,必平行於底邊 BC.

證明 接連 BE, CD (參觀第二圖).

則 $$\triangle BDE = \triangle ADE,$$

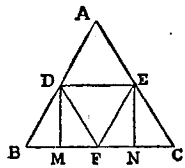
又 $$\triangle CDE = \triangle ADE,$$

$$\therefore \quad \triangle BDE = \triangle CDE,$$

卽 DE 平行於 BC.

系 1. D, E, F 各爲 ABC 三角形三邊 AB, BC, AC 之中點,則其等分之四個三角形爲全相等。

因 $ADFE, DEFB, DECF$ 各爲平行四邊形故也。



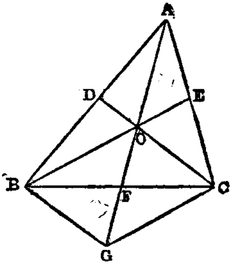
系 2. 通過 D, E 作兩平行線,交底邊於 M, N 兩點,則平行四邊形 $DMNF = \frac{1}{2}\triangle ABC$, 因 $DENM$ 與平行四邊形 $DEFB$ 相等故也.

定義 三個以上之直線,同交於一點,稱爲共點 (concurrent).

定義 三個以上之點,同在一直線上,稱爲共線 (collinear).

定義 四個以上之點,同在一圓周上,稱爲共圓 (concyclic).

定理 4. 三角形之三中線爲共點線.



證明　連 AC, BC 邊之中線 BE, CD 交於 O. 設延長 AO 時,宜平分 BC,則本定理爲眞.

通過 B 作 BG 平行於 CD,與 AO 之延長交於 G; 連結 CG.

因 DO 平分 AB,而平行於 BG,則 AG 亦必平分於 O (定理 2).

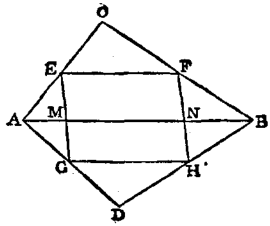
又 OE 平分 $\triangle AGC$ 邊 AG, AC. 故爲 GC 之平行線(定理 3). 故 $OBGC$ 爲平行四邊形,而其對角線互爲平分(定理 1). 所以 BC 平分於 F 點.

系　三角形之中線相交於一點,其交線之兩段之比,爲 $2:1$.

因 $AO=OG$, 又 $OG=2\,OF$, $AO=2\,OF$.

定理 5. 同底邊上兩三角形 ABC, ABD 各邊 AC, BC, AD, BD 之中點 E, F, G, H 爲平行四邊形之頂點. 此四邊形之面積爲兩三角形之和或差之半; 依於兩三角形之方向爲異向或同向.

證明 1.　設兩三角形爲異向.



因 EF, GH 各平行於 AB (定理 3).

又各爲 AB 之半分(定理 2 之系).

故 $EFHG$ 爲平行四邊形.

又命 EG, FH 交 AB 於 M, N 兩點，則

$$\square EFNM = \frac{1}{2}\triangle ABC$$

又

$$\square GHNM = \frac{1}{2}\triangle ABD,$$

$$\therefore \quad \square EFHG = \frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle ABD).$$

證明 2. 設 $\triangle ABC, ABD$ 爲同向，則

$$\square EFHG = EFNM - GHNM$$

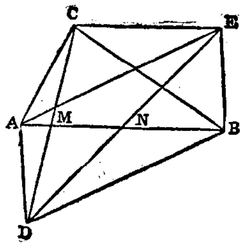
$$= \frac{1}{2}(\triangle ABC - \triangle ABD).$$

(注意) 本定理之第二證明，可從第一證明而推解. 設三角形 ABD 之面積，自正而負，則此三角形向其對側而移動. 此種移動之方向，近世幾何家已認爲一種之算法. 卽任何幾何數量，因一定法則，逐漸移動，通過零點，而以代數號分別其正負，此正負號卽分別其在零點之反對向

也.

定理 6. 兩相等三角形 ABC, ABD 同以 AB 爲底,而位於反對向. 連結頂點 C, D 作直線交於 AB 而爲平分.

證明 通過 A 及 B 作 AE, BE 平行於 BD, AD. 連結 E, C, 則 $AEBD$ 爲平行四邊形.



