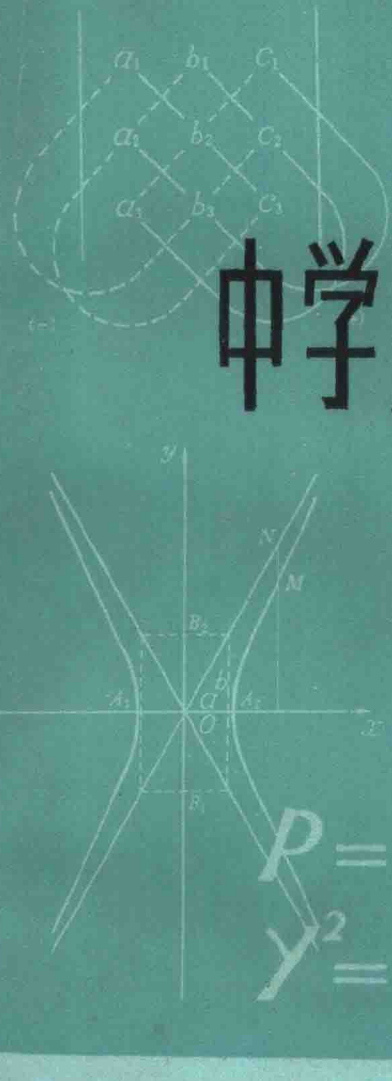
ZHONGXUESHUXUESHOUCE

中学数学手册

郭绍什



河北人民出版社

中学数学手册

中学数学手册

郭绍什

河北人民出版社

一九八一年·石家庄

内 容 提 要

这本手册根据全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案）和中学数学通用教材所规定的内容，参考了国内外的一些书刊资料编写而成。

该书对读者复习和巩固中学学过的数学基础知识，提高运算能力，培养逻辑思维能力和空间想象能力，有一定的帮助。可供各类中等学校的学生学习和复习数学之用，也可供其他有关人员查考。

中学数学手册

郭绍什

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　10 印张　229,000字　印数：136,350　1981年12月第1版

1981年12月第1次印刷　统一书号：7086·1063　定价：0.75 元

目　　录

初 等 代 数

平 面 三 角

平 面 几 何

立 体 几 何

平面解析几何

微 积 分 初 步

初 等 代 数

一、数 的 分 类

- 复数 $(a+bi)$ (a、b都是实数)
  - 实数 $(a+0i=a)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
      - 有限小数或者无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - 无限不循环小数
  - 虚数 $(a+bi,\ b\neq0)$
    - 纯虚数 $(0+bi=bi,\ b\neq0)$
    - 非纯虚数 $(a+bi,\ a\neq0,\ b\neq0)$

二、实　　数

（一）概念

1．**定义**　有理数和无理数总称为实数。

2．**数轴**　规定了方向、原点和单位长度的直线（通常画

成水平方向）叫做数轴。

任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的任何一个点也对应着一个实数。这就是说，数轴上的点和实数之间具有一一对应的关系；或者说，数轴上的点集和实数集之间具有一一对应的关系。

在数轴上原点的两旁，离开原点距离相等的两个点所表示的两个实数，叫做互为相反的数。实数 a 和 $-a$（$a\neq 0$）是互为相反的数。零的相反的数仍是零。

3．**绝对值**　在数轴上表示一个数的点离开原点的距离，叫做这个数的绝对值。

正数和零的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反的数。

$$|a|=\begin{cases} a,（a>0\text{ 时}）; \\ 0,（a=0\text{ 时}）; \\ -a,（a<0\text{ 时}）. \end{cases}$$

（二）运算

1．加法法则

（1）同号两数相加，和的符号与加数的符号相同，和的绝对值等于加数的绝对值的和。

（2）异号两数相加，和的符号与绝对值较大的加数的符号相同，和的绝对值等于加数绝对值的差。

（3）两个互为相反的数相加，和等于零。

（4）零同任何一个数相加，和等于这个数。

（5）几个实数相加，所得的和是一个实数。

有理数集的加法基本运算定律：

交换律　$a+b=b+a$,

结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$，

也都适用于实数集。

2．减法法则

（1）把减数变成它的相反的数后再和被减数相加。

（2）两个数的绝对值和符号都相同，其差是零。

（3）正数或负数减去零，所得的仍是原数；零减去正数或负数，所得的是减数的相反数。

（4）实数的减法是加法的逆运算。

（5）两个实数相减，所得的差是一个实数。

有理数集的减法基本运算关系：

$$+(-a)=-a,$$

$$-(+a)=+(-a)=-a,$$

$$-(-a)=+(+a)=+a,$$

也都适用于实数集。

3．乘法法则

（1）两个实数相乘，积的绝对值等于两个乘数绝对值的积，如果两数同号，积取“+”号，如果两数异号，积取“-”号。

（2）任何一个实数同零相乘，积是零。

（3）几个实数相乘，所得的积是一个实数。

有理数集的乘法基本运算定律：

交换律　$a\cdot b=b\cdot a$，

结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$，

分配律　$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$，

也都适用于实数集。

4．除法法则

（1）把除数（不等于零）变成它的倒数后和被除数相乘。

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}. \quad (b \neq 0)$$

(2) 零被不等于零的有理数除，所得的商是零；零去除不等于零的有理数，是不可能的；零去除零是没有意义的.

