高等学校教材

经济数学教程

（上 册）

微积分·线性代数·概率统计

曹炳元 主编

JJSXJC

天津科技翻译出版公司

高等学校教材

经济数学教程

（上册）

微积分·线性代数·概率统计

曹炳元　李　鹰
李绍宏　蔡碧野　编著
侯振挺　主　审

天津科技翻译出版公司

津新登字（90）010 号
责任编辑　姜凤星

内 容 简 介

《经济数学教程》包括上、下两册。本册为上册，它是根据国家教委新审定的“教学大纲”编写的。全册分三篇：第一篇，微积分，包括函数，极限与连续，一元函数的微分学及应用，一元函数的积分学——不定积分、定积分，无穷级数，多元函数的微积分，微分方程和差分方程。第二篇，线性代数，包括行列式，矩阵，线性方程组，向量空间，矩阵的特征值与特征向量，二次型。第三篇，概率统计，包括随机事件和概率，随机变量的分布与数字特征，随机向量，抽样分布，统计估计，假设检验和回归分析。本册紧扣“教学大纲”，既保持学科上的系统性和科学性，又有教学上的灵活性和适用性。既有一定的理论深度，又紧密结合经济管理实际。全书贯彻“少而精”和“循序渐进”的原则，概念论述深入浅出，论证删繁就简。各章配有一定量难易适度的习题，书末附有习题答案。本册可作为高等学校或各类成人高校财经、管理、外贸等专业的教科书，也可作为经济管理人员的自学读物。

经济数学教程（上）
微积分·线性代数·概率统计
曹炳元　李鹰　李绍宏　蔡碧野编著
*
天津科技翻译出版公司出版
（邮政编码　300192）
新华书店天津发行所发行
长沙铁道学院印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/16　字数：730千字
总印张：43.75　上册印张：28.75
1994年8月第1版　1994年8月第1次印刷
印数：1—2500册

ISBN7—5433—0662—x O·28

上册定价：17.50元

序　言

在现代经济管理中，数学起着越来越大的作用。我们注愿到，相当一部分诺贝尔(Nobel)经济学奖的得主，其实就是数理经济学家，他们的获奖项目，均包含异常丰富的数学内容。越来越多的事实表明：经济数量方面的研究将越来越重要。财经管理类专业的学生，学好经济数学，将具有不可估量的优势。

为了使学生在学习经济学、管理学等课程时具备扎实的数学基础知识，并说明这些知识与经济学、管理学的密切关系，我们编著了这套《经济数学教程》，分上、下两册出版。上册包括：微积分、线性代数、概率统计三篇；下册包括：线性规划和模糊数学两篇。

本书之所以定名为“经济数学教程”，是基于如下两点：一是因为它是数学教材。二是因为它是一套与经济管理密切相关的数学书。因此，即使一些普通数学教科书一定要讲的，但与经济学几乎无关的部分，本书也要割爱；反之，即使普通数学教科书中没有的内容，只要是在经济学中比较重要的都已编写进来。

本书上册是根据国家教委最近审定的高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲，并参照国家教委新近制定的经济学硕士研究生考试数学考试大纲的要求编写的。全册共分三篇，内容紧扣教学大纲，既保持学科上的系统性和科学性，又有教学上的灵活性和适用性。第一篇微积分，内容为：函数，极限与连续，一元函数的微分学，一元函数的微分学的应用，一元函数的积分学——不定积分、定积分，级数，多元函数微积分学，微分方程和差分方程，共十章，讲授课时的上限为102课时。第二篇线性代数，内容为：行列式，矩阵，线性方程组，向量空间，矩阵的特征值与特征向量和二次型，共六章，讲授课时的上限为51课时。第三篇概率统计，内容为：随机事件与概率，随机变量的分布与数字特征，随机向量，抽样分布，统计估计，假设检验和回归分析，共七章，讲授课时的上限为51课时。书中的“*”号部分，可根据教学需要和学时安排决定取舍。

