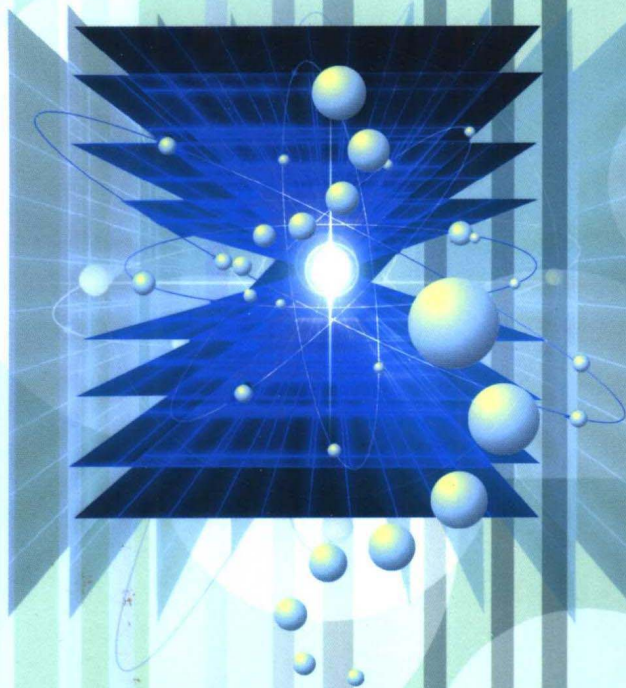


王仕璠 编著

信息光学理论

XINXI GUANGXUE LILUN YU YINGYONG

与应用



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

信息光学理论与应用

王仕璠 编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书系统地介绍信息光学基础理论及相关的应用。全书共 11 章,内容涉及二维傅里叶分析、标量衍射理论、光学成像系统的频率特性、部分相干理论、光学全息照相、空间滤波、相干光学处理、非相干光学处理、全息干涉度量学、散斑计量学、云纹法与云纹干涉法等。

本书内容丰富,选材新颖,既系统介绍基础理论,又同时兼顾理论和技术的当前发展,并强调理论与应用的结合。书中精选了 100 余个例题和习题,并给出了大部分的详细解答,便于读者加深对正文的理解。

本书读者对象为光学、光电子技术、光信息科学与技术、应用物理、精密仪器、光学工程等专业的低年级本科生和研究生,也可供相关专业的工程技术人员和高校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

信息光学理论与应用/王仕璠编著—北京:北京邮电大学出版社,2003

ISBN 7-5635-0820-1

I. 信… II. ①王… III. 信息光学 IV. 0438

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 106381 号

出 版 者:北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)

邮 编:100876 (发行部)电话:62282185 传 真:62283578

电子信箱:publish@bupt.edu.cn

经 销:各地新华书店

印 刷:北京源海印刷有限责任公司

印 数:1—3 000 册

开 本:787 mm×1092 mm 1/16

印 张:23

字 数:583 千字

版 次:2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0820-1/TN·313

定 价:35.00 元

如有质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

前 言

本书是在作者多年从事信息光学教学和科研的基础上写成的。信息光学是一个很宽的研究领域,其发展也十分迅速。作为一本大学教材,要全面介绍信息光学各方面的最新成果似乎有一定的困难,篇幅和授课学时数都不允许这样做。相反,学生在学习阶段打下良好的理论基础却是十分必要的。有了这些基础,再去阅读最新的相关文献应该不会感到太多的困难。因此,作者把本书的重点放在系统介绍信息光学的基础理论及其相关的应用技术,同时兼顾理论和技术的当前发展。全书大体是这样安排的:前几章着重讨论理论基础,力图使读者在较短的时间内掌握信息光学最基本的原理以及当前的一些发展概况;后几章则是介绍在若干领域的应用。为了让读者更好领会书中所讨论的内容,全书列举了100余个例题和习题,并给出了大部分习题的详细解答列在书末,供读者参考。

作者在平时的教学过程中以及在撰写本书时,曾参考了国内外已出版的多部相关教材和专著,并从中获得很多教益。在此,特向这些教材或专著的作者们(恕不一一列出)致以深切的谢意!

最后,作者衷心感谢北京邮电大学出版社对本书出版给予的支持;也衷心感谢电子科技大学研究生院和教务处对作者本人在长期从事信息光学教学工作中的支持、帮助和鼓励。

中国光学学会全息与光信息处理专业委员会主任、南京理工大学博士生导师贺安之教授为本书提供了他们科研中的最新成果照片;电子科技大学物理电子学院刘艺副教授帮助打印了本书部分手稿,周均仁同志帮助拍摄了部分插图照片,研究生王刚、韩振海、刘秋武、向根祥等帮助查阅了部分参考文献资料。在此作者也向他们表示衷心的感谢!