(3) 两个实数的除法（除数不等于零）是乘法的逆运算.

(4) 两个实数相除（除数不能是零），所得的商是一个实数.

5．**乘方法则**

(1) 求实数 a 的 n 次方（n 为大于 1 的自然数），就是求 n 个 a 相乘的积.

(2) 正数的任何次方总是正数；任何数（除去零以外）的零次方都是 1；零的任何次方都是零；零的零次方没有意义；负数的奇次方是负数，负数的偶次方是正数.

6．**开方**

(1) 定义　一个有理数的 n 次方（n 为大于 1 的自然数）的值，叫做这个数的幂．求一个数的幂时，这个数叫底数．指明乘方的次数的叫指数．如果有理数 a 的 n 次幂等于有理数 b，那末 b 是 a 的 n 次完全幂.

如果一个数的 n 次幂（n 为大于 1 的自然数）等于 b，那末这个数就叫做 b 的 n 次方根．用符号 $\sqrt[n]{b}$ 来表示．b 的二次方根又叫做 b 的平方根．b 的三次方根又叫做 b 的立方根.

求一个数的方根的运算，叫做开方．求 b 的 n 次方根（n 为大于 1 的自然数），叫做把 b 开 n 次方，b 叫做被开方数，n 叫做根指数．开二次方又叫做开平方，开三次方又叫做开立方.

被开方数和方根都不是负数时的方根，叫做算术根．被开方数和方根都不限于正数或零时的方根，叫做代数根．零的算术根仍是零．负数没有算术根.

(2) 基本性质

在实数集里，每一个实数都有一个并且只有一个奇次方根，正数的奇次方根是正数，负数的奇次方根是负数，零的奇次方根是零。

在实数集里，每一个正数都有两个并且只有两个偶次方根，它们是互为相反的数（如 b 是正数，n 是偶数时，有 $\sqrt[n]{b}$ 和 $-\sqrt[n]{b}$ 两个方根）；负数的偶次方根没有意义；零的偶次方根只有唯一的值，就是零。

【说明】 在有理数集里，开方运算不是总能够进行的。在实数集里，当 $b\geqslant 0$ 时，等式 $\sqrt[n]{b^n}=b$ 总能成立，但当 $b<0$，且 n 是偶数时，这个等式就不能成立。

7．**运算顺序**

如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括号里的数。

三、代 数 式

（一）概念

1．**定义** 用运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号，把用数字和字母（包括只有数字或者只有字母的情形）表示的数连结起来所组成的式子，叫做代数式。单独一个数或表示数的字母，也叫做代数式。

在指定的数的范围里，代数式里字母所容许取的值（即是使代数式有意义的值）的全体，通常叫做这个代数式的定义域（或字母的允许值集）。

用数值代替代数式里的字母运算所得的结果，叫做代数式

的值.

2．含有变量字母代数式的分类

只含有加、减、乘、除和乘方运算的代数式，叫做有理式。没有除法运算或者虽有除法运算而除式里不含字母的有理式，叫做有理整式，简称整式；除式里含有字母的有理式，叫做有理分式，简称分式.

含有开方运算的代数式，叫做含有根号的代数式。根号里含有变量字母的代数式，叫做这个变量字母的无理式.

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

【说明】 一个代数式是数字和字母的积，那末这个数字和每一个字母都是这个代数式的因数.

一个代数式是数字和字母的积，那末这个数字所表的因数叫做字母（或几个字母的积）所表示的因数的系数．系数写在字母的前面.

两个代数式的值如果相等，就说这两个代数式相等，用等号把它们连结起来叫做等式.

等式中的字母，如果用任意的数（除数为零的除外）代入计算，两边总可以相等，这等式叫做恒等式，用符号“≡”表示.

（二）整式

1．定义

没有加减法运算的整式，叫做单项式．单独一个字母或者一个数也当作单项式.

一个单项式里所有字母的指数的和，叫做这个单项式关于这些字母的次数．不等于零的常数叫做零次单项式．0是一个单项式，它没有次数.