全册参考了国内外多种《经济数学》教材和本系《经济数学》油印讲义，反复斟酌，几易其稿，试图集百家之所长，力求贯彻“少而精”和“循序渐进”的原则，概念论述深入浅出，论证删繁就简。对概念和理论知识按“知道”、“了解”和“理解”三级区分来取舍；对运算、方法和技巧方面的知识按“会或能”、“掌握”和“熟练掌握”三级区分来编写。因而使本书既保持一定的理论深度，又力求紧密结合教学和经济、管理实际。各章配有一定量的难易适度的习题，书末附有习题答案。

本书可作为经济、财会、贸易和管理等专业的大学本科、专科学生的教科书，亦可作为各级财经类成人高校（电大、函大、职大、夜大和自学考试等）的教材或教学参考书。同时，也是经济管理工作者的一本有价值的自学读物。

参加本册编写的有：曹炳元（第一篇：§1.1，§9.4，§10.4；第三、四、五、六章；第二篇：第一、二章；第三篇：第七章）。李鹰（第一篇：§1.2～§1.6；第二、七、八章；§9.1～§9.3，§10.1～10.3）。李绍宏（第三篇：第一、二、三、四、五、六章

野（第二篇：第一、四、五、六章）老师。曹丙元担任主编和主纂，李鹰、李绍宏和蔡碧野担任副主编。

本册由侯振挺教授主审。借此机会，作者对侯教授和长沙铁道学院肖果能教授的审稿表示诚挚的感谢。对支持本书编写的本学院领导，教务处、数学系等有关部门表示衷心地感谢。本书的出版与发行，得到了天津科技翻译出版公司的鼎力相助，在此一并致以谢忱。

由于作者的才疏学浅，加之时间仓促，书中缺点错误在所难免，恳祈读者指正。

编著者

一九九四年五月一日于长沙

目　录

第一篇　微积分

第二篇 线性代数

第三篇 概率统计

附　　录

第一篇 微 积 分

第一章 函 数

§1.1 预备知识

1. 集 合

(1) 集合的概念

具有某种属性的事物的全体，或者是一些确定对象的汇总，称为集合，通常用大写字母 A、B、$C\cdots$表示。构成集合的事物或对象，称为集合的元素，通常用小写字母 a、b、$c\cdots$表示。

例1 把自然数1，2，…看成一个整体便形成一个集合，记为$N=\{1, 2, \cdots\}$，N是自然数集，每个自然数1，2，…就是集N的元素。

例2 方程 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 的根1，2，3组成一个集合，记为

$$A=\{x \mid x^3-6x^2+11x-6=0\},$$

其元素是x，它是方程的根。事实上$A=\{1, 2, 3\}$。

一般有两种表示集合的方法：1° 列举法；2° 描述法。

具有属性$p(x)$的元素 x_1，x_2，…，x_n 所组成的集合可表示为$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，称为列举表示法（集合中的元素也可以是无限的，如自然数集N）。亦可表示为

$$X=\{x \mid p(x)\},$$

称为描述表示法。

元素与集合是不同层次的概念，它们只有属于或不属于的关系，即 $x\in A$ 或 $x\bar{\in} A$。集合与集合之间有包含和相等的关系。

如果

$$x\in A，有x\in B,$$

则称A是B的子集，记为$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“A被B包含”或“B包含A”。

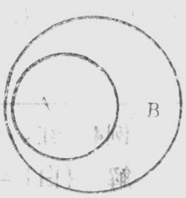


图 1-1

若A是B的子集并且B中至少有一个元素不在A中，则称A为B的真子集，记为$A\subset B$，如图1-1。

如果$A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则称A等于B，记为$A=B$。

没有元素的集合称为空集，记为ϕ。如$\{x \mid x+1=x+2\}=\phi$。

$\{0\}$是以零为元素的集合，$\{\phi\}$是以空集“ϕ”为元素的集合，但都不是空集。

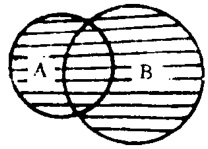
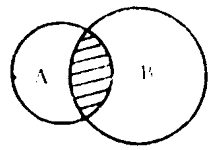
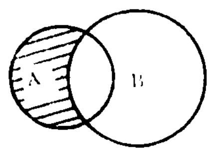
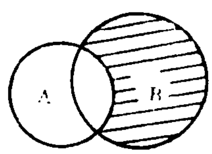
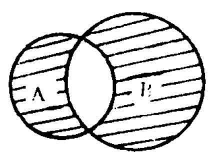
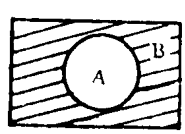
在特定的问题中，被讨论的对象的全体称为论域，整个论域称为全集，用U表示。