由于作者水平所限,书中缺点和错误在所难免,恳切期望读者批评指正。

作者谨识

2003年12月1日

目 录

前 言

第 1 章 二维傅里叶分析

1-1 光学中常用的几种非初等函数	1
1-2 δ 函数	6
1-3 卷 积	11
1-4 相 关	18
1-5 傅里叶变换的基本概念	23
1-6 二维傅里叶变换的基本定理	28
1-7 傅里叶-贝塞尔变换	31
1-8 常用傅里叶变换对	34
1-9 线性系统与线性空不变系统	36
1-10 二维抽样定理	41
习 题	46
参考文献	48

第 2 章 标量衍射理论

2-1 引 言	49
2-2 基尔霍夫衍射理论	50
2-3 衍射规律的频域表达式	56
2-4 菲涅耳衍射与夫琅和费衍射	59
2-5 夫琅和费衍射计算实例	62
2-6 菲涅耳衍射计算实例	73
2-7 衍射的巴俾涅原理	80
习 题	81
参考文献	83

第 3 章 光学成像系统的频率特性

3-1 透镜的傅里叶变换性质	84
3-2 光学成像系统的一般分析	91
3-3 衍射受限相干成像系统的传递函数	97
3-4 衍射受限非相干成像系统的传递函数	101
3-5 相干成像与非相干成像系统的比较	111
习 题	113

参考文献	116
第 4 章 部分相干理论	
4-1 光场相干性的一般概念	117
4-2 互相干函数	124
4-3 准单色光的干涉	128
4-4 范西特-泽尼克定理	135
习 题	138
参考文献	139
第 5 章 光学全息照相	
5-1 全息照相的基本原理	140
5-2 菲涅耳全息图	144
5-3 全息记录介质	149
5-4 全息照相装置及实验注意事项	157
5-5 傅里叶变换全息图	160
5-6 像全息图 彩虹全息图	164
5-7 体积全息图	167
5-8 模压全息图	171
5-9 全息照相的应用	173
习 题	182
参考文献	183
第 6 章 空间滤波	
6-1 空间滤波的基本原理	186
6-2 空间滤波器的结构类型和应用举例	195
6-3 暗场法与纹影法	198
习 题	201
参考文献	202
第 7 章 相干光学处理	
7-1 图像相减	204
7-2 匹配滤波与光学图像识别	206
7-3 用梅林变换作光学相关	209
7-4 用圆谐变换实现光学相关	211
7-5 联合变换相关器	212
7-6 半色调网屏技术	214
7-7 其他相干光学处理	218
习 题	221
参考文献	222

第 8 章 非相干光学处理

8-1 相干与非相干光学处理的比较	224
8-2 基于几何光学的非相干处理系统	225
8-3 基于衍射的非相干处理——非相干频域综合	228
8-4 白光信息处理	231
8-5 位相调制假彩色编码	236
习 题	239
参考文献	240

第 9 章 全息干涉度量学

9-1 全息干涉计量的原理和基本方法	241
9-2 定义与数学基础	247
9-3 用二次曝光法测定三维位移场	251
9-4 刚体运动的全息测定	259
9-5 测定物体应变的条纹矢量理论	266
9-6 全息振动分析	276
参考文献	282

第 10 章 散斑计量学

10-1 引 言	284
10-2 散斑效应的基本统计特性	285
10-3 用二次曝光散斑图测面内位移	291
10-4 用多张散斑图测空间位移	293
10-5 用时间平均散斑图分析振动	298
10-6 用散斑摄影研究位相物体	300
10-7 散斑干涉计量	302
10-8 散斑条纹图样的计算机处理	308
习 题	311
参考文献	312

第 11 章 云纹法与云纹干涉法

11-1 面内云纹法的基本概念	314
11-2 衍射光栅云纹干涉法	321
参考文献	328

附录 1 贝塞尔函数关系式表	329
----------------------	-----

附录 2 部分习题答案	330
-------------------	-----

第 1 章

二维傅里叶分析

自 20 世纪 40 年代后期起,由于通信理论中“系统”的观点和数学上的傅里叶分析(频谱分析)方法被引入光学,更新了传统光学的概念,丰富了光学学科的内容,并形成现代光学的一个重要分支——傅里叶光学(Fourier Optics)。

