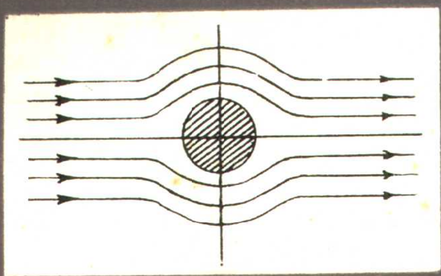
自然丛书（数学）

复数及其应用



山东科学技术出版社

自然丛书（数学）

复数及其应用

黄超群　张九思

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

内 容 提 要

本书是讲述复数及其应用的通俗读物，较详细地讲解了复数的概念，复数的各种表示法及复数运算；着重介绍了怎样应用复数来解决某些力学、物理学、数学问题；最后介绍了复变函数的初步知识。

本书语言简练，通俗易懂，是中学在校学生很好的课外读物，也可做中学教师的参考用书，还可供工程技术人员参考。

自然丛书（数学）

复数及其应用

黄超群　张九思

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本　4.5 印张　87 千字

1983 年 2 月第 1 版　1983 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—6,000

书号 13195·88　定价 0.38 元

目　录

引 言

复数是十六世纪在解代数方程时引入的。例如，在解最简单的一元二次方程 $x^2+1=0$ 时，就会遇到 -1 开平方的问题。它在实数范围内被认为是无解的，原因是负数开平方在实数范围内是不可能的。为了使负数开平方有意义，也就是要使这类方程有解，我们需要进一步扩大数的范围，于是引进了虚数。

欧洲文艺复兴之前，人们对于负数还不能认识。到1545年意大利米兰城的一位医生卡尔丹曾把40看作为 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积，也就是我们现在所说的 $5+\sqrt{-15}$ 为方程 $x(10-x)=40$ 的一个根。卡尔丹虽为首先运算虚数的人，却也常常出错误，如

$$\frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$$

就是一例。虚数在很长时间内不能为人们所接受，而是把它看成神秘的虚幻不存在的“数”，所以命名为“虚数”，这个名称就一直延用到今天。直到十八世纪中叶，关于虚数的理论很少发展。人们一直把它看成是无实际意义的东西而加以抵制。

1747年法国著名数学家达兰贝尔(D'Alembert, J. L. R., 1717—1783）对复数的研究推进了一大步。他指出，如果按多项式的四则运算法则对虚数进行运算，那么它的结果总是

$a+b\sqrt{-1}$ 的形式。这实际上提出了复数的概念。

瑞士数学家欧拉(Euler, L., 1707—1783)渐渐知道了复数在函数论方面的重要性.他于1748年发现了用复数表示的指数函数和三角函数间的关系式，即著名的欧拉公式。1777年他系统地建立了复数理论，创立了复变函数论的一些基本定理。在这以后，复数才正式被人们逐步承认和掌握，并广泛加以应用。尤其是挪威的测量学家外塞尔提出把复数 $a+ib$ 用平面上的点(a,b)表示之后，复数的立足点就更加稳固了。

到十九世纪，德国的数学家高斯(Gauss K. F., 1777—1855)正式给出了“复数”这个名词,复变函数理论得到了蓬勃的发展.经过法国数学家柯西(Cauchy A. L., 1789—1857)、德国数学家黎曼(Riemann G. F. B., 1826—1866)和外尔斯特拉斯(Weierstvass K., 1815—1897)的巨大努力,奠定了复变函数系统的理论。二十世纪以来，复数和复变函数的理论，不仅深刻地渗入了各数学分支，而且深入到工程部门中去，已成为科学家和技术人员普遍熟悉的数学工具。

本书在介绍复数基本知识之后，着重介绍如何应用复数来解决代数、几何、三角及物理学、电工学、力学等方面的问题，并向读者介绍复变函数的初步知识。

一、复数及其运算

1. 复数及其代数运算

什么是复数

在引言中我们已经提到复数，但没有详细谈复数是怎么回事。读者要问："什么是复数？能否用精确的数学语言来描述它？"