(2) 集合的运算

例3 设集合$A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{a, b, g, h, i\}$，由A和B的所有元素构成的集合，称为A与B的并，记为：$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$；

由A和B所有公共元素构成的集合，称为A与B的交，记为：$A\cap B=\{a,\ b\}$。

集合的运算和数的运算是不相同的，可以用文氏图来帮助理解。

名称	定义	文氏图	范例
并（和）	$A\cup B$ $=\{x\mid x\in A或x\in B\}$		$\{2,\ 3\}\cap\{3,\ 5\}$ $=\{2,\ 3,\ 5\}$
交（积）	$A\cap B$ $=\{x\mid x\in A且x\in B\}$		$\{2,\ 3\}\cup\{3,\ 5\}$ $=\{3\}$
差	$A-B$ $=\{x\mid x\in A且x\overline{\in}B\}$		$\{1,\ 2\}-\{2,\ 3\}$ $=\{1\}$
	$B-A$ $=\{x\mid x\in B且x\overline{\in}A\}$		$\{2,\ 3\}-\{1,\ 2\}$ $=\{3\}$
对称差	$A\ominus B$ $=(A-B)\cup(B-A)$		$\{1,\ 2\}\ominus\{2,\ 3\}$ $=\{1\}\cup\{3\}=\{1,\ 3\}$
补（非）	$A^C=U-A$ $=\{x\mid x\overline{\in}A且x\overline{\in}U\}$		$\{1,\ 2\}^C=\{x\mid x\neq 1,\ 2\}$ $A=\{x\mid x>0\}$ $A^C=\{x\mid x\leqslant 0\}$

例4 红、蓝、绿是光的三基色，试根据图1-2用集合表示{白}，{黄}，{青}，{品红}。

解 {白}＝{红}∩{绿}∩{蓝}，

{黄}＝{红}∩{绿}－{蓝}；

{青}＝{绿}∩{蓝}－{红}；

{品红}＝{红}∩{蓝}－{绿}。

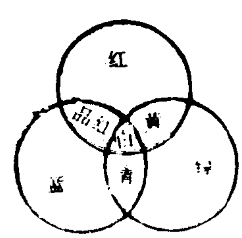
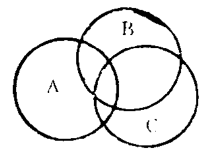
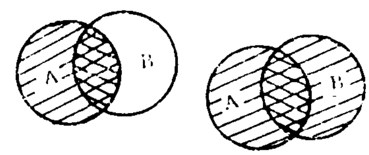
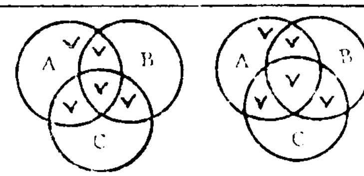
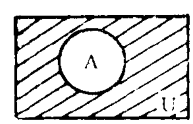
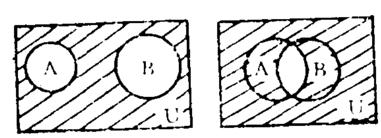


图 1-2

集合的运算法则，略去其数学证明，也用文氏图说明列于表中。

名　　称	运　算　法　则	文　氏　图
1. 幂等律	$A\cup A=A$，$A\cap A=A$	
2. 交换律	$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$	
3. 结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	
4. 吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	
5. 分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	
6. 复原律	$(A^C)=A^C$或$\neg(\neg A)=A$	
7. 对偶律	$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$	
8. 常数运算法则	$A\cup U=U$，$A\cap U=A$ $A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$	
9. 互补律	$A\cup A^C=U$，$A\cap A^C=\phi$	

例5 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，而 $U=\{1,2,4,5,6\}$，试验证 1° 吸收律第一式；2° 对偶律第一式。