故 $\triangle AEB = \triangle ADB$.

然 $\triangle ADB = \triangle ACB$ (假設),

$\therefore$ $\triangle AEB = \triangle ACB$.

$\therefore$ CE 爲 AB 之平行線.

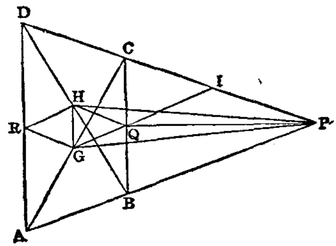
命 CD, ED 各交於 AB 得 M, N 兩點.

因 $AEBD$ 爲平行四邊形,故 ED 線平分於 N (定理 1).

又因 NM 平行於 EC, 故 CD 平分於 M (定理 2).

系 連結同底而反對向之兩三角形之頂點直線, 交於底邊而爲平分,則此兩三角形爲相等.

定理 7. 四邊形之相對邊 AB, CD 交於 P 點. 設對角線 AC, BD 之中點爲 G, H. 則三角形 PGH 爲四邊形 $ABCD$ 之四分一.



證明　設 Q, R 為 BC, AD 之中點;連結 GH, QG, RG, RH, QP.

因 QG 平行於 AB (定理3),延長 QG 必平分 PC.

又因 CP 為同底邊而位於反對向兩三角形 CGQ, PGQ 頂點之連結線,延長 GQ 而平分 CP.

故　$\triangle PGQ = \triangle CGQ$ (定理6之系) $= \frac{1}{4}\triangle ABC.$

同理　$\triangle PHQ = \frac{1}{4}\triangle BCD.$

又　$\square GQHR = \frac{1}{2}(\triangle ABD - \triangle ABC)$　　(定理5).

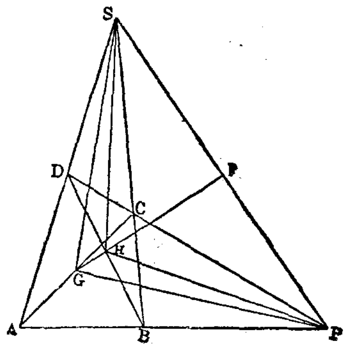
$\therefore$　$\triangle QGH = \frac{1}{4}(\triangle ABD - \triangle ABC).$

$\therefore$　$\triangle PGH = \frac{1}{4}(\triangle ABC + \triangle BCD + \triangle ABD - \triangle ABC)$

$= \frac{1}{4}$ 四邊形 $ABCD$.

系　完全四邊形三對角線之三中點為共線點.

設令 AD, BC 兩線交於 S, 則 SP 當為第三對角線.



以 S, P 與對角線之中點 G, H 各相連結，則 $\triangle SGH$ 及 $\triangle PGH$ 各與四邊形 $ABCD$ 四分之一相等.

$\therefore\quad \triangle SGH=\triangle PGH.$

$\therefore$ 延長 GH, 則必平分 SP (定理 6).

定義 完全四邊形三對角線之三中點所連結之直線，爲此完全四邊形之牛頓線 (Newton's line).

〔註〕 本定理之系，稱爲牛頓定理或高斯 (Gauss) 定理.

定義 平面上某點，依一定之條件而行動，其所成之直線或曲線，稱爲此點之軌跡 (locus).

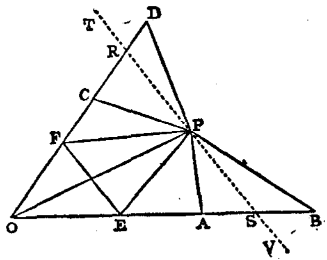
設一定點 P, 向等距離之定點而動，則 P 點之軌跡，爲以 O 爲心，OP 爲半徑之圓周. 又 A, B 爲二定點，又有一動點 P; 此動點 P, 按一定之規律而動，使三角形 ABP 之面積，常爲一定，則此點之軌跡爲平行於 AB 之直線.

定理 8. 直線 AB, CD 之位置及其大小均爲已知，其間 P 之一定點移動，使三角形 ABP, CDP 之和常爲一定，則

點之軌跡爲一直線.

