科 學 譯 叢

——數 學：第 4 册——

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

汎 函 數 分 析

中 國 科 學 院 出 版

科　學　譯　叢

——數學：第4冊——

三十年來的蘇聯數學
(1917——1947)

汎函數分析

克　列　茵 (М. Г. Крейн)
劉斯鐵爾尼克 (Л. А. Люстерник)　著

關肇直　譯

中國科學院出版

1953年10月

科學譯叢

——數學．第4册——

汎函數分析

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

原載 МАТЕМАТИКА В СССР ЗА ТРИДЦАТЬ ЛЕТ,
(三十年來的蘇聯數學), 608—697 頁
Огиз, Государственное Издательство
Технико-Теоретической Литературы,
Москва-Ленинград, 1948

著者	М. Г. Крейн и Л. А. Люстерник,
譯者	關　肇　直
出版者	中　國　科　學　院
印刷者	北　京　新　華　印　刷　廠
發行者	中　國　圖　書　發　行　公　司

書號：53053(數)07　　1953年10月初版
(京)　0001—5,300　　定價6,000元
字數：90,000

本書內容提要

本文譯自"三十年來的蘇聯數學"一書，詳細地介紹了蘇聯數學家在汎函數分析這一部門中的貢獻。汎函數分析是比較晚纔發展起來的一門數學，是具有較高度綜合性的；有的數學家把它與微積分的關係比作代數學與算術的關係。在蘇聯，由於近二十年來的培養，在這一門數學範圍中蘇聯已擁有大批的優秀數學家，他們的貢獻已使得汎函數分析成爲蘇聯發展得最突出的數學部門之一。近年來，有好幾位蘇聯數學家由於在這方面的卓越工作獲得了斯大林獎金：例如 1948 年的坎托洛維赤、1950年的蓋勒範德等。除關於汎函數分析在其他數學部門中的應用（如變分法、數值計算、微分方程論等）的幾個問題已在"三十年來的蘇聯數學"一書中其他各篇文章中介紹了之外，本文的介紹是全面地詳細地叙述蘇聯汎函數分析各學派的主要貢獻。

目　　錄

汎函數分析

M. Г. 克　列　茵

Л. А. 劉斯鐵爾尼克

"汎函數分析"一詞，儘管不同時代的不同著者有不同解釋，總歸是古典分析觀點的推廣，即古典分析中所論的 n 維空間中點的函數，在汎函數分析中換成具有更一般性質的元的函數（線函數、面函數、等等）。例如變分法應當看做關於汎函數的微分學。這種觀點產生於十九世紀末葉。在關於汎函數分析的最初著作中研究了具體的汎函數及其運算，而這些運算是分析中種種運算的最初推廣。

汎函數分析之能迅速發展及成爲獨立的學科，乃是由於十九至二十世紀之交數學史上發生的幾件大事：

1．分析中新部門的形成，從而發現在代數、幾何、分析中不同領域的驚人類似：一般正交及雙正交組的理論之產生，及其與向量依座標軸分解之類似（在這理論的建立中，"彼得堡學派"的數學家們的著作起了指導的作用：切比謝夫介紹一般正交組，切比謝夫及馬爾科夫關於雙正交組的第一個例，利雅普諾夫及斯鐵克羅夫關於正交組完備性的著作）；弗雷德霍倫積分方程論的產生及其與線性代數方程組理論之類似；對於微分方程、及其後積分方程的界値問題的固有值論的發展，及其與變二次式爲典式問題之類似（後者即把二次曲面轉換到以

主軸爲座標軸)。這些類似迫使尋求觀點的一般結合，這正是汎函數分析的特徵。

2. 從羅巴切夫斯基創立非歐幾何學而起的幾何學中的運動，及幾何對象之轉到具有更一般性質的空間。這與坎托爾的集合論結合，於是生出了一般抽象空間的理論。幾何學與分析學的相互滲透幫助了各部門的光輝進展，但在十九世紀末尾以前，並未越出笛卡爾所已指出的觀點的界限，例如一變數函數與曲線的對應。在十九世紀末及二十世紀初發現了分析的幾何化的新運河——即函數被看成“函數”空間中的點或向量。對應着由代數問題到分析問題的轉變，正是由有窮維空間到無窮維空間的轉化。這種幾何工具的使用乃是現代汎函數分析的特徵，並且在關於這門數學的種種著作的問題中是有决定性的。