作为系统,无论是通信系统还是光学系统,它们都是用来把收集到的信息转换成人们所需要的输出信息,只不过通信系统传递和转换的信息是随时间变化的函数(例如被调制的电压和电流波形),而光学系统传递和转换的信息(光场的复振幅分布或光强度分布)则是随空间变化的函数。在数学上,这两者之间没有实质性的差别。近年来,随着光纤通信和相应元器件(例如半导体激光器和接收器等)的出现,进一步促进了光学与通信理论和技术的结合。傅里叶光学促进了图像科学、应用光学、光纤通信和光电子学的发展。可以认为它是光学、光电子学、信息论和通信理论的交叉科学,也是信息光学在各种应用领域中的数理基础。

本章的重点是介绍傅里叶光学中广泛用到的一些数学知识。在内容的选择和数学概念的引入上,密切结合光学现象而不拘泥于数学上的系统性和严密性,希望这样会有利于读者能较快地掌握和运用这些数学工具来处理问题,从而避免了由于繁琐的数学论证和运算而淡化傅里叶光学内容的物理实质和实用性。

1-1 光学中常用的几种非初等函数

在傅里叶光学中,有一些广泛使用的非初等函数,被用来描述各种物理量。掌握它们的定义,熟悉它们的图像,常常会对分析、理解诸多光学现象带来很多方便。为此,首先介绍它们的定义和性质,并给它们各自指定专门的符号,为以后的讨论节省许多篇幅。

一、矩形函数

一维矩形函数(Rectangle Function)定义为:

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-1)$$

式中, $a > 0$,其函数图形如图 1-1-1 所示。

该函数以坐标原点为中心,在宽度为 a 的区间内其值等于 1。

在时间域中,当用 x 代表时间变量时,光学中可以用一维矩形函数来描写照相机快门,定义式(1-1-1)中的 a 便是曝光时间;也可以用该函数来描述空间域中无限大不透明屏上单缝的透过率,故一

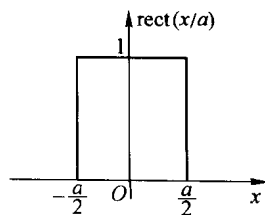


图 1-1-1 一维矩形函数

维矩形函数也称为门函数(Gating Function)。同时,它与某函数相乘后,可限制该函数自变量的取值范围,起到截取函数的作用。例如乘积 $\cos x \cdot \text{rect}(x/a)$ 表示余弦函数只出现在区间 $(-a/2, +a/2)$ 上。

二维矩形函数的定义为:

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-2)$$

其中, $a > 0, b > 0$ 。

该函数可视为二个一维矩形函数的乘积,它在 xOy 平面上以原点为中心的 $a \times b$ 矩形区域内,函数值为 1,其他地方处处等于 0,如图 1-1-2 所示。二维矩形函数可用来描述无限大不透明屏上矩形孔的透过率。

二、sinc 函数

一维 sinc 函数定义为:

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a} \quad (1-1-3)$$

式中, $a > 0$ 。

该函数在原点处有最大值 1,而在 $x = \pm na (n=1, 2, 3, \dots)$ 处的值等于 0,其函数图形如图 1-1-3 所示。原点两侧第一级零点之间的宽度(称为 sinc 函数的主瓣宽度)为 $2a$,并且它的面积(包括正波瓣和负波瓣)刚好等于 a 。

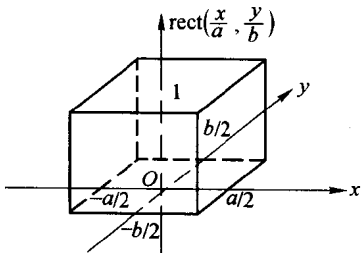


图 1-1-2 二维矩形函数

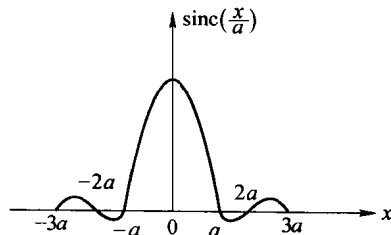


图 1-1-3 一维 sinc 函数

二维 sinc 函数定义为:

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (1-1-4)$$

式中, $a > 0, b > 0$ 。

该函数可视为二个一维 sinc 函数的乘积,零点位置在 $(\pm ma, \pm nb)$, m, n 均为正整数,其函数图形如图 1-1-4 所示。

由基础光学中知道, sinc 函数可用来分别描述单缝和矩孔的夫琅和费衍射的振幅分布,其平方表示衍射图样。由于 sinc 函数与矩形函数(单缝、矩孔的透过率)之间的这种紧密联系,致使它们在傅里叶光学中经常用到。

