科学版

大学数学习题精解系列

数学
考研精解
（理工类）

罗亚平　欧阳梓祥　朱乃谦　黄卫华 编

- 考研复习的理想读物
- 用历届试题教授解题技巧
- 内容紧扣大纲系统简练
- 讲述重点突出针对性强

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学习题精解系列

数学考研精解

(理工类)

罗亚平　欧阳梓祥　朱乃谦　黄卫华 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书包括微积分、空间解析几何、级数、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计，共15章，每章均分为四个部分：第一部分是考试要求，是根据考试大纲的要求总结归纳出的一些条款，以利于读者全面理解大纲的精神；第二部分是内容提要，是各章的要领和主要结论；第三部分是例题，是本书的重点，所选例题力求具有代表性，既注意例题类型的多样性，又注意例题对知识的覆盖面和难易层次；第四部分是练习，章末附有答案和提示，便于读者检查学习情况，书末附有近三年的试卷.

本书可供使用大学数学一、大学数学二试卷的理工科各专业的学生使用，也可供大学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学考研精解(理工类)/罗亚平等编.—北京：科学出版社，2003
大学数学习题精解系列
ISBN 7-03-011731-X

Ⅰ.数… Ⅱ.罗… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第059507号

责任编辑：林 鹏 杨 波／责任校对：林青梅
责任印制：安春生／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2003年9月第一次印刷 印张：23 1/4
印数：1—5 000 字数：447 000

定价：29.00元

前 言

随着国民经济的迅速发展,国家科教兴国战略的日益深入人心,近几年报考研究生的人数逐年增加.同时,随着教育部对硕士研究生数学素质的要求越来越明确,近几年考研数学试题日趋规范化,试题质量在稳步提高,新颖的、重在考查广大考生能力和基本功的试题不断涌现.编者在考研数学辅导班上,经常听到应试者反映,希望能有一本按照教育部颁发的"考试大纲"编写的,既系统又简练,重点突出、针对性强的辅导资料,以便他们在较短的时间内,高效率地掌握"考试大纲"要求,把握最新考试题型动态,强化应试能力.

编者希望通过本书,引导广大考生在全面复习的过程中,比较系统地理解考试大纲所规定的基本概念和基本理论,重视基本训练,掌握基本方法.为此本书精选了一些综合性较强的试题,并做了详尽、透彻地剖析和演绎.希望能启发广大考生掌握解题技巧,改善思维方式,注意培养分析问题的能力;希望能引导广大考生融会贯通所学知识,提高逻辑推理能力、运算能力和综合运用知识分析、解决问题的能力,从而提高考生应试能力.

本书内容包括微积分、空间解析几何、级数、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计.全书共15章,每章均分为四个部分.第一部分是考试要求,我们根据考试大纲的要求归纳出一些条款,以利于全面理解大纲精神.第二部分是内容提要,是该章的要领和主要结论.第三部分是例题,这是本书的重要部分.我们力求使选出的例题具有代表性,既注重例题类型的多样性,又注意了例题对知识的覆盖面和难易层次.第四部分是练习,自我检查掌握知识情况.书末附有近三年的试卷,以便读者对近期试卷有全面的了解,熟悉试卷题型及题量,掌握试题难易程度.

我们希望本书能成为考研应试者的良师益友.本书适用于使用大学数学一、大学数学二试卷的理工科各专业的考生,也可作为理工科各专业本科生学习数学的参考书.数学二试卷的内容仅是第一章至第七章,且其中打△号的内容不作要求.

编 者

2003.4

目　　录

第一章　函数、极限与连续

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型.

10. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），并会应用这些性质.

内容提要

1. 函数的概念与表示法

定义1　设 D 是非空实数集，若按照某一确定的法则 f，对 D 内每一个实数 x，都有惟一实数 $y\in R$ 与 x 对应，则称 f 是定义在 D 上的（一元实值）函数，记为

$$f:D\to R \text{ 或 } x\mapsto y=f(x),x\in D.$$

与数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 f 的定义域.

