每日一题

（初等数学）

杨文焘 编

上海科学技术文献出版社

每日一题

(初等数学)

杨文森 编

*

上海科学技术文献出版社出版

(上海武康路2号)

新华书店上海发行所发行

昆山亭林印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 7 字数 169,000

1986年6月第1版 1986年6月第1次印刷

印数：1—51,000

书号：13192·86 定价：1.30元

《科技新书目》117—222

前　　言

要学好数学，除了必须加强基础知识的学习外，还需要做一定数量的习题，以加深理解概念，巩固知识，提高解题的技能技巧、分析问题和解决问题能力，论证的能力，培养空间想象能力。基于这种想法，我在数学教学中曾多次进行“每日一题”活动。由于该活动完全是学生自觉参加的，收效比较大，且负担又不是太重，是比较理想的活动。这里从当时使用过的习题中选择难度适中，有利于巩固基础知识和基本技能的一部分，分类并汇编成册，以供有关学校的教师、中学生及自学青年参考。

为了便于选用，除每题作较详解答外，还另列“本题要求”一项，说明每题需要用到的主要数学知识，有时还提出一些解题的方向和需要注意的问题。读者若能坚持每日选做一二题，对巩固数学知识，提高解题的技能、技巧，可能有所启发和帮助。

本书的插图由李燕蓉同志绘制，在此致以感谢。

对书中选题和解题存在的缺点和错误，恳请读者提出宝贵的意见。

编　　者

1985 年 5 月

目　　录

一、数

1 设 $A=\{x \mid 15x^4-34x^3-40x^2+18x+9=0\}$,

$B=\{x \mid 15x^3+26x^2-11x-6=0\}$,

求适合 $A\cup B=\{x \mid f(x)=0\}$ 中的 $f(x)$。

本题要求：集合概念，解整数系数一元 n 次方程。

解：设 $g(x)=15x^4-34x^3-40x^2+18x+9$

$h(x)=15x^3+26x^2-11x-6$

$\because$ $g(-1)=0$, $g(x)$有因式 $x+1$,

又 $g(3)=0$, $g(x)$有因式 $x-3$.

$$\therefore \quad g(x)=(x+1)(x-3)(15x^2-4x-3)$$
$$=(x+1)(x-3)(5x-3)(3x+1)$$

$\because$ $h(-2)=0$, $h(x)$有因式 $x+2$.

$$\therefore \quad h(x)=(x+2)(15x^2-4x-3)$$
$$=(x+2)(5x-3)(3x+1)$$

故
$$A=\{x \mid g(x)=0\}=\left\{-1,\ 3,\ \frac{3}{5},\ -\frac{1}{3}\right\}$$
$$B=\{x \mid h(x)=0\}=\left\{-2,\ \frac{3}{5},-\frac{1}{3}\right\}$$
$$A\cup B=\left\{-1,-2,\ 3,\ \frac{3}{5},-\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\{x \mid (x+1)(x+2)(x-3)(5x-3)(3x+1)=0\}$$

$$\therefore \quad f(x)=C(x+1)(x+2)(x-3)(5x-3)(3x+1)$$

(C 为非零常数)

2 在复数范围内，1 的 20 次方根的集合为 A, 1 的 4 次方

根的集合为 B，1 的 5 次方根的集合为 C，试证集合 A 的一切元素都可以表示为集合 B 与集合 C 的元素之积。

本题要求：集合概念，用三角函数式表示复数并进行运算，棣美弗定理。

证：设 $x\in A$，则 $x^{20}=1$。

$$x=\sqrt[20]{\cos 0+i\sin 0}$$
$$=\cos\frac{2k\pi}{20}+i\sin\frac{2k\pi}{20}\quad(k=0,1,\cdots,19)$$
$$=\cos\left(\frac{2k\pi}{4}-\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}-\frac{2k\pi}{5}\right)$$
$$=\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right)\left[\cos\left(-\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2k\pi}{5}\right)\right]$$
$$=Z_1\cdot Z_2$$

又因 $$Z_1^4=\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right)^4=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$$
$$=1$$
$$Z_2^5=\left[\cos\left(-\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2k\pi}{5}\right)\right]^5$$
$$=\cos(-2k\pi)+i\sin(-2k\pi)=1$$
$$\therefore\quad Z_1\in B,\quad Z_2\in C.$$

3 R 是全体实数集合，对于函数 $f(x)=x^2+ax+b(a、b\in R)$两集合 A、B 是由 $A=\{x\in R|x=f(x)\}$，$B=\{x\in R|x=f(f(x))\}$定义的。(1) 证明 $A\subseteq B$；(2) 当 $A=\{-1,3\}$ 时，列出集合 B 的元素；(3) 当 A 只有一个元素时，试证 $A=B$。