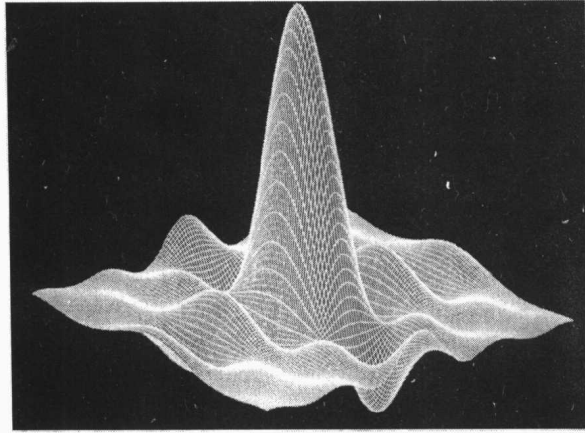


图 1-1-4 二维 sinc 函数

三、阶跃函数

一维阶跃函数(Step Function)定义为:

$$\text{step}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0 & \frac{x}{a} < 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{x}{a} = 0 \\ 1 & \frac{x}{a} > 0 \end{cases} \quad (1-1-5)$$

其函数图形如图 1-1-5 所示。

该函数在原点 $x=0$ 处有一个间断点,取值为 $\frac{1}{2}$,因此在这种情况下讨论函数的宽度是没有意义的。不过,这种定义方式只是为了与本节后面的符号函数相呼应,对实际计算来说,这种间断点处的情况无关紧要,通常无需考虑。

将一维阶跃函数与某函数相乘时,在 $x>0$ 的部分,乘积等于该函数;在 $x<0$ 的部分,乘积恒等于 0,因而一维阶跃函数的作用如同一个“开关”,可在某点“开启”或“关闭”另一个函数。例如乘积 $\cos(2\pi x) \cdot \text{step}(x)$,对 $x<0$ 恒等于 0,而对 $x>0$ 则是 $\cos(2\pi x)$ 。

二维阶跃函数定义为:

$$f(x, y) = \text{step}(x) \quad (1-1-6)$$

上式表明,这里定义的二维阶跃函数在 y 方向上等于常数,而在 x 方向上等同于一维阶跃函数,其函数图形如图 1-1-6 所示。这种函数可用来描述光学直边(或刀口)的透过率。

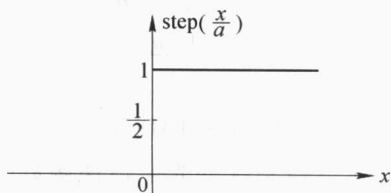


图 1-1-5 一维阶跃函数

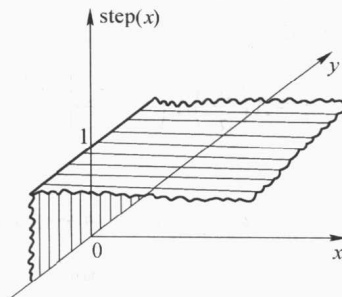


图 1-1-6 二维阶跃函数

四、符号函数

一维符号函数(Signum Function)定义为:

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases} +1 & \frac{x}{a}>0 \\ 0 & \frac{x}{a}=0 \\ -1 & \frac{x}{a}<0 \end{cases} \quad (1-1-7)$$

其函数图形如图 1-1-7 所示。

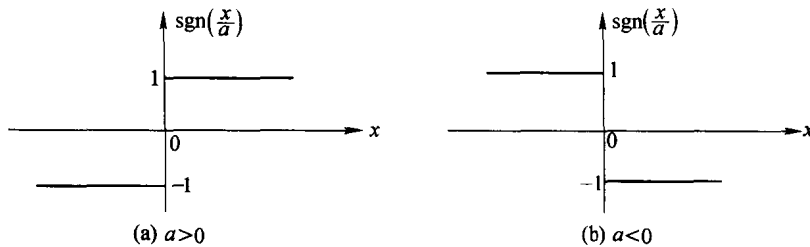


图 1-1-7 符号函数

符号函数与一维阶跃函数之间存在下列关系式:

$$\operatorname{sgn}(x)=2 \operatorname{step}(x)-1 \quad (1-1-8)$$

和阶跃函数的情况一样,宽度和面积的概念是没有意义的。而 a 的正负仅仅决定函数的取向。

符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 与某函数相乘,可使该函数在某点的极性(正负号)发生翻转。例如某孔径的一半嵌有 π 位相板,则可利用符号函数来描述此孔径的复振幅透过率。

五、三角形函数

一维三角形函数(Triangle Function)定义为:

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases} 1-\frac{|x|}{a} & \frac{|x|}{a}<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-9)$$

式中 $a>0$,函数图形如图 1-1-8(a)所示。

该函数可视为底边宽度为 $2a$ 、高度为 1 的三角形。

二维三角形函数定义为:

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)=\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\Lambda\left(\frac{y}{b}\right)=\begin{cases} \left(1-\frac{|x|}{a}\right)\left(1-\frac{|y|}{b}\right) & \frac{|x|}{a}, \frac{|y|}{b}<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-10)$$

式中, $a>0, b>0$ 。

该函数可视为两个一维三角形函数的乘积,其函数图形如图 1-1-8(b)所示。

二维三角形函数可用来表示一个光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数(详见第 3 章)。

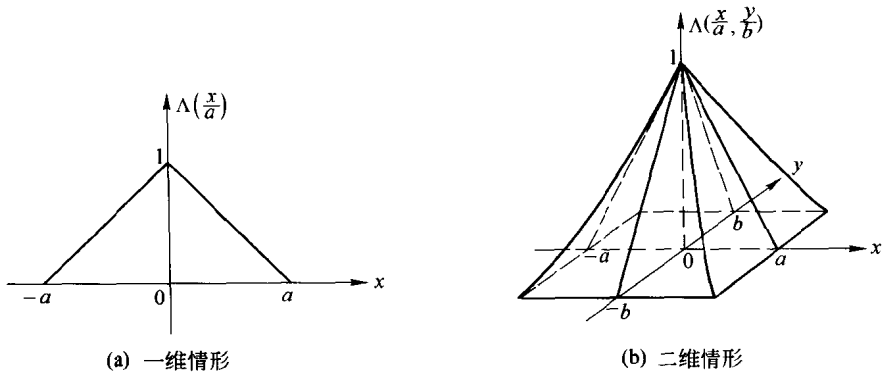


图 1-1-8 三角形函数

六、高斯函数

一维高斯函数(Gaussian Function)定义为:

$$\text{Gauss}\left(\frac{x}{a}\right) = e^{-\pi\left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (1-1-11)$$

式中, $a > 0$ 。

该函数图形如图 1-1-9(a)所示,指数中加入因子 π ,是为了使高斯函数曲线的中央高度具有最大值 1,曲线下的面积等于 a 。

二维高斯函数定义为:

$$\text{Gauss}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \exp\left\{-\pi\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\right\} \quad (1-1-12)$$

式中, $a, b > 0$ 。

该函数图形如图 1-1-9(b)所示,函数曲线下的体积等于 ab 。若 $a=b=1$,则二维高斯函数可表示成:

$$\text{Gauss}(x, y) = \exp[-\pi(x^2 + y^2)] \quad (1-1-13)$$

若用极坐标表示,则令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,便有:

$$\text{Gauss}(r) = e^{-\pi r^2} \quad (1-1-14)$$

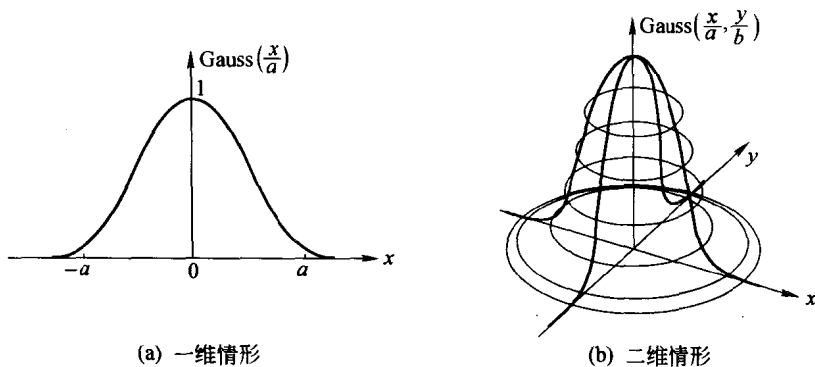


图 1-1-9 高斯函数

高斯函数具有下列重要性质:

- ① 它是光滑函数,且其各阶导数都是连续的。
- ② 高斯函数的傅里叶变换也是高斯函数。

高斯函数常用来描述激光器发出的高斯光束,有时也用于光学信息处理中的“切趾术”(详

见第 8 章)。

七、圆域函数

圆域函数(Circle Function)在直角坐标系中写成 $\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\right)$, 在极坐标系中写成 $\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)$,

其定义如下:

$$\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\right) = \begin{cases} 1 & r = \sqrt{x^2+y^2} \leq r_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-15)$$

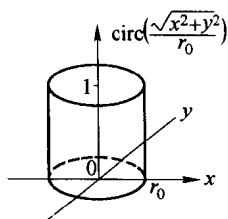


图 1-1-10 圆域函数

其函数图形如图 1-1-10 所示, 呈圆柱形, 其圆柱半径为 r_0 , 高度等于 1。圆域函数可用来描述无限大不透明屏上圆孔的透过率。

至此, 已介绍了光学中几种常用的非初等函数的定义式。这些定义式可看作是各函数的标准形式, 相应的图形也可看作是标准图形。如果这些图形的位置、宽度或高度有所变化, 则可看作是标准图形的相应位移或相应坐标比例尺缩放, 故相应的函数表达式也不难由其标准式导出。图 1-1-11 给出了 3 个实例。