解 ∵ $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{3,4\}$，$(A\cup B)c=\{6\}$，$Ac=\{5,6\}$，$B^C=\{1,2,6\}$。

∴ 1° $A\cup(A\cap B)=\{1,2,3,4\}\cup\{3,4\}$

$=\{1,2,3,4\}=A$；

2° $(A\cup B)^C=\{6\}$，$A^C\cap B^C=\{5,6\}\cap\{1,2,6\}=\{6\}$。

因此，$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$。

(3) 集合的映射、笛卡尔乘积与关系

1° 映射

定义1 设有两个集合X、Y，如果有一对应关系f存在，对于任意$x\in X$，有唯一的$y\in Y$与之对应，则称f为X到Y的映射，记为

$$f: X\to Y$$

或 $$f(x)=y,$$

y称为x（在f下）的象，而x称为y（在f下）的原象，X称为f的定义域，集

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为f的值域。

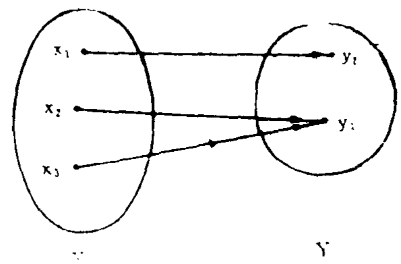


图 1-3

如果$f(X)=Y$，则f称为从X到Y的满射；如果$x_1\neq x_2$，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则f称为从X到Y的单射；既是满射又是单射的映射，称为从X到Y的满单射，或一一映射。

如果f是一一映射，由$y=f(x)$确定的Y到X的映射，称为f的逆映射，记为f^{-1}。

例6 集合 $X=\{$一批零件$\}$，而集合$Y=\{$优等品，合格品，次品$\}$就是检验结果，"检验"就是映射f。

2° 笛卡尔积与关系

例7 设 $A=\{0, 1, 2\}$，$B=\{3, 4\}$，求由A，B两集中元素按先A后B的顺序和相反顺序排列所产生的新集。

如果规定先A后B的顺序，则新集为

$$\{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \tag{1.1}$$

如果规定相反的顺序，则为

$$\{(3, 0), (4, 0), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2)\} \tag{1.2}$$

定义2 集A、B的笛卡尔积$A\times B$规定为序对(a, b)的集

$$A\times B=\{(a, b)\mid a\in A, b\in B\}。$$

例7中式（1.1）为$A\times B$，（1.2）为$B\times A$。显然$A\times B\neq B\times A$。

例8 设 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则 $A\times B=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，它表示平面直角坐标系中如图1-4所示的矩形区域。

类似地可以定义

$$A\times B\times C=\{(x, y, z)\mid x\in A, y\in B, z\in C\}。$$

例9 设$A=\{0, 1\}$，$B=\{1, 2\}$，$C=\{3\}$，则

$A\times B\times C=\{(0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 1, 3), (1, 2, 3)\}$。

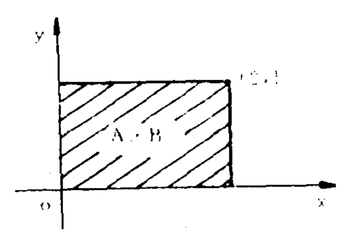


图 1-4

2．实数及其几何表示

（1）数的扩展

人类对数的认识首先是从自然数开始的。然而，在自然数范围内，减法和除法不是永远可以进行的。例如$1-2$和$1\div 2$，所得结果都不是自然数。为了使这些运算能够不受限制地进行，人们不得不发明有理数（即数"0"，负整数及分数）；再进一步发明无理数。例如边长为一个长度单位的正方形对角线的长$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$。

有理数可表示为$\frac{p}{q}$，无理数则不能表示为$\frac{p}{q}$，其中p，q都是整数，且$q\neq 0$。

分数可用有限小数（1.5，-2.1等）或循环小数（$0.\dot{1}21\dot{6}$，$-1.\dot{3}$等）表示。反之，有限小数或循环小数亦可用分数表示。