3. 實變數函數論的發展(測度論，積分概念之推廣，等等)。例如希勒柏特空間之具體表現爲函數空間只能在把綿續函數集合添加成具有可積分平方的可測函數的集合時纔有可能。

4. 後來，近世代數的發展，這研究關於任意性質的對象的代數運算(一般的羣論、環論、等等)。

如此合成了現代的汎函數分析，其根則滋養於數學物理的問題中(邊界值問題、變分問題、積分方程等)，並且它是現代幾何的、函數論的、及代數的觀點的高度綜合。

在汎函數分析的發展中，在主題及方法上爲不同數學部門所共有的問題起了特殊的作用。例如彼得堡學派的“超古典”的問題——即代數及分析接壤的。無怪它既影響了汎函數分析的先史，也影響了其進一步的發展。這裏可以舉出矩量論的例，

這是由切比謝夫、馬爾科夫及斯提勒傑斯的著名著作開始的，並在線性運算子的譜論的發展中起了卓越的作用。

汎函數分析在現代數學中的價值也在於初步看來它在距離很遠的理論中間搭上橋樑，例如拓撲學及變分法，羣論及調和分析，積分方程。特別是某些理論有着自身發展的內在邏輯，但與其他聯系很少，也得到了難以預料的應用及推論。

汎函數分析各篇章的最大發展得之於作用於依幾何結構最簡單的函數空間——希勒柏特空間上的線性運算子論（所謂譜論）。它產生於積分方程論；乃是二次式及矩陣論的無窮維推廣。譜論不僅在分析中的不同問題上得出很多應用，而且成爲量子力學的基本數學工具。

希勒柏特空間是平方中值收斂的函數空間。與其它種收斂律相應的，乃是其他的函數空間，其古典的例曾由匈牙利數學家弗·黎斯研究過。在這些研究的土壤上生出了線性賦範空間或巴拿赫（B 型）空間的一般理論。由於勒沃夫（Lwow）學派——巴拿赫及其弟子們的研究，這理論長成了完整的獨立的數學部門。從幾何學的觀點看，賦範空間乃是閔科夫斯基空間的無窮維情形，而閔科夫斯基空間與希勒柏特空間相似，都是歐幾里得空間的推廣。巴拿赫的弟子們中最卓著者是馬組爾及邵德爾（後者在德國法西斯佔領勒沃夫時悲慘地死於秘密警察的手中）。在邵德爾的研究中，汎函數分析的精細方法結合着拓撲學方法，在數學物理方程的古典問題中有了豐饒的應用。

如果線性汎函數分析是已前進了很遠的學科，那末非線性

汎函數分析只還在形成的階段中。在非線性問題中應當分辨"局部"的研究與"整體"的研究。"局部"研究的基本方法，如同在古典分析中一樣，乃是以線性的對象局部地近似非線性的（或用"多項式的"）。非線性問題的"整體"研究歸化成非線性函數空間的幾何及拓樸學問題，並需用極深刻且精細的拓樸學方法。

汎函數分析是年青的學科，只在過去幾十年纔形成並得到寬廣的發展。蘇聯汎函數分析是一個最年青的。但它已經在這門科學的發展中得到了基本的寶藏，它的價值不斷地增加着，並可以認爲它已佔據了領導的地位。

在着手系統地敘述蘇聯數學家三十年來的工作結果時，我們不使用材料排列的編年次序及講述形式，而是按照邏輯發展的次序系統地敘述。可以看作汎函數分析的最古典一章的積分方程則在本集中專門一篇簡述。*

非線性汎函數分析的最重要方向在關於變分法那一篇**簡述。汎函數分析方法在常及偏微分方程***方面及近似算法****方面的應用也將基本上在相應的篇章中敘述。

爲了不重覆，本篇不包括已在論有關學科的那些文章中敘述過的材料。因此基本上只論線性汎函數問題，並自然地分成六節，這六節不僅主題不同，而且方法不同——應用的工具有着逐漸增加的多樣性。