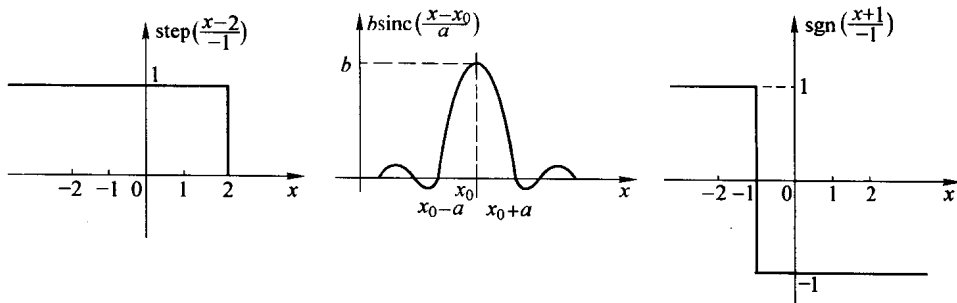


图 1-1-11 函数发生位移后的情况

1-2 δ 函数

一、 δ 函数的定义

δ 函数(Delta Function)是由 P. A. M. Dirac 在 1930 年引入的, 故称为狄拉克 δ 函数, 在物理学和工程技术中常用来描述一种极限状态。

δ 函数的定义有许多种形式, 下面仅给出两种最常用的形式。

定义 1 (积分表达式)

$$\begin{cases} \delta(x-x_0, y-y_0) = \begin{cases} \infty & x=x_0, y=y_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0, y-y_0) dx dy = 1 \end{cases} \quad (1-2-1)$$

定义 2 (函数序列表达式)

若存在函数序列 $f_N(x, y)$, 且满足条件:

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x, y) = \begin{cases} \infty & x=0, y=0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{-\infty}^{\infty} f_N(x, y) dx dy = 1 \end{cases} \quad (1-2-2)$$

则

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x, y)$$

定义 1 表明 δ 函数不是普通的函数, 它不像普通函数那样全由数值对应关系确定。实际上, δ 函数是一个广义函数 (Distribution), 其属性完全由它在积分中的作用表现出来。然而, 从应用角度看, 可以把 δ 函数与普通函数联系起来, 用普通函数描述它的性质。

定义 2 表明 δ 函数可以用一个函数序列 $f_N(x, y)$ 的极限来表示, $f_N(x, y)$ 的具体形式可以是多种多样的, 表 1-2-1 列出了几种表示 δ 函数的函数序列及其极限。这些函数序列都可作为 δ 函数的定义式, 其中前 3 个可在直角坐标系中进行分离变量, 而后两个则是圆对称的。应用时可方便地选用对该问题最适合的定义式。

表 1-2-1 几种表示 δ 函数的函数序列及其极限

函 数	一 维	二 维
矩形函数	$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{rect}(Nx)$	$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{rect}(Nx) \text{rect}(Ny)$
高斯函数	$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \exp(-N^2 \pi x^2)$	$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi (x^2 + y^2)]$
sinc 函数	$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{sinc}(Nx)$	$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{sinc}(Nx) \text{sinc}(Ny)$
圆域函数		$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{\pi} \text{circ}(N \sqrt{x^2 + y^2})$
贝塞尔函数		$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{J_1(2\pi N \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

图 1-2-1 是按照表 1-2-1 中前两种函数序列绘制的图形, 随着 N 的增大, 所取的矩形函数和高斯函数对应的曲线变得越来越窄, 峰值则越来越高, 而曲线覆盖的面积始终保持等于 1。当 $N \rightarrow \infty$ 时, 函数曲线趋于无限大。因此在作图时也可简单地用图 1-2-2 所示的一个箭头表示 δ 函数。

