

2002 年度全国优秀畅销书

数学培优竞赛
新帮手
SHUXUE PEIYOU JINGSAI XINBANGSHOU

刘莉 著

丛书主编：黄东坡

小学
数学
培优竞赛
新帮手

XIAOXUE SHUXUE
PEIYOU JINGSAI
XINBANGSHOU

六年级

● 创新从课堂上起步 ● 能力在训练中提高

湖北辞书出版社

数学培优竞赛
新帮手

SHUXUE PEIYOU JINGSAI XINBANGSHOU

刘莉著

丛书主编：黄东坡

数学培优竞赛

SHUXUE PEIYOU JINGSAI XINBANGSHOU

新帮手

小学六年级

湖北辞书出版社

(鄂)新登字 07 号

图书在版编目(CIP)数据

小学数学培优竞赛新帮手. 六年级/刘莉主编. —武汉:湖北辞书出版社, 2002. 1

ISBN 7 - 5403 - 0464 - 2

I. 小… II. 刘… III. 数学课 - 小学 - 习题

IV. G624. 505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 080887 号

出版发行: 湖北辞书出版社

(武汉市黄鹄路 75 号 430077)

印刷: 十堰日报社印刷厂

经销: 新华书店

开本: 787 × 1092 1/16

插页: 4

印张: 11.625

版次: 2002 年 1 月第 1 版

印次: 2003 年 10 月第 5 次印刷

字数: 150 千字

印数: 36001——41000 册

定价: 14.00 元

目 录

知识篇

1. 分数乘、除法的计算技巧	(1)
2. 估算求值	(6)
3. 定义新运算	(12)
4. 数字问题	(17)
5. 行程问题 (一)	(22)
6. 行程问题 (二)	(28)
7. 钟面上的数字问题	(34)
8. 平均数问题	(39)
9. 工程问题	(44)
10. 浓度问题	(50)
11. 分数、百分数应用题 (一)	(54)
12. 分数、百分数应用题 (二)	(60)
13. 圆的周长和面积	(65)
14. 利润和利息	(70)
15. 比和比例问题 (一)	(75)
16. 比和比例问题 (二)	(80)
17. 利用面积比解题	(85)
18. 圆柱和圆锥	(91)
19. 立体图形的表面积和体积	(96)
20. 立体图形的形态	(101)
21. 用不定方程解应用题	(107)
22. 列方程解应用题 (一)	(113)
23. 列方程解应用题 (二)	(118)

24. 最佳方案 (123)

25. 竞赛题选讲 (130)

方法篇

26. 染色问题 (135)

27. 容斥原理 (142)

28. 最大和最小问题 (147)

参考答案或提示 (152)

1 分数乘、除法的计算技巧

阅读与思考

在进行分数计算时，除了要掌握常规的四则运算法则外，还应该掌握一些特殊的运算技巧，并且更重要的是通过观察和分析，找出规律，熟练、灵活地应用这种技巧，达到准确而又迅速地进行计算的目的。

在分数乘、除法的计算中，常用的运算技巧有：

1. 约分法。即通过将分子、分母进行变形得到相同的因子，再运用分数的基本性质约分，使计算大大简化。

2. 裂项法。即运用裂项公式，使得拆开后的一些分数可以相互抵消，以达到简化运算的目的。

3. 代数法。即在计算中把几个数的运算式子作为一个整体，参与其他运算，使计算简便。

因为在本套五年级的教材中专门研究了裂项法，所以本讲不再研究。

例题与求解

例 1 计算： $(1 + \frac{19}{92} \times 1) + (1 + \frac{19}{92} \times 2) + (1 + \frac{19}{92} \times 3) + \cdots + (1 + \frac{19}{92} \times 10) + (1 + \frac{19}{92} \times 11)$

(1992 年全国奥数试题)

解题思路 观察发现，每个括号中的第一个加数都是整数 1，第二个加数是 $\frac{19}{92}$ 分别与整数 1, 2, ..., 11 的乘积。

把算式中的每个小括号去掉，再把所有的 1 相加，所有的第二个加数相加。运用乘法的分配律将相加的第二部分简算，再把两部分合并。

例 2 求下列所有分母不超过 40 的真分数的和：

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + \cdots + (\frac{1}{40} + \frac{2}{40} + \cdots + \frac{38}{40} + \frac{39}{40})$$

(1993 年新加坡小学数学奥林匹克试题)

解题思路 可以看出在每个括号内与首尾等距离的数相加，和为

1, 因此可把括号内各项颠倒次序排列后相加.