---

* 譯者註：三十年來的蘇聯數學，593—607 頁。

** 譯者註：三十年來的蘇聯數學，585—592 頁。

*** 譯者註：三十年來的蘇聯數學，481—582 頁。

**** 譯者註：三十年來的蘇聯數學，759—801 頁。

第一節　蘇聯汎函數分析學派之產生

在蘇聯關於汎函數分析問題的系統研究開始得比較不久。在"蘇聯數學十五年"集中並沒有"汎函數分析"一部份。但同時仔細地考察一下那本集子的各章之後，可以看出在不同的數學學派的花朵中已有很大的準備工作，這準備了汎函數分析在蘇聯的迅速及多方面的發展，並說明了國外對於其發展的影響。

首先談到莫斯科的拓撲學派。早在其形成的時期就已介紹了一些概念及證明，這些後來變成汎函數分析的日常工具：烏利孫關於綿續函數的延展的輔助定理；П. С. 阿列克三德洛夫介紹的重緊緻概念；吉洪諾夫關於重緊緻空間的拓撲積的重緊緻性定理。1927 年 П. С. 阿列克三德洛夫的著作所開始的抽象空間論中的幾何方向：即作爲單純逼近的極限，對應着汎函數分析所特有的由有窮維到無窮維的極限轉變。

值得注意莫斯科拓撲學學派與勒沃夫汎函數分析學派之間的相互影響。1923 年烏利孫證明了萬有可分距離空間* 之存在；1927 年巴拿赫及馬組爾證明了線段上綿續函數的空間已就正是如此的萬有空間。П. С. 阿列克三德洛夫及 В. В. 湼米慈基在 1927 年證明了在希勒柏特空間中由凸緊緻集到其自己中

* 譯者註：所謂萬有的可分距離空間，是指它本身是可分距離空間，且任意可分距離空間必可等距地映像於它的一個部份空間之上。

的綿續映像必留下一點不變（此著作並未發表）。1930年邵德爾證明了在完備賦範空間中有類似定理成立。對於可分空間，邵德爾證明，在由弱閉並且弱緊緻的凸集合到它自己部份上的弱綿續映像之下，也有不動點存在。最後，在1935年，A. H. 吉洪諾夫[2]以最一般的形式證明了關於不動點的定理——即在非賦範的，但是“局部凸的”線性空間中（所謂線性空間是局部凸的，是指含一點的每個開集必包含此點的一個凸鄰域），在由凸重緊緻集到自己中的綿續映像之下存在着不動點。

蘇聯汎函數分析中的第一個偉大的創作性方向乃是關於非線性問題。這在初看時有些近似詩論的事實，可以由蘇聯拓撲學的早先發展及其對汎函數分析上的影響來解釋。在1928——1930年出現了劉斯鐵爾尼克及史尼列勒曼關於變分法的拓撲學方法的著作。在這些研究中固有值論的變分方法推廣到較二次式性質本質上複雜得多的函數及汎函數的寬大的類上去。這方向後來與上述的莫斯科拓撲學學派的“近似”方向在劉斯鐵爾尼克[13]關於變分問題中函數空間的同調結構的著作中接近起來。

在1928—1933年在莫斯科及列寧格勒展開了關於拓撲代數的工作（濶勒莫果洛夫、彭特利雅金、A. A. 馬爾科夫），這後來與蘇聯汎函數分析的新方向接合起來。同時，有斯切帕諾夫、吉洪諾夫、及彭特利雅金關於殆週期函數的空間的拓撲性質的著作。

二十年代關於實變數函數論的個別著作也直接地涉及到汎函數分析，例如濶勒莫果洛夫[1]及屠萊科夫[1]關於 L_p 中集合

的緊緻性的著作。我們現在注意，瀾勒莫果洛夫在蘇聯汎函數分析學派的形成及發展中的作用不僅決定於其直接在這方面的著作，而且決定於由數學科學其它範圍所引起的問題的提出，及他所製作的聯系的觀點。