确定函数有两个要素：定义域和对应法则.

函数的表示法：列表法，图示法，解析表示法（有显式、隐式、参数方程等）.

2. 初等函数

常量函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数，称为基本初等函数.

基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算得到的函数称为初等函数.

3. 函数的奇偶性、单调性、周期性

1) 函数 $f(x)$ 是奇函数：满足 $f(-x)=-f(x)$；

函数 $f(x)$是偶函数：满足 $f(-x)=f(x)$.

2) 设 f 是定义在实数集D 上的函数，$\forall x_1, x_2 \in D$，若 $x_2>x_1$ 时，恒有

(1) $f(x_2)>f(x_1)$，则称 $f(x)$在 D 上严格单调增加；

(2) $f(x_2)<f(x_1)$，则称 $f(x)$在 D 上严格单调减少.

若(1)、(2)中都带等号，则分别称为广义递增(不减)和广义递减(不增).

3) 函数 $f(x)$以 T 为周期：满足 $f(x+T)=f(x)$. 所谓周期函数的周期是指其最小正周期，但不是任何周期函数都有最小正周期.

4. 数列$\{x_n\}$以 A 为极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A: \forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n>N, \text{有} |x_n - A| < \varepsilon.$$

5. 函数的极限

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A: \forall \varepsilon>0, \exists H>0, \forall |x|>H, \text{有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A: \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, 0<|x-a|<\delta, \text{有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

左极限 $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=A$：

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, -\delta<x-a<0, \text{有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

右极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$：

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, 0<x-a<\delta, \text{有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数 $f(x)$在点 a 存在极限A 的充要条件是$f(x)$在点 a 的左极限、右极限都存在且等于 A. 即

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0) = A.$$

6. 极限的四则运算

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} (\lim g(x) \neq 0).$$

7. 极限存在的两个准则

夹逼准则：设 $X\leqslant Z\leqslant Y$，如果 $\lim X=\lim Y=A$，则 $\lim Z=A$.

单调有界准则：

(1) 单调递增有上界数列必存在有限极限.

(2) 单调递减有下界数列必存在有限极限.

(3) 若 $f(x)$为增函数，且 $f(x)\leqslant M$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$必存在.

(4) 若 $f(x)$为减函数，且 $f(x)\geqslant M$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$必存在.

8. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}.$$

9. 无穷小与无穷大(在同一极限过程中)

(1) 变量 X 以数 A 为极限的充要条件是 $X-A$ 为无穷小量,因此

$$\lim X=A\Leftrightarrow X=A+Y,\lim Y=0.$$

(2) 无穷大的倒数是无穷小.

(3) 非零无穷小的倒数是无穷大.

(4) 两个(从而有限个)无穷小的代数和是无穷小.

(5) 无穷小之积是无穷小.

(6) 无穷小与有界变量的乘积是无穷小.

10. 无穷小的阶

设 X、Y 是同一极限过程中的两个无穷小.

1° 若 $\lim\frac{Y}{X}=0$,称 Y 是比 X 高阶的无穷小,记作 $Y=o(X)$.

2° 若 $\lim\frac{Y}{X}=A(\neq 0)$,称 Y 与 X 是同阶无穷小.

3° 若 $\lim\frac{Y}{X}=1$,称 Y 与 X 是等价无穷小,记作 $Y\sim X$.

4° 若 $\lim\frac{Y}{X^\alpha}=A(\neq 0)$,$\alpha>0$,称 Y 是 X 的 α 阶无穷小.

11. 函数的连续性

定义2　设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义,如果

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

或写成

$$f(a-0)=f(a)=f(a+0),$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续,否则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处间断.

若 $f(a-0)=f(a)$,则称 $f(x)$ 在点 a 左连续;若 $f(a+0)=f(a)$,则称 $f(x)$ 在点 a 右连续.