几个单项式的代数和，叫做多项式。

在多项式里每个单项式叫做多项式的项．多项式按照它含有的项数来分，可以有二项式，三项式，等等．一个多项式里次数最高的项的次数，就是这个多项式的次数．多项式的次数是几，就叫做几次多项式．多项式里各项的次数相同，就叫做齐次多项式．

多项式里不含字母的项，叫做常数项．多项式里的某些项，如果所含字母相同，并且各个字母的指数也分别相同，那末这些项就叫做同类项．几个常数项也是同类项．

2．运算

（1）单项式的加减法则

几个单项式相加减，只要用加减号把它们连结起来写成代数和的形式，再合并同类项．

几个单项式相加减，实际上只是对同类项的系数进行加减运算．所得的结果是一个整式．

（2）多项式的加减法则

多项式相加减时，先用加减号把它们连结起来写成代数和的形式，再去括号，然后合并同类项．所得的结果是一个整式．

多项式相加减，可以先按照某一个字母的指数由大到小顺次排列（叫做降幂排列），或者由小到大顺次排列（叫做升幂排列），然后进行运算．

（3）同底数的幂的运算法则

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加．

同底数的两个幂相除，如果被除数的指数大于除数的指数，那末底数不变，指数相减；如果被除数的指数等于除数的指数，那末商等于 1；如果被除数的指数小于除数的指数，则

是底数不变，其指数相减并取指数绝对值所得的数的倒数。

一个幂乘方，底数不变，把这个幂的指数乘以乘方的次数。

一个积乘方，先把积的每个因式分别乘方，再把所得的结果相乘。

(4) 单项式乘单项式法则

单项式乘以单项式，把它们的系数的积作为积的系数，把相同字母的指数相加作为积里这个字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里。

单项式相乘所得的结果是一个单项式。

(5) 单项式同多项式相乘法则

多项式同单项式相乘，把多项式的每一项同单项式相乘，再把所得的积相加。

(6) 多项式同多项式相乘法则

多项式同多项式相乘，先把一个多项式的各项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。

(7) 乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

【说明】 根据上述乘法公式可以诱导出很多等式，常见的等式有：

$(a\mp b)^2=(a\pm b)^2\mp 4ab$.

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})$. ($n$ 为正整数)。

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-b^{n-1})$. ($n$ 为偶数)。

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})$. ($n$ 为奇数)。

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd.$

$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$

$(a+b+c)(a-b-c)=a^2-b^2-2bc-c^2.$

$3(b-c)(c-a)(a-b)=(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3.$

$3(b+c)(c+a)(a+b)=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3).$

$$\begin{aligned}(b+c)(c+a)(a+b)&=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\\&=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\\&=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\\&=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+a^3+b^3+c^3.\end{aligned}$$

$(a+b+c)(bc+ca+ab)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2-b^2)(c^2-d^2)&=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2\\&=(ac-bd)^2-(ad-bc)^2.\end{aligned}$$

(8) 单项式除以单项式法则

单项式除以单项式，把系数和相同字母的幂分别相除，被除式单独有的字母的幂移到商里。

(9) 多项式除以单项式法则

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商写成代数和。

(10) 多项式除以多项式

多项式除以多项式一般可以用直式演算，方法同算术里的多位数除法很相象。

(11) 带余式的除法

定理　任何两个多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

和 $$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m,$$

只要$\varphi(x)$不是零多项式，有并且只有一对多项式$q(x)$和$r(x)$，满足条件：

$r(x)$的次数小于m或者$r(x)\equiv0$；

恒等式$f(x)\equiv q(x)\varphi(x)+r(x)$成立。

多项式$q(x)$和$r(x)$分别叫做$f(x)$除以$\varphi(x)$的商式和余式。

定义　设$f(x)$和$\varphi(x)$是两个多项式，如果多项式$\psi(x)$使恒等式

$$f(x)\equiv\varphi(x)\cdot\psi(x)$$

成立，那末我们说$f(x)$能够被$\varphi(x)$整除。

在恒等式

$$f(x)\equiv q(x)\varphi(x)+r(x)$$

中，如果$r(x)=0$，那末

$$f(x)\equiv q(x)\varphi(x).$$

这时$f(x)$能够被$\varphi(x)$整除。

反过来，如果多项式$f(x)$能够被$\varphi(x)$整除，那末$r(x)=0$。

多项式$f(x)$能够被$\varphi(x)$整除的充要条件是$r(x)=0$。

余数定理　多项式$f(x)$除以$x-a$所得的余数等于$f(a)$。

推论　多项式$f(x)$能够被$(x-a)$整除的充要条件是$f(a)=0$。

做综合除法时，应注意：

如果遇到多项式有缺项，就必须把这一项等于零的系数写出来；

如果遇到除式是$x+a(a>0)$的形式，就先把$x+a$化成