在列寧格勒，在三十年代由實變數函數論的學派（費赫騰果勒慈、坎托洛維赤及其學生們、A. A. 馬爾科夫）產生出汎函數分析學派。

在列寧格勒，汎函數分析的方法是在君鐵爾及 C. Л. 索伯列夫關於數學物理方程的著作的基礎上生長起來的（見關於偏微分方程那一篇）。

在烏克蘭，關於汎函數分析的著作，一方面是由代數分析方面——矩陣論、積分方程論（M. Г. 克列茵）的著作，關於矩量論繼續切比謝夫及馬爾科夫的古典主題的著作（阿希葉澤爾、M. Г. 克列茵）生長出來；另一方面由關於微分方程的定性論（博果留博夫及克雷羅夫）的著作長出。

在 1936 年出版了“數學科學的進展”第一期，這基本上是論汎函數分析的問題的，在對於青年們進行汎函數分析的宣傳起了卓越的作用。其中劉斯鐵爾尼克的簡要論文起着關於汎函數分析的第一部教學參考書的作用，而湼米慈基關於不動點方法的論文引起蘇聯數學家的廣大圈子的注意。

在“數學科學的進展”中後來又出版了關於線性運算子的譜論的基本課程——這乃是蒲列斯湼爾在莫斯科大學的講義，這是他與洛赫林合作寫成的。（參看蒲列斯湼爾[5]；蒲列斯湼爾與洛赫林[1]）。

在三十年代後半期匯成了汎函數分析方面的三個活動的集體：在莫斯科、列寧格勒及奧德薩。應注意蒲列斯涅爾在莫斯科汎函數分析學派形成的領導作用。在他的創作性教程中，在他所領導的研究討論班及其學生關於汎函數分析的論文中，都有寬大的眼光：一般線性空間，運算子譜論，一般調和分析，代數方法，解析汎函數。在這些教程及研究討論班中訓練出來大批的青年數學家，其中的 И. M. 蓋勒範德不久就成爲汎函數分析的新創作性方向的結晶中心。蒲列斯涅爾及蓋勒範德的工作在奧德薩、基輔、哈爾科夫得到了廣大的共鳴。

1937 年在莫斯科及 1940 年在基輔召開的汎函數分析會議，在後者勒沃夫的數學家們也來參加，證明了汎函數分析學派的形成時期已經完成，在蘇聯已經匯集了强有力的集團，在不同的中心莫斯科、列寧格勒、奧德薩、基輔、哈爾科夫領導着關於汎函數分析的研究；創立了一連串的創作性方面，並由汎函數分析得出了新的豐饒的應用。青年們在這會議中的積極參加證明了汎函數分析與實變數函數論在它的當時或代數在現在一樣，特別吸引着青年的科學力量到數學中的創作方面來。

第二節　線性空間的一般理論

1. 賦範空間論的幾何問題

巴拿赫空間論的一般命題中有很重要的一部份容許拓撲學·幾何學的陳述，這種陳述可以傳達出其內容的直觀性及自然性。並且這些一般命題中有很多之所以得到構成，是由於它

們是平常 n 維幾何學的種種命題的類比。

在處理函數空間的幾何學的各種問題中，烏克蘭的數學家們，特別是在奥德薩的，佔着很顯著的地位；他們創立了很多創作性的方向。這些研究可以分成三組：甲）關於單位球的幾何學及拓撲學的研究；乙）關於正則凸集論的研究；丙）關於錐體論的研究。

甲、在第一組研究的範圍中，米勒曼[1,2]，史穆良[2,6]等在樹立巴拿赫空間的自反性的種種幾何學·拓撲學鑑定法及判別法方面曾得出來很基本的結果（空間 E 叫做自反的，是指它與它的第二次共軛空間相合：$E^{**}=E$，就是說，是指對於凡 $X\in E^{**}$，可找到一個 $x\in E$，使 $X(f)=f(x)$ $(f\in E^{*})$）。這些研究的出發點乃是利用首先由蒲列斯湼爾[3]（及相當以後美國人培悌斯）提出的命題：巴拿赫空間是自反空間的必要且充分的條件乃是它的單位球是超窮閉的。為了不必解釋最後的名詞，我們依史穆良[7]所給的形式來陳述這命題：空間 E 自反的必要且充分的條件乃是其中凡依次遞含的有界凸閉集的超窮序列必有不空的交。