例 3 计算 $\frac{498 \times 381 + 382}{382 \times 498 - 116}$

解题思路 观察分子、分母中相乘的两个数: 分子中是 498×381 , 分母中是 498×382 .

$$\begin{aligned}\text{解法一: 将分子变形为 } & 498 \times (382 - 1) + 382 \\ & = 498 \times 382 - 498 \times 1 + 382 \\ & = 498 \times 382 - (498 - 382) \\ & = 498 \times 382 - 116\end{aligned}$$

分子与分母正好相等, 可用约分法简算.

这种方法叫“倒序求和法”.

另外本题也可把括号内分数个数分为奇数个和偶数个, 直接求出每个括号内的和进行求解, 即原式 $= \frac{1}{2} + 1 + 1 \frac{1}{2} + \cdots + 19 \frac{1}{2}$, 再求出和来.

本题还可将分母进行变形, 同学们动手试试看.

$$\begin{aligned}\text{例 4 计算: } & (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ & + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})\end{aligned}$$

(1990 年小学奥数试题)

解题思路 四个括号内均有相同部分, 可把相同部分用字母来表示.

不妨设 $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, 则 $a - b = 1$, 将原式从形式上简化:

$$\text{原式} = a \times (b + \frac{1}{5}) - (a + \frac{1}{5}) \times b$$

运用乘法分配律后将括号展开, 我们会有轻松的发现.

这类题设字母参与运算, 通过运用乘法分配律, 会收到意想不到的简便效果.

$$\text{例 5 计算 } 1949 \times (\frac{1}{51} - \frac{1}{2000}) + 51 \times (\frac{1}{1949} - \frac{1}{2000}) - 2000 \times (\frac{1}{1949} +$$

$$\frac{1}{51}) + 3$$

解题思路 题目中出现了 1949、51、2000 及其倒数, 仔细观察还发现其中 $1949 + 51 = 2000$, 即 $2000 - (1949 + 51) = 0$.

能否将前三个加数进行变形, 得出相同的因数来呢? 我们在第四个加数 3 身上做文章.

第一个小括号中缺 1949 的倒数, 第二个小括号中缺 51 的倒数, 第三个小括号中缺 2000 的倒数, 因此我们将 3 写成 $\frac{1949}{1949}$ 、 $\frac{51}{51}$ 和 $\frac{2000}{2000}$, 分别与第一、二、三个加数相加, 再运用乘法的分配律简化后面的运算.

例 6 计算:
$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1993} - \frac{1}{1994}}{\frac{1}{1+1995} + \frac{1}{2+1996} + \frac{1}{3+1997} + \cdots + \frac{1}{997+2991}}$$

解题思路 观察算式中的分子部分, 根据本题特点将分子看作 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1993} + \frac{1}{1994} - 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1994})$ 经过化简, 得 $\frac{1}{998} + \frac{1}{999} + \cdots + \frac{1}{1994}$.

我们发现, 分母部分恰好与分子部分这 997 个数成对出现, 且每一个数恰好是与它对应的这个数 $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+1995} + \frac{1}{2+1996} + \frac{1}{3+1997} + \cdots + \frac{1}{997+2991} \\ &= \frac{1}{1996} + \frac{1}{1998} + \cdots + \frac{1}{3988} \\ &= \frac{1}{2} \times (\frac{1}{998} + \frac{1}{999} + \cdots + \frac{1}{1994}) \end{aligned}$$

这样, 通过约分, 就可以很快地算出结果.

解答本题关键是把相关联的项 (或部分) 并在一起, 简化运算过程, 这种解法称为“并项法”.

分数计算题往往很复杂; 在解答时常常用“拆”与“并”的方法, 希望同学们能灵活地掌握它.