本题要求：集合的概念和论证。

证：(1) 设 $x\in A$，则 $x\in R$，且 $x=f(x)$

$$\therefore\quad f(f(x))=f(x)=x,\quad x\in B$$
$$\therefore\quad A\subseteq B$$

(2) 若 $A=\{-1,3\}$

则 $f(-1)=1-a+b=-1,\ f(3)=9+3a+b=3$

解之得 $a=-1,\quad b=-3$

$$\therefore\quad f(x)=x^2-x-3$$

$$f(f(x))=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$$

$$(x^2-x-3)^2-x^2=0,\quad (x^2-3)(x^2-2x-3)=0$$

$$x=\pm\sqrt{3},\ -1,\ 3$$

$$\therefore\quad B=\{-\sqrt{3},\ -1,\ \sqrt{3},\ 3\}$$

(3) 当 A 只由一个元素 α 组成时，则 $f(x)-x=0$ 应有重根。

故 $f(x)-x=(x-\alpha)^2,\ f(x)=(x-\alpha)^2+x$

代入 $x=f(f(x))$

得 $\{(x-\alpha)^2+x-\alpha\}^2+(x-\alpha)^2+x=x$

$$\{(x-\alpha)^2+x-\alpha\}^2+(x-\alpha)^2=0$$

x、α 为实数，故满足此式的 x 只有 α，因此 B 也只由 α 组成，

$$\therefore\quad A=B$$

4 试证任一自然数和它的五次方的末尾数字相同。

本题要求：应用连续 k 个整数的乘积能被 $k!$ 整除。

证：设自然数为 n，

$$\begin{aligned}n^5-n&=n(n^4-1)=n(n^2+1)(n+1)(n-1)\\&=(n-1)n(n+1)(n^2-4+5)\\&=(n-1)n(n+1)(n^2-4)+5(n-1)n(n+1)\\&=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

此式能被 10 整除，n^5 与 n 的差的末位为零，即 n^5 与 n 的末尾数字相同。

5 求自然数 n，使 $1+2+3+\cdots+n$ 的和是由同一个数字组成的三位数。

本题要求：等差数列求和，求方程的正整数解。

解： $\because \quad 1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(1+n)}{2}$

设三位数为

$$100a+10a+a=111a$$

由题意得

$$\frac{n(1+n)}{2}=111a$$

即 $\quad n^2+n-222a=0,\ n=\dfrac{-1+\sqrt{1+888a}}{2}$ （负根舍去）

$\because$ n是正整数，又$1\leqslant a\leqslant 9$，

$\therefore$ 当a为1、2、3、4、5、7、8、9时$\sqrt{1+888a}$均为无理数，而$a=6$时，得$n=36$。

6 已知a、b、c、d是互不相同的整数，p是方程$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$的整数根，求证$4p=a+b+c+d$。

本题要求：整数问题。

证： $\because$ p是方程的根，

$$\therefore \quad (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)=9$$

又p为整数，a、b、c、d为互不相同的整数，因此$p-a$，$p-b$，$p-c$，$p-d$都是整数且互不相同，显然它们只能分别为1、-1、3、-3。

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)$$
$$=3+(-3)+1+(-1)=0$$
$$\therefore \quad 4p=a+b+c+d$$

7 设m与n为奇数，k为自然数，试证m^3-n^3能被2^k整除的充要条件是$m-n$能被2^k整除。

本题要求：整数的性质和论证。

证：(1) 充分性：因为$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)$，

$m-n$ 能被 2^k 整除，显然 m^3-n^3 能被 2^k 整除。

(2)　必要性：由于 m 和 n 是奇数，所以 m^2+mn+n^2 是奇数，因此，m^2+mn+n^2 和 2^k 除±1外无公因子，但此时由条件 m^3-n^3 被 2^k 整除，亦即 $(m-n)(m^2+mn+n^2)$ 能被 2^k 整除，既然 m^2+mn+n^2 和 2^k 无公因子，所以必有 2^k 整除 $m-n$。

8　设 $S=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，其中 x 是无理数，a、b、c、d 都是有理数，求证：当 $bc=ad$ 时，S 是有理数。

本题要求：有理数概念。

证：由原式可知 c、d 不能同时为零。

若 $c\neq0$，则

$$S=\frac{c(ax+b)}{c(cx+d)}=\frac{acx+bc}{c(cx+d)}=\frac{acx+ad}{c(cx+d)}$$
$$=\frac{a(cx+d)}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}$$