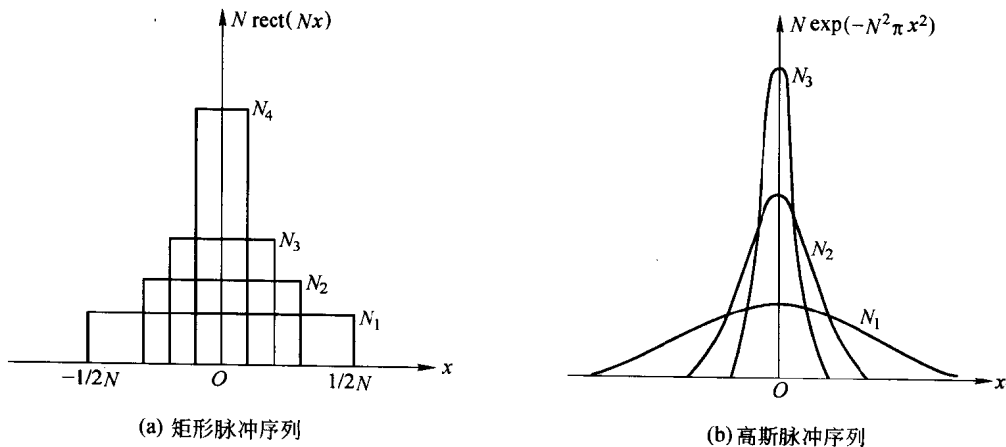
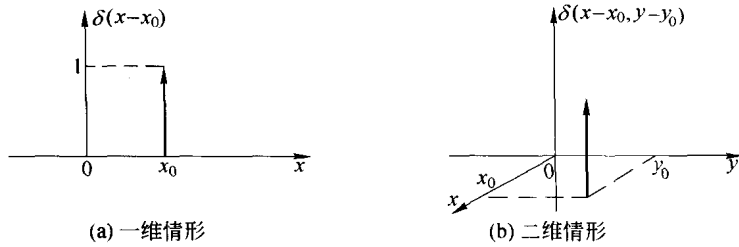
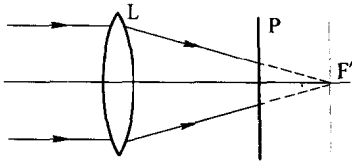


图 1-2-1 两种表示 δ 函数的函数序列

图 1-2-2 δ 函数表示

二、 δ 函数的物理意义

δ 函数常用来描述脉冲状态这样一类物理现象。时间变量的 δ 函数用来描写单位能量的瞬间电脉冲；空间变量的 δ 函数可以描写诸如单位质量的质点的质量密度，单位电量的点电荷的电荷密度，单位光通量的点光源的面发光度等等。作为例子，考察平行光束通过透镜后会聚于焦点时的照度分布，如图 1-2-3 所示。图中， L 是一个理想会聚透镜，平行光束通过透镜后会聚于焦点 F' ，在 L 与焦平面之间放置一个与透镜轴线垂直的屏 P ，假设透镜孔径的衍射可以忽略，这时屏上得到一个界限清晰的圆形亮斑，随着屏 P 向后焦面趋近，亮斑的直径越来越小，屏上的照度 $A(x, y)$ (单位面积所接收的光通量) 越来越大，在屏与后焦面完全重合这种极限情况下，屏上 F' 点的照度已无法用普通函数来描述了，它在焦点处的值为无限大，在焦点以外为 0。换言之，后焦面上的照度分布 $A(x, y)$ 满足以下两个方程：

图 1-2-3 用 δ 函数表示后焦面上的照度分布

$$\begin{cases} A(x, y) = \begin{cases} \infty & x = 0, y = 0 \\ 0 & x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \\ \iint_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx dy = \text{常量 (通过透镜的全部光通量)} \end{cases} \quad (1-2-3)$$

如果将通过透镜的光通量归一化，则上式与式 (1-2-1) 相同，即后焦面上的照度分布可用 $\delta(x, y)$ 描述。类似地也可分析由空间任一点 $P(\mathbf{r}_a)$ 处的点光源所发出的面发光度 $L_a(\mathbf{r})$ ：当包围该点的封闭面无限缩小时，其面发光度达到无穷大，而总光通量是有限的，故有：

$$\begin{cases} L_a(\mathbf{r}) = F_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \\ \iint_{-\infty}^{\infty} L_a(\mathbf{r}) dS = \iint_{-\infty}^{\infty} F_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) dS = F_a \end{cases} \quad (1-2-4)$$

式中 F_a 表示由点光源发出的全部光通量。所以，一般在光学中就用 $\delta(x - x_0, y - y_0)$ 来直接表示在平面上 (x_0, y_0) 点的点光源。在一维情况下， $\delta(x - x_0)$ 就表示在 $x = x_0$ 处的一个线光源 (或无限细的狭缝)。

三、 δ 函数的性质

在 Dirac 引入 δ 函数 20 多年后，其严格的理论才由 L. Schwarz 发展起来。这里不加证明，仅列出 δ 函数的几个基本性质。

1. 筛选特性 (Sifting Property)

若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续，则有：

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (1-2-5)$$

δ 函数的这一性质使我们在分析线性系统时,几乎把一切函数都可以分解成 δ 函数的线性组合,而每一个这样的 δ 函数都产生它自己的脉冲响应。

2. 可分离变量 (Separable Variable)