能力训练

A 级

1. $\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}) + \cdots + (\frac{1}{60} +$

$$\frac{2}{60} + \cdots + \frac{58}{60} + \frac{59}{60})$$

$$2. \frac{456 + 797 + 455}{456 \times 797 - 341}$$

$$3. \frac{363 + 411 \times 362}{363 \times 411 - 48}$$

$$4. 1949 \times (\frac{1}{43} - \frac{1}{1992}) + 43 \times (\frac{1}{1949} - \frac{1}{1992}) - 1992 \times (\frac{1}{1949} + \frac{1}{43}) + 103$$

(1992年武汉市小学数学竞赛试题)

$$5. (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{6}{7})^2 + (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{6}{7}) \times \frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{6}{7}) \times (\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{6}{7})$$

$$6. (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1994}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1995}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1995}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1994})$$

$$7. \frac{(1+17) \times (1+\frac{17}{2}) \times (1+\frac{17}{3}) \times \cdots \times (1+\frac{17}{19})}{(1+19) \times (1+\frac{19}{2}) \times (1+\frac{19}{3}) \times \cdots \times (1+\frac{19}{17})}$$

$$8. (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7})^2 + (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}) \times \frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}) \times (\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7})$$

$$9. \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}}{\frac{1}{1+101} + \frac{1}{2+102} + \frac{1}{3+103} + \cdots + \frac{1}{50+150}}$$

$$10. (1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{4}) \times (1 + \frac{1}{6}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{10}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{5}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{9})$$

(第六届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛复赛试题)

B 级

$$1. \text{计算} \frac{1999 \times 1998 \times 2000}{1999 \times 2000 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \frac{796 + 976 \times 795}{796 \times 976 - 180}$$

(天津市93-94学年度六年级数学决赛试题)

$$3. \text{计算: } (1 - \frac{3}{2 \times 4}) \times (1 - \frac{3}{3 \times 5}) \times (1 - \frac{3}{4 \times 6}) \times (1 - \frac{3}{5 \times 7}) \times (1 - \frac{3}{6 \times 8}) \times (1 - \frac{3}{7 \times 9}) \times (1 - \frac{3}{8 \times 10}) \times (1 - \frac{3}{9 \times 11})$$

(1992年上海市第五届六年级复赛试题)

4. 如果 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$, 那么, $15^2 + 16^2 + \cdots + 21^2 =$ _____.

5. 按一定规律排着一串数: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \cdots, \frac{99}{100}, \frac{100}{100}$, 求这些数的和.

(北京市第七届小学生“迎春杯”初赛试题)

6. $(\frac{19}{96} + \frac{1919}{9696} + \frac{191919}{969696}) \div \frac{19191919}{96969696}$

(1996年小学数学夏令营计算竞赛试题)

7. 计算: $(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975}) \times (\frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}) - (\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}) \times (\frac{579}{357} + \frac{753}{975})$

(1994年奥数总决赛计算竞赛试题)

8. 计算: $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1997})(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1996}) - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1997})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1996})$

(第八届“希望杯”全国数学邀请赛初一试题)

9. 和式 $\frac{2}{1 \times (1+2)} + \frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} + \frac{4}{(1+2+3) \times (1+2+3+4)} + \cdots + \frac{100}{(1+2+3+\cdots+99) \times (1+2+\cdots+100)}$, 计算化简后得到一个最简分数, 求分母与分子之差.

(北京市第四届小学生“迎春杯”数学竞赛初赛试题)

2 估算求值

阅读与思考

估算，顾名思义，是一种粗略的计算。有些题目在结果不要求十分精确时，往往只需要确定一个范围或者一个粗略的值，这时就要用到估算。

估算是一种重要的计算方法，在我们的生活实践和数学解题中有着广泛的运用。熟练掌握这种算法不仅可以帮助我们解决问题，还常常可以帮助我们检验计算结果是否正确。

估算常采用的方法有：

- (1) 省略尾数取近似值，即观其“大概”。
- (2) 用放大或缩小的方法来确定某个数或整个算式的取值范围，进行估算。

例题与求解

例 1 老师在黑板上写了 13 个自然数，让小明计算平均数（保留两位小数），小明计算的答案是 12.43，老师说最后一位数字错了，其它的数字都对，正确的答案应该是什么？