六类基本初等函数在其自然定义域上是连续的.初等函数在其自然定义域内是连续的.

12. 函数间断点的分类

第Ⅰ类间断点:$f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 均存在的间断点．包括

跳跃型间断点:$f(a-0)\neq f(a+0)$;

可去间断点:$f(a-0)=f(a+0)$.

第Ⅱ类间断点：非第Ⅰ类的间断点，包括

无穷型间断点：$f(a-0)$、$f(a+0)$中至少有一个是无穷大．

其他 $f(a-0)$与 $f(a+0)$至少有一个不存在的间断点．

13. 闭区间上连续函数的性质

最大、小值定理 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上取到最大值和最小值，即

$$\exists x_1 \in [a,b] \text{ 使 } f(x) \geqslant f(x_1), \qquad \forall x \in [a,b],$$
$$\exists x_2 \in [a,b] \text{ 使 } f(x) \leqslant f(x_2), \qquad \forall x \in [a,b],$$

其中 $f(x_1)$与 $f(x_2)$分别是函数 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值.

零点定理 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在(a,b)内存在点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

介值定理 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值分别记为 M 和 m，则 $f(x)$取到介于 m 与 M 之间的一切值 μ，即 $\forall \mu \in (m,M)$，必存在点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=\mu$.（当然 $f(x)$取到介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的一切值.）

14. 求极限的等价无穷小替换法则

设 X_1, X_2, Y_1, Y_2 均为同一极限过程中的无穷小(大)，若 $X_1 \approx X_2$，$Y_1 \approx Y_2$，且 $\lim \dfrac{X_2}{Y_2}$存在，则 $\lim \dfrac{X_1}{Y_1}$存在，且

$$\lim \frac{X_1}{Y_1} = \lim \frac{X_2}{Y_2}.$$

常见的等价无穷小有：当 $x \to 0$ 时，

$$x \approx \sin x \approx \tan x \approx \ln(1+x) \approx e^x - 1 \approx \arcsin x \approx \arctan x,$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \approx \alpha x, \qquad 1-\cos x \approx \frac{1}{2}x^2.$$

15. 关于求极限问题

本章介绍的方法有“极限存在准则”、“利用两个重要极限”、“求连续函数的极限”、“等价无穷小替换”等；在下一章还将介绍两种求不定型极限的强有力工具：“洛必达法则”和“有限展开法”；在第三章还介绍将积分和的极限化为定积分计算的特殊方法等等.

例　题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$(1990).

解 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)| \leqslant 1, \\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$ 因为 $|f(x)| \leqslant 1$，所以，$f[f(x)]=1$.

2. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$(1997).

解

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$$

3. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$,并写出它的定义域(1988).

解　由

$$f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x\quad\Rightarrow\varphi^2(x)=\ln(1-x),$$

因 $\varphi(x)\geqslant 0$,故可解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.下面求它的定义域.由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 可解出其定义域为 $x\leqslant 0$.

4. 已知函数 $f(x)$在$[0,1]$上有定义,$f(0)=f(1)$,且对任意 $x_1,x_2\in[0,1]$,$x_1\neq x_2$,都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$,证明:$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

证　(1) 当 $|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$时,结论显然成立,此时 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$.

(2) 当 $|x_2-x_1|>\frac{1}{2}$时,不妨设 $x_1<x_2$,则 $|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|\leqslant|f(1)-f(x_2)|+|f(x_1)-f(0)|<|1-x_2|+|x_1-0|=1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}$.

5. 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\varphi(x)$(1995).

解　因为 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}$,所以 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$,$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$,即有$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$,故可解出 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

6. 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$(1993).

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}$.

利用公式 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,则有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解　因为

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},\end{aligned}$$

故

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

8. 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$,

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

故有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$.

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$，$a_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,k)$.