在直角坐标系下,有

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (1-2-6)$$

而在极坐标系下,相应的表达式为:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\delta(r - r_0)}{r} \cdot \delta(\theta - \theta_0) \quad r_0 > 0, 0 < \theta_0 < 2\pi \quad (1-2-7)$$

式中, r 与 r_0 分别是相应于点 (r, θ) 和点 (r_0, θ_0) 的矢径,并且

$$\begin{cases} r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} & (r_0 > 0) \\ \theta_0 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) & (0 < \theta_0 < 2\pi) \end{cases} \quad (1-2-8)$$

同时

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \delta(r - r_0) dr = 1 & (r_0 > 0) \\ \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_0) d\theta = 1 & (0 < \theta_0 < 2\pi) \end{cases} \quad (1-2-9)$$

3. 乘法性质

设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续,则有:

$$f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (1-2-10)$$

推论:

- ① $f(x, y) \delta(x, y) = f(0, 0) \delta(x, y)$
- ② $\delta(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = 0 \quad (x_0 \neq 0, y_0 \neq 0)$
- ③ $\delta(x, y) \delta(x, y)$ 无定义

4. 坐标缩放 (Scaling)

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta(x, y) \quad (1-2-11)$$

式中, a, b 为任意实常数。

推论:

$$\textcircled{1} \delta(ax - x_0) = \frac{1}{|a|} \delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right) \quad (1-2-12)$$

$$\textcircled{2} \delta(-x) = \delta(x) \quad (1-2-13)$$

故 δ 函数是偶函数。

5. 积分形式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x d\omega \quad (1-2-14)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega x} d\omega \quad (1-2-15)$$

式(1-2-14)表明: δ 函数可以由等振幅的所有频率的正弦波(用余弦函数表示)来合成,换言之, δ 函数可以分解成包含所有频率的等振幅的无数正弦波。这一概念对于理解某些光学现象是很重要的。式(1-2-14)和(1-2-15)的证明留待本章习题中进行。

6. 微分形式

引入符号 $\delta^{(1)}(x) = \frac{d\delta(x)}{dx}$, 则有:

$$\textcircled{1} \delta^{(1)}(x) = 0 \quad x \neq 0 \quad (1-2-16 \text{ a})$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(1)}(x) dx = 0 \quad (1-2-16 \text{ b})$$

$$\textcircled{3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(1)}(x) f(x) dx = -f^{(1)}(0) \quad (1-2-16 \text{ c})$$

式中, $f(x)$ 有界且在 $x=0$ 处可微。

$$\textcircled{4} x\delta^{(1)}(x) = -\delta(x) \quad (1-2-16 \text{ d})$$

进一步, 令 $\delta^{(m)}(x) = \frac{d^{(m)}(x)}{dx^m}$, 则对 $\delta(x)$ 的 m 阶导数有:

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(x) dx = 0 \quad m > 0 \quad (1-2-17 \text{ a})$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(x) f(x) dx = (-1)^m f^{(m)}(0) \quad (1-2-17 \text{ b})$$

式中, $f(x)$ 有界且在 $x=0$ 处至少可微 m 次。

$$\textcircled{3} \frac{(-1)^m x^m}{m!} \delta^{(m)}(x) = \delta(x) \quad (1-2-17 \text{ c})$$

现在仅对式(1-2-17b)证明如下。

首先, 仿照式(1-2-2)将 δ 函数定义为普通函数序列的极限, 即令 $\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x)$, 且 $g_N(x)$ 至少可微 m 次, 并定义

$$\delta^{(m)}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N^{(m)}(x)$$

因式(1-2-17b)中 $f(x)$ 有界且在 $x=0$ 处至少可求导 m 次, 于是按照分部积分法, 有:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(1)}(x) f(x) dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_N^{(1)}(x) f(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ g_N(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g_N(x) f^{(1)}(x) dx \right\} \end{aligned}$$

由 $g_N(x)$ 与 $f(x)$ 的性态可知:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ g_N(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right\} = 0$$

故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(1)}(x) f(x) dx &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_N(x) f^{(1)}(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f^{(1)}(x) dx = -f^{(1)}(0) \end{aligned}$$

依此类推可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_N^{(2)}(x) f(x) dx = (-1)^2 f^{(2)}(0)$$

重复上述过程, 最后有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(x) f(x) dx = (-1)^m f^{(m)}(0)$$

四、梳状函数

前已指出, δ 函数可用来描述线光源或点光源, 若在同一条直线上排列无穷多个等距离的这样的点光源, 则可用该直线上无穷多个等间距的 δ 函数之和来表示。同样, 若在一个平面上