（第一届华杯赛决赛试题）

解题思路 由于小明的计算结果保留两位小数后是 12.43，又根据题意，这个平均数精确到的是小数部分的第一位，因而我们确定 12.43 在 12.40 ~ 12.49 之间，在四舍或五入前的范围在 12.395 至 12.494 之间。

取最小值 12.395 与 13 相乘： $12.395 \times 13 = 161.135$

取最大值 12.494 与 13 相乘： $12.494 \times 13 = 162.422$

得到 13 个自然数的和大于 161.135，小于 162.422，因为这 13 个自然数之和一定是整数，从而确定和为 162。

例 2 计算 $12345678910111213 \div 31211101987654321$ ，它的小数点后面前三位数字是几？

估算是运用各种运算技巧所进行的快速近似计算。许多数学问题可以通过估算界定范围，然后把满足条件的——枚举出来。

(1991 年奥数 A 卷试题)

解题思路 采用放缩法估计范围解答.

将上式写成分数形式: $\frac{12345678910111213}{31211101987654321}$

因为将分数的分母扩大, 分数的值变小; 将分母减小, 分数的值就变大, 所以

$$\frac{12345678910111213}{31220000000000000} < \frac{12345678910111213}{31211101987654321} < \frac{12345678910111213}{31210000000000000}$$

题目所求的是小数点后的前三位数字, 我们只需计算到小数点后第四位就可以了.

①式只要计算: $1234.56789 \div 3122 \approx 0.3954$ (只要取小数点后面前 4 位, 被除数中 8 以后的数字不起作用).

③式只要计算: $1234.5678 \div 3121 \approx 0.3955$

那么②的值在 0.3954 到 0.3955 之间, 从而确定小数点后面前三位的数字.

利用放缩法处理问题时, 放缩要适当, 不能使放缩后的范围过大.

例 3 已知: $S = \frac{1}{\frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \cdots + \frac{1}{1991}}$, 求 S 的整数部分.

(第三届华杯赛复赛试题)

解题思路 若采取对分母中的 12 个分数通分求和, 那实在太繁, 因此可以采用例 2 分析中的原理, 通过放缩法来确定 S 的整数部分.

$$\text{因为 } \frac{1}{1980} > \frac{1}{1981} > \frac{1}{1982} > \cdots > \frac{1}{1991}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \cdots + \frac{1}{1991} < \frac{1}{1980} \times 12$$

$$\text{并且 } \frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \cdots + \frac{1}{1991} > \frac{1}{1991} \times 12$$

同学们尝试做完本题.

例 4 在方框里分别填上两个相邻的整数, 使下式成立.

$$\square < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < \square$$

解题思路 我们可以先把能凑成整数的几个分数加起来, 然后再对其它的几个分数进行估算.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

你知道这个结果吗?
把它记住.

由于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$, $\frac{1}{8} > \frac{1}{9}$,

那么 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{10}) + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} < \frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} (\frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 1)$

也就是原式去掉 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ 后剩下的部分小于 1, 这样原式就是 1 与小于 1 的数之和, 从而可确定 $\square$ 中的数.

例 5 在 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ 中选出若干个数, 使得它们的和大于 3, 至少要选几个数.

解题思路 要使得所用的数个数尽量少, 所选用的数应尽量大, 所以应从开头较大的数依次选.

我们从例 4 中知道 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, 当取 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ 时, 其和为 2.45, 小于 3.

$$\text{而 } \frac{1}{7} = 0.142\cdots \quad \frac{1}{8} = 0.125 \quad \frac{1}{9} = 0.\dot{1} \quad \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = 0.478\cdots$$

$$\text{所以 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = 2.928\cdots < 3$$

$$3 - 2.928 = 0.072 \quad \text{而 } \frac{1}{11} = 0.\dot{0}9, \text{ 则再取 } \frac{1}{11} \text{ 即可使和大于 3.}$$

本题我们采取的是取近似值的办法估值, 也可以利用放缩法估值解答.