我们把有限小数或循环小数称为有理数，无限不循环小数：1.4142…，2.7182…等称为无理数。并把有理数和无理数统称为实数，记作R。

与有理数一样，每个实数必是数轴上某一个点的坐标；反之，数轴上每一点的坐标必是一个实数，即全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系。实数充满数轴而无“空隙”，这就是实数的连续性。正因为如此，数轴又叫做实数轴。此外，实数还具有顺序性，稠密性。在实数范围内，加法、减法、乘法和除法运算总是可以进行的（除数不等于零）。实数的运算仍遵循自然数的运算法则，但乘法消去律中公因数应加上不等于零的限制。本书的讨论都是在实数域内进行的，并将实数和数轴上与它对应的点不加区别。

（2）绝对值

定义3 一个实数x的绝对值，记为$|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0。\end{cases}$$

$|x|$的几何意义：它表示数轴上任一点与原点之间的距离。

基本性质

1° $|x|=\sqrt{x^2}$；　　2° $|x|\geqslant 0$；

3° $|-x|=|x|$；　　4° $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

5° 若$a>0$，则$\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid -a\leqslant x\leqslant a\}$；

6° 若$b>0$，则$\{x \mid |x|>b\}=\{x \mid x<-b\}\cup\{x \mid x>b\}$；

7° $|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$；　　$|x|-|y|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$；

8° $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；

9° $|xy|=|x|\cdot|y|$；　　10° $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$。

证明 仅证（8），其余读者仿此自证。

由性质（7），$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$，

$|y|=|(y-x)+x|\leqslant|y-x|+|x|=|x-y|+|x|$，

于是可得

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|，\quad -|x-y|\leqslant|x|-|y|；$$

再由性质（5），得

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|。$$

例10 设x是实数，则当$|x|\geqslant 4$时，有

$$\left|\frac{x+4}{x-2}\right|\leqslant|x|\ 。$$

证明 由性质（10），（7）得

$$\left|\frac{x+4}{x-2}\right|=\frac{|x+4|}{|x-2|}\leqslant\frac{|x|+4}{|x|-2},$$

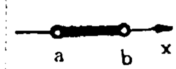
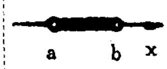
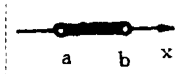
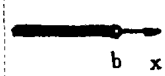
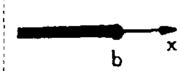
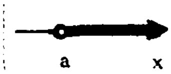
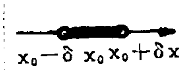
又由$|x|\geqslant 4$得$|x|-2\geqslant 2$，

所以 $\dfrac{|x+4|}{|x-2|}\leqslant\dfrac{|x|+|x|}{2}=|x|$。

(3) 区间

设实数$a<b$，满足$a<x<b$的实数x的集合叫做区间，记作 $(a,\ b)$。而满足$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合叫做闭区间，记作$[a,\ b]$，相对于闭区间$[a,\ b]$来说，$(a,\ b)$ 又叫做开 区 间。注意，不论是闭区间或开区间，a，b都叫做区间的端点。a，b之间的距离为$|a-b|$，它是以a，b为端点的区间的长度。闭区间包含区间的端点，而开区间不包含端点。

满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的实数x的集合叫做半开区间，记作$[a,\ b)$或$(a,\ b]$。用数学符号"∞"即"无穷大"表示的区间叫做无限区间。它们的定义和在数轴上的表示如表。

区间定义	图象	区间定义	图象
$(a,\ b)=\{x\mid a<x<b\}$		$[a,\ b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
$(a,\ b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$		$[a,\ b)=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
$(-\infty,\ b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$		$(-\infty,\ b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$	
$(a,\ +\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$		$[a,\ +\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$	
$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$		$(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $=\{x\mid \lvert x-x_0\rvert<\delta,\delta>0\}$	

现介绍一种在微积分中常用到的特殊的开区间——邻域。

由绝对值的性质（5）知，实数集合

$$\{x\mid |x-x_0|<\delta,\ \delta>0\},$$

在数轴上是一个以x_0为中心，长度为2δ的开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，称之为点$x_0$的$\delta$邻域，记为$N_\delta(x_0)$，$\delta$为邻域的半径（如上表中最后一个图象）。换句话说，点x_0的 δ 邻域是由满足不等式$x_0-\delta<x<x_0+\delta$的点x组成的区间。