∴　S 是有理数。

若 $d\neq0$，则

$$S=\frac{d(ax+b)}{d(cx+d)}=\frac{adx+bd}{d(cx+d)}=\frac{bcx+bd}{d(cx+d)}=\frac{b(cx+d)}{d(cx+d)}=\frac{b}{d}$$

∴　S 是有理数。

9　若 a、b、c 为有理数，且等式 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ 成立，则 $a=b=c=0$。

本题要求：有理数的性质和论证。

证：　$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$　①

①×$\sqrt[3]{4}$，得　$a\sqrt[3]{4}+2b+2c\sqrt[3]{2}=0$　②

①×a－②×c 得

$$(ab-2c^2)\sqrt[3]{2}+a^2-2bc=0 \quad ③$$

$$\therefore\quad ab-2c^2=0 \quad ④$$

如果 $ab-2c^2\neq 0$，则 $\sqrt[3]{2}=-(a^2-2bc)/(ab-2c^2)$，有理数 a、b、c 经过有理运算所得的数不可能为无理数 $\sqrt[3]{2}$，以④代入③得

$$a^2-2bc=0 \quad ⑤$$

如果 $a\neq 0$，$b\neq 0$，由 ④ 和 ⑤ 消去 c，得 $a^3=2b^3$，即 $a/b=\sqrt[3]{2}$，这是不可能的。故 $a=0$，或 $b=0$。无论 $a=0$，或 $b=0$，由 ① 显然可得 $a=b=c=0$。

10 如果 a 是 1 开 7 次方中的一个虚根，求证：

$$\frac{a^4}{1+a}+\frac{a^5}{1+a^3}+\frac{a^6}{1+a^5}=-2。$$

本题要求：复数的开方和乘方，根和系数关系，分式运算。

证：令 $x^7-1=0$，$x^7=1$

$$x=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7},\ k=0,1,\cdots,6$$

$$\therefore\quad x_1=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$$

$$x_4=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$$

$$x_5=\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$x_6=\cos\frac{10\pi}{7}+i\sin\frac{10\pi}{7}$$

$$x_7=\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}$$

其中只有 x_1 是实数根。

设 $x_2=a$，根据棣美弗定理得 $x_3=a^2$，$x_4=a^3$，$x_5=a^4$，$x_6=a^5$，$x_7=a^6$，且 $a^7=1$。

由根和系数关系得

$$1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6=0 \qquad ①$$

$$\frac{a^4}{1+a}+\frac{a^5}{1+a^3}+\frac{a^6}{1+a^5}$$

$$=\frac{a^4(1+a^3)(1+a^5)+a^5(1+a)(1+a^5)+a^6(1+a)(1+a^3)}{(1+a)(1+a^3)(1+a^5)}$$

$$=\frac{a^4+a^5+2a^6+2a^7+2a^9+2a^{10}+a^{11}+a^{12}}{1+a+a^3+a^4+a^5+a^6+a^8+a^9}$$

$$=\frac{(a^4+a^5+a^6+a^7+a^9+a^{10})+(a^6+a^7+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12})}{1+a+a^3(1+a+a^2+a^3+a^5+a^6)}$$

$$=\frac{a^4(1+a+a^2+a^3+a^5+a^6)+a^6(1+a+a^3+a^4+a^5+a^6)}{1+a+a^3(1+a+a^2+a^3+a^5+a^6)}$$

由①得 $\quad 1+a+a^2+a^3+a^5+a^6=-a^4$

$\qquad\quad 1+a+a^3+a^4+a^5+a^6=-a^2$

∴ 原式 $=\dfrac{a^4(-a^4)+a^6(-a^2)}{1+a+a^3(-a^4)}=\dfrac{-a^8-a^8}{1+a-a^7}=\dfrac{-2a^8}{a}$

$=-2a^7=-2$

11 试求复数 z，满足方程

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3} \text{ 和 } \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

本题要求：复数的绝对值，解方程。

解：设 $z=x+yi$

$$\because \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1$$

$$\therefore \quad \left|\frac{x+yi-4}{x+yi-8}\right|=1$$

得 $(x-4)^2+y^2=(x-8)^2+y^2$，解之得 $x=6$

$$\therefore \quad z=6+yi$$

代入 $\qquad \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right|=\dfrac{5}{3}.$

$$\left|\frac{-6+yi}{6+(y-8)i}\right|=\frac{5}{3},\quad \frac{36+y^2}{36+(y-8)^2}=\frac{25}{9}$$

化简得 $\quad y^2-25y+136=0,\ (y-8)(y-17)=0$

$$\therefore\quad y_1=8,\ y_2=17$$

所求复数为 $z_1=6+8i$，$z_2=6+17i$.