同学们可以用放缩法试试!

例 6 有一算式, 左边方框里都是整数, 右边答案写出四舍五入后的近似值:

$$\frac{\square}{3} + \frac{\square}{5} + \frac{\square}{7} \approx 1.16$$

那么算式左边三个方框里的整数从左到右依次是多少?

解题思路 采用估值的方法先确定算式的精确值所在范围. 由 1.16 是经过四舍五入而得, 所以原结果应在 1.155 与 1.164 之间. 又因为三个分数的分母不同, 所以先通分, 然后再扩大相同的倍数, 使分数变成整数, 最后根据奇偶性确定三个方格中的数分别是几.

因为 $1.155 \leq \frac{\square}{3} + \frac{\square}{5} + \frac{\square}{7} \leq 1.165$

通分得到 $1.155 \leq \frac{35 \times \square + 21 \times \square + 15 \times \square}{105} \leq 1.165$

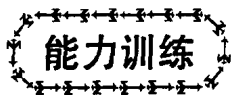
将上式扩大 105 倍, 得

$$121.275 \leq 35 \times \square + 21 \times \square + 15 \times \square \leq 122.325$$

由于每个方框里是一个整数, 所以中间算式的结果一定是整数, 因此

$$35 \times \square + 21 \times \square + 15 \times \square = 122$$

由奇偶性可知三个方框里的数一定是两奇一偶, 最后尝试求出方框里的数.



A 级

1. 小刚在计算 11 个整数的平均数时 (按四舍五入法保留两位小数), 得数是 15.35, 老师说, 最后一位数字错了, 求正确的结果.

(第一届九章杯中国小学生数学竞赛决赛试题)

2. 小华在计算一道求七个自然数平均数 (得数保留两位小数) 的题目时, 将得数最后一位算错了. 他的错误答案是 21.83, 正确答案应是_____.

3. $12345678910111213 \div 312111101987654321$ 它的小数点后前三位数字分别是几?

4. 计算 $123456789101112131 \div 919293949596979899$, 它的小数点后前三位数字是几?

5. 设 $S = \frac{1}{\frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \frac{1}{1987} + \cdots + \frac{1}{1992}}$, 则 S 的整数部分是_____.

(江西省第二届八一杯小学数学竞赛决赛试题)

6. 已知 $S = \frac{1}{\frac{1}{1990} + \frac{1}{1991} + \cdots + \frac{1}{1999}}$, 求 S 的整数部分.

7. 已知: $\frac{\square}{3} + \frac{\square}{5} + \frac{\square}{7} \approx 1.98$, 求三个真分数的分子和.

8. 王教授在中年时入党, 当时他的年龄的平方正好是他出生时的年代数, 王教授入党时的年龄是_____.

9. 有 30 个数: $1.64, 1.64 + \frac{1}{30}, 1.64 + \frac{2}{30}, \dots, 1.64 + \frac{28}{30}, 1.64 + \frac{29}{30}$, 如果取每个数的整数部分 (例如: 1.64 的整数部分是 1, $1.64 + \frac{11}{30}$ 的整数部分是 2), 并将这些整数相加, 那么其和是_____.

10. 有一列数, 第一个数是 105, 第二个数是 85, 从第三个数开始, 每个数都是它前面两个数的平均数, 那么第 19 个数的整数部分是_____.

11. 一本书的中间一张被撕掉了, 余下的各页码数之和正好是 1000, 问:

- (1) 这本书有多少页?
- (2) 撕掉的是哪一张?

B 级

1. $(1 + \frac{19}{92}) + (1 + \frac{19}{92} \times 2) + (1 + \frac{19}{92} \times 3) + \dots + (1 + \frac{19}{92} \times 10) + (1 + \frac{19}{92} \times 11)$ 的结果是 x , 那么, 与 x 最接近的整数是_____.

2. 五名选手在一次数学竞赛中共得 404 分, 每人得分互不相等, 并且其中得分最高的选手是 90 分, 那么, 得分最低的选手至少得多少分?