證明　AB, CD 交於 O. 次令 $OE=AB$.

連結 OP, EP, EF, FP.



則　$\triangle APB=\triangle OPE$,

$\triangle CPD=\triangle OPF$.

因　$\triangle OEP, OFP$ 之和爲已知.

$\therefore$　四邊形 $OEPF$ 之面積爲已知.

$\therefore$　$\triangle EFP$ 之面積及底邊 EF 爲已知.

$\therefore$　P 點之軌跡爲平行於 EF 之直線.

［註］以圖中之點線,表所求之軌跡. 設 P 點與 R 點重合,則 $\triangle CDP$ 之面積爲零. 又 P 點向 CD 之他側而動,則 $\triangle CDP$ 之面積爲負. 同理 $\triangle APB$ 及直線 AB, 亦爲適用此說. 參觀(定理 5)之注意,知三角形之頂點通過底邊而爲連續的移動,則在平面上三角形之面積,逐漸而爲自正而負之變易.

系 1.　m, n 爲定倍數,命 $OE=mAB$ 及 $OF=nCD$. 設 $m\triangle ABP+n\triangle CDP$ 之值爲已知,則 P 點之軌跡可按本定理知其爲一直線平行於 EF.

系 2.　通過 O 點,延長直線 CD, 作 $OF'=nCD$, 則 $m\triangle ABP-n\triangle CDP$ 時 P 點之軌跡爲已知.

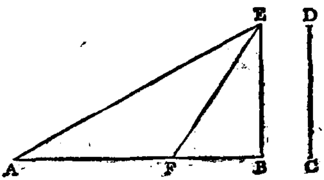
系 3. 無論若干線，設其位置及大小爲已知，又定倍數爲 $m, n, p, q \cdots\cdots$，其間正負相雜，而

$$m\triangle ABP + n\triangle CDP + p\triangle GHP + \cdots\cdots$$

時，P 點之軌跡爲一直線。

系 4. $ABCD$ 爲四邊形，P 爲定點，因 $\triangle ABP, CDP$ 之和爲 $ABCD$ 之半，則 P 點之軌跡爲四邊形之牛頓線.

作圖題 9. 求分 AB 直線爲二，使其平方差與定線 CD 之平方相等。



作圖　作 BE 垂直於 AB，取 CD 與之相等，連結 AE；作 $\angle AEF$ 與 $\angle EAF$ 相等，則 F 點爲所求。

證明　$\angle AEF = \angle EAF$；故 $AF = FE$.

$$\therefore \quad AF^2 = FE^2 = FB^2 + BE^2.$$

$$\therefore \quad AF^2 - FB^2 = BE^2.$$

然 $$BE^2 = CD^2.$$

$$\therefore \quad AF^2 - FB^2 = CD^2.$$

［註］若 $CD > AB$, $BE > AB$.

則 $\angle EAB > \angle AEB$.

則 AE 與 EF 使 $\angle AEF$, $\angle EAB$ 相等. 而直線 EF 當在 EB 之一邊, 又 F 點當在 AB 之延長線上. 此時 F 點為外分點.

作圖題 10. 三角形底邊之位置與大小為已知,又其二邊上兩正方形之差亦為已知.求此三角形頂點之軌跡.

作圖 命 ABC 為三角形. 其底邊 AB 為已知. 作 AB 之垂線 CP. 則

$$AC^2 = AP^2 + CP^2,$$

$$BC^2 = BP^2 + CP^2,$$

故 $$AC^2 - BC^2 = AP^2 - BP^2.$$

因 $AC^2 - BC^2$ 為已知, $AP^2 - BP^2$ 為已知.

因 AB 分於 P 點,其平方差為已知. $\therefore P$ 為定點(定理 9).

又直線 CP 之位置為已知,而 C 點常在 CP 上,則 C 點之軌跡為垂直底邊之直線.

系 三角形之三垂線為共點線.

自 A, B 作對邊之垂線 AD, BE. 其交點為 O, 則

$$AC^2 - AB^2 = OC^2 - OB^2 \qquad \text{(定理 10)},$$

$$AB^2 - BC^2 = OA^2 - OC^2.$$

故 $$AC^2 - BC^2 = OA^2 - OB^2.$$