解　用夹逼准则，记$c=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则有$\sqrt[n]{c^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{kc^n}$，不等式左边等于$c$，右边等于$c\sqrt[n]{k}\to c\ (n\to\infty)$，故据夹逼准则有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=c$.

10. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$(1995).

解　因为

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$< \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2},$$

故据夹逼准则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right) = \frac{1}{2}.$$

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$(1997).

解

$$原式 = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{2-1}{1} = 1.$$

12. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$(1993).

解　$原式 = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1} = -50.$

13. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$(1995).

解

$$原式 = \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})},$$

而当 $x\to0^+$ 时,$1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}$,$1-\cos\sqrt{x}\approx\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{x}{2}$,用求极限的等价无穷小替换,则有

$$原式 = \frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

14. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$(1997).

解　因为当 $x\to0$ 时 $(1+\cos x)\to2$,$\ln(1+x)\approx x$,故

$$原式 = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin x}{x} + x\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(3+0) = \frac{3}{2}.$$

15. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$(1991).

解　当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，$e^{-\frac{1}{x}}\to 0$，故

$$原式 = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1} = -1.$$

16. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$(2000).

解

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right] = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right] = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right] = 2-1 = 1,$$

故原极限＝1.

17. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a 的值(1996).

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$，故据假设有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{-a}{x}\right)^x} = \frac{e^{2a}}{e^{-a}} = e^{3a} = 8,$$

可解得 $a=\ln 2$.

18. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a,b 的值(1990).

解　据已知条件，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{1}{x+1}-ax-b\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}[(1-a)x-(b+1)] = 0,$$

因此必须有 $1-a=0$ 且 $b+1=0$，由此可解得 $a=1,b=-1$.

19. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$，$(a>0)$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{\ln a}{n(n+1)}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\dfrac{\ln a}{n(n+1)}=\ln a$.

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$(1994).

解

$$\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{4}{1-\tan\frac{2}{n}}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}}=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{1-\tan\frac{2}{n}}=4$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=e^4$.

21. 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, $(n=1,2,3,\cdots)$. 试证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求此极限(1996).

证　由 $x_1=10, x_2=\sqrt{6+10}=4$,知 $x_1>x_2$;设 $x_k>x_{k+1}$,则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

据数学归纳法知数列 $\{x_n\}$ 单调递减.

又显然有 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,数列 $\{x_n\}$ 有下界．据“单调有界数列必有极限”的准则可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n \text{ 存在,设为 } A.$$

再对式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 取极限,得到

$$A=\sqrt{6+A}\quad\Rightarrow\quad A=3.$$

22. 设 $x_1=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{k}{a}\right)$, $(a>0,k>0)$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{k}{x_n}\right)$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求此极限.

证　显然有 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$. 又

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{k}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{k}{x_n}}=\sqrt{k},$$

故有 $x_n\geqslant\sqrt{k}(n=1,2,\cdots)$,即 $x_n^2\geqslant k$, $\dfrac{k}{x_n}\leqslant x_n$,因此,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{k}{x_n}\right)\leqslant\frac{1}{2}(x_n+x_n)=x_n.$$

从以上讨论可知,数列$\{x_n\}$单调减少有下界 ,因此存在极限,设为 A. 下面求 A 值 . 对式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{k}{x_n})$$

两边取极限,得到

$$A=\frac{1}{2}(A+\frac{k}{A})\Rightarrow A=\sqrt{k}\qquad(因为\ A\geqslant 0).$$

注　也可用证明$\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant 1$ 或 $x_{n+1}-x_n\leqslant 0$ 来证明 $x_{n+1}\leqslant x_n$.

23. 设 $x_1=10$, $x_{n+1}=-\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求此极限.