3. 求 $\frac{0.123456\dots 5051}{0.515049\dots 4321}$ 的精确到小数点后三位数的近似值.

4. 在下面算式中的方框内填入适当的同样的数字, 使等式成立.

$$\square 3 \times 6528 = 3\square \times 8256$$

5. 学校组织若干人参加夏令营, 先乘车, 每个人都要有座位, 这样需要每辆有 60 个座位的汽车至少 4 辆, 而后乘船, 需要定员为 70 人的船至少 3 条, 到达营地后分组活动, 分的组数跟每组的人数恰好相等, 这个学校参加夏令营的人有多少?

6. 求繁分数 $\frac{1}{\frac{1}{70} + \frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \frac{1}{73} + \frac{1}{74}}$ 化简后的整数部分.

(1998 年香港小学数学精英选拔赛试题)

7. 有一列数, 第一个数是 115, 第二个数是 75, 从第三个数开始, 每个数都是它前面两个数的平均数, 那么第 2000 个数的整数部分是_____.

8. 已知 $A = \frac{11 \times 66 + 12 \times 67 + 13 \times 68 + 14 \times 69 + 15 \times 70}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \times 100$

问: A 的整数部分是多少?

(第二届华杯赛决赛试题)

9. 有 13 个自然数的平均值精确到小数点后一位数时是 26.9, 那么精确到小数点后两位数时是多少?

10. 老师在黑板上写了若干个以 1 开始的连续自然数: 1, 2, 3, 4

……，后来擦掉其中的一个，剩下的数的平均数是 $13\frac{9}{13}$ ，求擦掉的自然数.

(上海市第七届小学六年级数学竞赛预赛试题)

11. 两个带小数相乘，乘积四舍五入以后是 60.0，这两个数都只是一位小数，两个数的整数部分都是 7，这两个小数的乘积四舍五入以前是多少？

(福建省第三届小火炬杯小学数学邀请赛初赛试题)

12. 哥哥对弟弟说：“到 21 世纪的 x^2 年，我恰好 x 岁.” 问哥哥出生于哪一年？

(第八届《小学生数学报》数学竞赛决赛试题)

3 定义新运算

阅读与思考

说起运算，同学们马上就会想到我们课堂上学过的加、减、乘、除四则运算，并且还能熟练地说出这些运算的一些运算性质和运算定律。当然，对于什么样的问题该用加法或减法、乘法还是除法计算更是烂熟于胸。

其实，在加、减、乘、除四则运算之外，还有其他多种法则的运算。我们这一讲里将要学习的“新运算”，就是用 $*$ 、 $\triangle$ 、 $\circ$ 、 $\star$ 、 $\odot$ 等多种符号，按照一定的关系，临时规定的一种新的加工程序（新运算）。

学习“定义新运算”，关键是要深刻理解运算符号的新规定，严格按照规定的法则运算，最后达到解决问题的目的。

例题与求解

例1 如果 $a * b = 3a + 2b$ ，那么 $7 * 5$ 的值是多少？

解题思路 直接根据运算“ $*$ ”的定义，代入具体数值，进行计算。

这里 $7 \rightarrow a$ ， $5 \rightarrow b$ 。

例2 规定 $x \circledast y = \frac{xy}{x+y}$ ，求 $2 \circledast (10 \circledast 10)$ 的值。

解题思路 和加、减、乘、除四则运算中的括号一样，定义的新运算中有括号的，要先算括号里的。

先算 $(10 \circledast 10)$ 时， $10 \rightarrow x$ ， $10 \rightarrow y$ ，即：

$$2 \circledast (10 \circledast 10) = 2 \circledast \frac{10 \times 10}{10 + 10} = 2 \circledast 5$$

这时 $2 \rightarrow x$ ， $5 \rightarrow y$ ，再次进行运算。

定义新运算通常是用某些特殊符号表示特定的意义。

新运算使用的符号避免使用已有确定含义的符号，如 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 、 $>$ 、 $<$ 等。

值得注意的是，四则运算中的运算性质和运算定律不一定适用于定义新运算。