例 $|x+5|<\dfrac{1}{2}\Longleftrightarrow|x-(-5)|<\dfrac{1}{2}$，它是点 $x_0=-5$的$\dfrac{1}{2}$邻域。即开区间：$\left(-\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)$。

在$N_\delta(x_0)$ 中去掉点x_0，其余点构成的集合

$$(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$$

称为半径为δ的点x_0的去心邻域。

x_0的左边部分的点构成的集合

$(x_0-\delta,\ x_0)=\{x \mid 0<x_0-x<\delta,\ \delta>0\}$
称为点x_0的左邻域。

x_0的右边部分的点构成的集合

$(x_0,\ x_0+\delta)=\{x \mid 0<x-x_0<\delta,\ \delta>0\}$
称为点x_0的右邻域。

§1.2 函数的概念

1．常量和变量 在一个问题（或过程）中，如果某个量保持不变，则称为常量，否则，称为变量。例如在自由落体中，重力加速度g可以看作常量，而物体下落的高度就是变量。我们也可以用数学语言，给出变量的定义。

设D是由某些数组成的集合，如果x可以取得D中的每一个数，则称x为变量，其变化的范围（或取值范围）就是数集D。也称变量x在D中变化。

2．函数的定义

定义 设D是一个数集（或集合），如果有一个对应规则f，使得对于D内的每一个数（或元素）x，都有一个相应的实数y与之对应，则称y为（在D内取值的）变量x的函数，记为$y=f(x)$，$x\in D$。

上述定义中的D称为函数$f(x)$的定义域，x称为自变量，函数y也称为因变量。

对于不同的函数，我们用不同的记号$f(x)$、$g(x)$、$F(x)$、$G(x)$等表示。

在函数概念中，我们应该注意，最本质的因素是定义域和对应规则。两个函数相等，指的是它们的对应规则和定义域相同。

例1 考查函数$y=f(x)=\frac{1}{x^2}$。其定义域D为：$x\neq 0$的一切值，即$D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，而对应法则$f$就是公式$\frac{1}{x^2}$本身。

例2 函数$f(x)=\sin x$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$与$g(x)=x^2$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$是不同的，它们的定义域虽然相同，但对应法则都不同。

例3 函数$y=x^2$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$在点$x=0$，1，2处的函数值分别为$y=0$，$y=1$，$y=4$。

设函数$y=f(x)$，$x\in D$，对于D中的任何一个确定值x_0，相应的函数值记为$f(x_0)$（或y_0）。即：$y_0=f(x_0)$。对于D中的一切值，相应的函数值y组成一个数集，记为R，称为函数$y=f(x)$，$x\in D$的值域。

例4 函数$y=\sin x$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$和$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$以及$y=x^3$，$x\in[-1,\ +1]$，它们的值域都是$[-1,\ +1]$。

例5 函数$y=\mathrm{tg}x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$的值域$R$为$(-\infty,\ +\infty)$（整个实数集）。

3．函数的表示法 常用的表示法有三种，即：公式法、列表法、图象法。现对这三种方法简单介绍如下。

（1）公式法：把自变量x和函数y之间的函数关系直接用公式表示出来，这种方法称为公

式法。用公式法所表示的函数形式，主要有以下几种：

1° 显函数：自变量x与函数y的函数关系是由自变量x的明显表达式$y=f(x)$所给出，如：

$y=ax^2+bx+c$，$y=\sin x$ 等。

2° 隐函数：有些函数的自变量x与因变量y的对应法则是用一个二元方程

$F(x, y)=0$

所确定的，称为隐函数。例如：

$Ax+By+C=0$（A，B不全为0）；$xy=1$；$a^y=xy$（$a>0$）等等。

3° 分段函数：自变量x和y的函数关系由二个以上的公式给出，如：

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -2\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1。\end{cases}$$

和 $$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$ 等，

（这里$x=0$称为分段点）。

（2）列表法：把一系列自变量的值与对应的函数值列成表格，这种函数表示法称为列表法。例如：三角函数，生产进度表，货运价格表等等。

（3）图示法：如图1-5。

把自变量x和函数y当作坐标平面内点$M(x, y)$的横坐标、纵坐标。这些点所描出的平面曲线就表示了y和x的函数关系，这种表示函数的方法称为图示法。

三种表示法常常结合使用。

例6 函数$y=\frac{1}{2}x^2+1$，它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，其图形如图1-6。