证　显然 $x_n<0(n=2,3,\cdots)$,这时$\{x_n\}$不单调 . 设$\{x_n\}$有极限 A,则有

$$A=-\sqrt{6+A}\quad\Rightarrow\quad A^2-A-6=0\quad\Rightarrow\quad A=-2\ 或\ 3.$$

$A<0$,取 $A=-2$. 因此,

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-(-2)|&=|2-\sqrt{6+x_n}|\\&=\left|\frac{4-(6+x_n)}{2+\sqrt{6+x_n}}\right|<\frac{1}{2}|x_n+2|<\frac{1}{2^2}|x_{n-1}+2|\\&<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2+2|\to 0\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$存在极限,且极限值为-2.

24. 设 $a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$,令$\frac{a_{n+1}}{a_n}=x_n$,证明:数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

证　因为 $a_n>0$,所以 $x_n>0$,且

$$x_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{x_n}>1.$$

若$\{x_n\}$收敛于 A,则

$$A=1+\frac{1}{A},\ A>1\quad\Rightarrow\quad A=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\left|x_{n+1}-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\right|&=\left|1+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{2x_n}\left|x_n-\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right|\\&<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left|x_n-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|<(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2\left|x_{n-1}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|\\&<\cdots<(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n\left|x_1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|\to 0\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$收敛于$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

25. 设$x_1=a,x_2=b,x_{n+2}=\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)(n=1,2,3,\cdots)$,证明:数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

证　若$\{x_n\}$收敛于A,则由于

$$x_1+x_2=2x_3,\quad x_2+x_3=2x_4,\cdots,x_{n-2}+x_{n-1}=2x_n,$$

相加得

$$x_1+2x_2=x_{n-1}+2x_n=a+2b,\Rightarrow x_n=\frac{1}{2}(a+2b-x_{n-1}),$$

取极限得$A=\frac{1}{3}(a+2b)$,

$$\begin{aligned}\left|x_n-\frac{1}{3}(a+2b)\right|&=\left|\frac{1}{2}(a+2b-x_{n-1})-\frac{1}{3}(a+2b)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|x_{n-1}-\frac{1}{3}(a+2b)\right|=\frac{1}{2^2}\left|x_{n-2}-\frac{1}{3}(a+2b)\right|\\&=\cdots=\frac{1}{2^{n-2}}\left|x_2-\frac{1}{3}(a+2b)\right|\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以数列$\{x_n\}$收敛于$\frac{1}{3}(a+2b)$.

26. 设$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \frac{\sin bx}{x}, & x>0,\end{cases}$在$x=0$处连续,求常数$a$与$b$满足的关系式(1989).

解　$f(0+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b,f(0-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a=f(0)$.因$f(x)$在$x=0$处连续,即满足条件

$$f(0+)=f(0-)=f(0)\Rightarrow a=b.$$

27. 已知$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$在$x=0$处连续,求$a$的值(1997).

解　据已知条件有

$$a=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}},$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

故有$a=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

28. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,求 $f(x)$的显式表达式,并求函数 $f(x)$的间断点(1998).

解 当$|x|<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$,所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x.$$

当$|x|>1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=+\infty$,所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0.$$

当 $x=1$ 时 $f(x)=1$. 当 $x=-1$ 时 $f(x)=0$. 综上所述可得

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

易见 $x=1$ 是 $f(x)$的跳跃型间断点.

29. 求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

解 $f(x)$在$(0,2\pi)$内的间断点为

$$x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}.$$

在 $x=\dfrac{\pi}{4}$处,因 $f(\dfrac{\pi}{4}+0)=+\infty$,所以是第二类(无穷型)间断点.

在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$处,因为

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}=1,$$

所以是第一类(可去)间断点.

在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$处,因为 $f(\dfrac{5\pi}{4}+0)=+\infty$,所以是第二类(无穷型)间断点.

在 $x=\dfrac{7\pi}{4}$处,因为

$$\lim_{x\to\frac{7\pi}{4}}(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}=1,$$

所以是第一类(可去)间断点.

30. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $a<c<d<b$,证明:在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$