12 实数系数方程 $x^3-3x^2+px-2=0$ 的三个根，在复数平面上是正三角形的三个顶点，求 p 的值，并解这方程.

本题要求：实数系数方程的根的性质：如有一个虚根 $a+bi$，必有另一根 $a-bi$. 复数的几何意义，解高次方程.

解： 设三根为 α，$a\pm bi$.

则 $$\alpha+(a+bi)+(a-bi)=3$$

$$\therefore\quad \alpha=3-2a$$

$\because$ 正三角形三边相等

$$\therefore\quad |a+bi-(3-2a)|=|a+bi-(a-bi)|$$

$$\sqrt{(a-3+2a)^2+b^2}=\sqrt{(a-a)^2+(b+b)^2}$$

化简得 $$b^2=3(a-1)^2 \quad ①$$

又因 $$(3-2a)(a+bi)(a-bi)=2 \quad ②$$

由 ① 和 ② 消去 b，得

$$8a^3-24a^2+24a-7=0$$

解之得 $$a=\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

代入 $\alpha=3-2a$，得 $\alpha=2$

$$\therefore\quad 三根为\ 2,\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$p=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=3$$

13 方程 $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1=0$ 的根在复数平面上表

示什么点?

本题要求：复数的几何意义。应用 $(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)=x^{n+1}-1$。

解：当 $n=1$ 时，方程的根为 $x=-1$，表示在 x 轴上在原点左方一个单位长的地方的一点。

当 $n\geqslant 2$ 时，应用

$$(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)=x^{n+1}-1=0$$

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

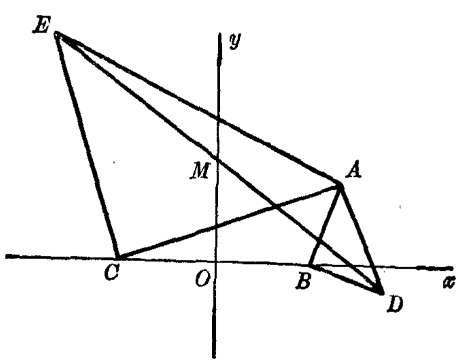
∴ 原方程的根表示半径为1，中心在原点的圆的内接正 $n+1$ 边形的各个顶点，但表示1的一个顶点除外。

14 一个三角形的底边 BC 两端对应的复数是 $z_B=a+0i$，$z_C=-a+0i$，顶点 A 的位置不定，以两边 AB、AC 为腰，分别向形外作等腰直角三角形 ABD、ACE，求证 DE 的中点 M 为定点。

本题要求：复数的几何意义及运算。

证：设 A 点对应的复数为

$$z_A=x+yi$$



则
$$\begin{aligned} z_D &= \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}(-i) \\ &= a + (z_A - a)(-i) \\ &= a + (x + yi - a)(-i) \\ &= a + y + i(a - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_E = \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} \cdot i \\ &= -a + (z_A + a)i = -a + (x + yi + a)i \\ &= -a - y + i(x + a) \end{aligned}$$

∴ DE 中点 M 对应的复数为

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{1}{2}(z_D + z_E) \\ &= \frac{1}{2}[a + y + i(a - x) - a - y + i(x + a)] = ai \end{aligned}$$

∴ M 为定点 $(0, a)$。

15 设复数 z_1、z_2、z_3 满足条件 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$，且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$，求证 z_1、z_2、z_3 是内接于单位圆的正三角形的三个顶点。

本题要求：复数的几何意义及运算，三角函数的运算。

证 ∵ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

∴ 三点在单位圆的圆周上。

设
$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\ z_2 &= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) \\ z_3 &= \cos(\alpha + \gamma) + i\sin(\alpha + \gamma) \end{aligned}$$

$$\because \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

$$\therefore \quad \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \gamma) = 0 \qquad ①$$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \gamma) = 0 \qquad ②$$

由①得
$$\cos\alpha + 2\cos\left(\alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma - \beta}{2} = 0$$

即 $$2\cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=-\cos\alpha \tag{③}$$

由②得 $$2\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=-\sin\alpha \tag{④}$$

④÷③ $$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\therefore\quad \alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}=\alpha+n\pi,\quad \beta+\gamma=2n\pi$$

当 $n=1$ 时，

$$\beta+\gamma=2\pi \tag{⑤}$$

代入③得

$$\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{1}{2}\qquad \frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{\pi}{3}\qquad \gamma-\beta=\frac{2\pi}{3} \tag{⑥}$$