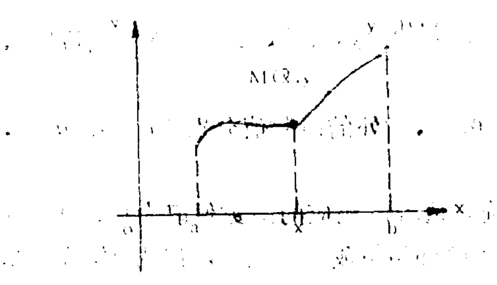


图 1-5

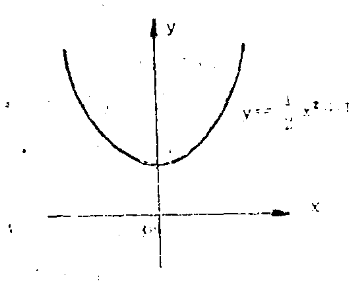


图 1-6

例7 分段函数 $$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0。\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty, +\infty)$，其图象如图1-7。

例8 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$。

解 按绝对值的定义知：

$$y=\begin{cases}2+x, & x<1,\\ 4-x, & x\geq 1。\end{cases}$$

它的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），其图形如图1-8。

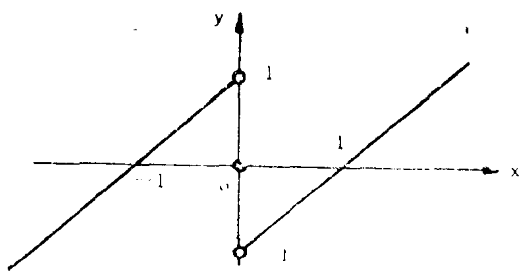


图 1-7

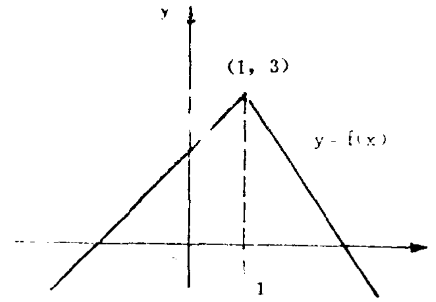


图 1-8

§1.3 函数的几何特性

1. 奇偶性

定义1 若函数$y=f(x)$对其定义域内的每个数x都有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数；若$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数。

显然，奇函数和偶函数的定义域对称于坐标原点O，偶函数$y=f(x)$的图象对称于y轴；奇函数$y=f(x)$的图象对称于坐标原点O。

另外，我们可以注意到，奇函数$f(x)$的定义域D中含有坐标原点$x=0$，可推出$f(0)=0$。

事实上，因为$f(-0)=-f(0)$，即：$f(0)=-f(0)$，则$f(0)=0$。

例1 $y=x^2$，$x\in[-1, 1]$是偶函数。

例2 $y=x^3$，$x\in(-2, 2)$是奇函数。

例3 $y=x^4$，$x\in[1, 2)$是非奇非偶函数。（其定义域不对称于坐标原点）

2. 周期性

定义2 对于函数$y=f(x)$，若存在正数L，使得对于函数$f(x)$的定义域D中的每个x都有：$f(x+L)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，满足上述等式的最小的正数L称为函数$f(x)$的周期。

例如，$\sin(x+4\pi)=\sin x$，$\sin(x+2\pi)=\sin x$，这时，正弦函数$\sin x$是周期函数，其周期为2π，而不是4π。

我们应注意，大多数函数都不是周期函数。

3. 单调性

定义3 若对于函数$y=f(x)$的定义域D内的任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有：

（1）$f(x_1)\leq f(x_2)$，则称$f(x)$在D内是单调增加的（简称为单增）。

（2）$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在D内是严格单调增加的（简称为严格单增）。

（3）$f(x_1)\geq f(x_2)$，则称$f(x)$在D内是单调减少的（简称为单减）。