由蒲列斯湼爾的命題直接可知自反空間 E 的凡部份空間 G 也必是自反的。並且，還可以斷定，如果 G 是空間 E 的部份空間，那末為了 E 是自反的，必須且只須 G 及 E/G 都是自反的（M. Г. 克列茵及 В. Л. 史穆良[11]）。

下面的重要命題是巴拿赫所發現的：如果空間 E 是可分的，那末它是自反空間的必要且充分的條件乃是 E 中的單位球是弱緊緻的。

B. P. 甘特馬赫爾及 B. Л. 史穆良[2]曾證明，凡自反空間的單位球必是弱緊緻的。

直到現在，還不知道這命題之逆是否成立，就是說，巴拿赫的命題在不假定可分性時是否成立。但如果空間E的單位球的界是嚴格凸的（即不包含線段），那末對於 E 的自反性，單位球的弱緊緻不僅是必要的，而且是充分的（史穆良）。這方面的最强結果是以後由米勒曼[1]得到的，他證明，單位球弱緊緻的條件，添上條件凡位於單位球的界上的依次遞含不空閉凸集的超窮序列有不空交，乃是 E 自反性的必要且充分的條件。

例如設凡位於單位球界上的凸集是可分的，那末第二條件也滿足，而單位球的弱緊緻性就是空間自反性的必要且充分的條件。

史穆良有一很深刻的結果，即在米勒曼的定理中可以把單位球替換成任意閉有界凸體。如此，如果知道有不自反的局部弱緊緻空間E存在，那末這空間將具有誖論的性質：在它裏面不存在具有嚴格凸界的凸體（或，比如說，具有可分界的）。注意在可分空間中，或在具有（任意權的）基的空間中，具有嚴格凸界的體恆存在。

米勒曼[1]還有關於巴拿赫空間的自反性的一個巧妙的幾何鑑定法，這鑑定法後來又由培悌斯及角谷靜夫重新發現並重新證明：對於空間E的自反性的一個充分條件，乃是它的單位球是一致凸的，就是說，對於任意 $\varepsilon>0$ 必存在一個 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使等式

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta \quad (\|x\|=\|y\|=1)$$

蘊涵$\|x-y\|<\varepsilon$。

此外，由於這命題，美國數學家克拉爾克孫關於在一具有一致凸球的空間中取值的抽象函數論的結果乃是蓋勒範德的相應結果的特款，我們在第三節中將再談到後者。

其後，米勒曼及史穆良還得到過關於空間自反性的更强但是同類型的充分鑑定條件。在這裏我們略去史穆良[7]關於具有弱或强可微分範數的空間理論研究的敘述，這些研究乃是馬組爾在這問題方面的初步研究的進一步的卓著發展。

乙、在正則凸集論中，由於馬組爾、阿斯科利、愛德海特等的研究結果，得出了n維幾何學中閔科夫斯基定理的種種推廣；閔科夫斯基定理是說：如果某一線性簇不含某一凸體的內點，那末必存在包含這線性簇的一超平面，使那凸體完全位於這超平面的一側。特別可以斷定，如果某點x_0不屬於一閉凸集K，那末存在一超平面$f(x)=c$ ($f\in E^*$)，這面把x_0點由K分離開；這就是說，使$f(x_0)>c$，$f(x)\leqslant c$對凡$x\in K$成立。

如果現在轉向考察在共軛空間E^*中的超平面及凸集，那末很自然地可以辨別出來正則超平面及正則凸集。

超平面$H\in E^*$叫做正則的，是指其方程可以表成形式$f(x_0)=c$，其中x_0是E中與這超平面相應的一個元，而c是個數（在一般情形下，超平面$H\in E^*$的方程是做形式$X_0(f)=c$的，其中$X_0\in E^{**}$，c是數）。

集合$K\in E^*$叫做正則凸的，是指任意元$g\notin K$可以被一