从⑤和⑥得

$$\beta=\frac{2\pi}{3},\quad \gamma=\frac{4\pi}{3}$$

∴ z_1、z_2、z_3 是内接于单位圆的正三角形的三个顶点。

16 求证圆心 O 对应的复数为 z_0，半径为 γ（正实数）的圆方程为：$z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+|z_0|^2-r^2=0$。

本题要求：复数的几何意义及性质。应用 $|z|^2=z\bar{z}$。

证： ∵ $|z-z_0|=r$ ∴ $|z-z_0|^2=r^2$

又 $$|z-z_0|^2=(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)$$
$$=z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+z_0\bar{z}_0$$
$$=z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+|z_0|^2$$
$$\therefore\quad z\bar{z}-z_0\bar{z}+\bar{z}_0z+|z_0|^2=r^2$$

即 $$z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+|z_0|^2-r^2=0.$$

二、代 数 式

17 试证 $x^{3p}+x^{3q+1}+x^{3r+2}$ 能被 x^2+x+1 整除。

本题要求：代数式恒等变形，使各项都能被 x^2+x+1 整除。

证： ∵ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

∴ x^3-1 能被 x^2+x+1 整除。

$$\begin{aligned} x^{3p}+x^{3q+1}+x^{3r+2} &= (x^3)^p+x(x^3)^q+x^2(x^3)^r \\ &= (x^3)^p-1+x[(x^3)^q-1]+x^2[(x^3)^r-1] \\ &\quad +1+x+x^2 \end{aligned}$$

∵ $(x^3)^q-1$ 有因式 x^3-1，能被 x^2+x+1 整除，$x[(x^3)^q-1]$ 和 $x^2[(x^3)^r-1]$ 也都有因式 x^3-1，能被 x^2+x+1 整除，$1+x+x^2$ 能被 x^2+x+1 整除；

∴ 原式能被 x^2+x+1 整除。

18 试证多项式 $x^{999}+x^{888}+x^{777}+\cdots+x^{111}+1$ 能被多项式 $x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$ 整除。

本题要求：证两式差能被 $x^9+x^8+\cdots+x+1$ 整除。

证： 分别用 A 和 B 表示已知的两个多项式。

$$\begin{aligned} A-B &= (x^{999}-x^9)+(x^{888}-x^8) \\ &\quad +(x^{777}-x^7)+\cdots+(x^{111}-x) \\ &= x^9[(x^{10})^{99}-1]+x^8[(x^{10})^{88}-1] \\ &\quad +x^7[(x^{10})^{77}-1]+\cdots+x[(x^{10})^{11}-1] \end{aligned}$$

上式每个方括号内的代数式都可以被 $x^{10}-1$ 整除，因此也可以被

$$B=\frac{x^{10}-1}{x-1}=x^9+x^8+\cdots+x+1$$

整除。$A-B$能被B整除，因此A也能被B整除。

19 多项式$x^4+(m+n)x^3+(m-n)x^2+(m^2+2n-1)x+m+2$能被$x^2-2x+1$整除，求$m$和$n$。

本题要求：余数定理，解方程组。

解：$\because\quad x^2-2x+1=(x-1)^2$

$\therefore$ 原式能被$x-1$整除。

设原式$=(x-1)[x^3+ax^2+bx-(m+2)]$

$$=x^4+(a-1)x^3+(b-a)x^2-(m+2-b)x+m+2$$

$$\therefore\quad a-1=m+n,\quad a=m+n+1$$

$$b-a=m-n,\quad b=2m+1$$

因此原多项式除以$x-1$得商式为

$$x^3+(m+n+1)x^2+(2m+1)x-(m+2) \quad ①$$

又原式能被$(x-1)^2$整除，因此①式能被$x-1$整除，根据余数定理，得

$$1+m+n+1+2m+1-m-2=0$$

即
$$2m+n+1=0 \quad ②$$

又原式能被$x-1$整除

$$\therefore\quad 1+m+n+m-n+m^2+2n-1+m+2=0$$

即
$$m^2+3m+2n+2=0 \quad ③$$

解②和③，得

$$\begin{cases} m_1=0 \\ n_1=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2=1 \\ n_2=-3 \end{cases}$$

20 当a和n取何值时，$x^n-ax^{n-1}+ax-1$被$(x-1)^2$整除。

本题要求：余数定理。

解：$x^n-ax^{n-1}+ax-1=x^n-1-ax(x^{n-2}-1)$

上式除以$x-1$得