我们可以这样说，设 x，y 为任意实数，则形如

$$x+iy(\text{或 } x+yi)$$

的数称为复数，记作 z，即

$$z=x+iy,$$

其中，$i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位。x 为复数 z 的实数部分，称为实部，记作 $R(z)$ 或 $Re(z)$；y 为复数 z 的虚数部分的系数，称为虚部，记作 $I(z)$ 或 $Im(z)$，即

$$R(z)=x,\ I(z)=y;$$

或

$$Re(z)=x,\ Im(z)=y.$$

当 $I(z)=y=0$ 时，复数变成实数 $z=x$，所以，实数可以看作复数的特殊情形。当 $R(z)=x=0$，$y\neq 0$ 时，复数变成 $z=iy$，叫做纯虚数。

例如，数 8 是复数，不是虚数而是实数；数 $8i$ 是复数，也是纯虚数。

我们看到，引进复数以后，数的范围扩大了，复数既包

括了所有的实数，又包括了虚数。

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等，必须且只须它们的实部和虚部分别相等，即 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$。如果一个复数等于零，则必须且只须它的实部和虚部同时等于零。

复数 $x-iy$ 叫做复数 $z=x+iy$ 的共轭复数，记作 $\bar{z}$，即

$$\bar{z}=x-iy,$$

显然

$$\bar{\bar{z}}=z,$$

即复数的共轭复数的共轭复数等于该复数本身。所以说 $x+iy$ 与 $x-iy$ 互为共轭复数。

复数的代数运算

I. 加法 设两复数

$$z_1=x_1+iy_1,\ \ z_2=x_2+iy_2,$$

则复数

$$z=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{1}$$

叫做 z_1 与 z_2 的和，记作 $z=z_1+z_2$。

显然，如果 z_1 与 z_2 都是实数(即 $y_1=y_2=0$)，则定义(1)就与实数加法的定义相符合。

从(1)及实部与虚部的定义知，两复数之和的实部等于这两个复数实部之和；两复数之和的虚部等于这两个复数虚部之和。

例1 计算$(2+i)+(3-2i)$。

解
$$\begin{aligned}&(2+i)+(3-2i)\\&=(2+3)+(1-2)i=5+(-1)i\\&=5-i.\end{aligned}$$

II. 减法 加法有逆运算，即对任何两个复数

$$z_1=x_1+iy_1,\ \ z_2=x_2+iy_2,$$

总可以找出一个复数 z 来，使

$$z_2 + z = z_1,$$

这个复数 z 叫做 z_1 与 z_2 两个复数的差，用符号 $z_1 - z_2$ 表示。显然

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{2}$$

即两复数之差的实部等于这两个复数实部之差；两复数之差的虚部等于这两个复数虚部之差。

例 2　计算 $(3-4i)-(1+2i)$。

解　$(3-4i)-(1+2i)$

$= (3-1)+(-4-2)i = 2-6i$。

例 3　计算 $(3+4i)+(2-i)-(1-5i)$。

解　$(3+4i)+(2-i)-(1-5i)$

$= (3+2-1)+(4-1+5)i$

$= 4+8i$。

Ⅱ. 乘法　复数

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \tag{3}$$

叫做复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的积，记作 $z_1 \cdot z_2$。

如果 z_1 与 z_2 两数都是实数(即 $y_1 = y_2 = 0$)，则定义(3)就与实数乘法定义相符合。在 $z_1 = z_2 = i$ 时，从乘积的定义就有

$$i \cdot i = i^2 = -1. \tag{4}$$

容易看出，式(3)也可用下面的方法得出：先按照多项式乘法法则，将 $x_1 + iy_1$ 与 $x_2 + iy_2$ 相乘，再用 -1 代替 $i \cdot i$，即

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

例 4 计算$(2-3i)\cdot(3+i)$.

解 $$(2-3i)\cdot(3+i)$$
$$=2\times 3-3i^2+(2-3\times 3)i$$
$$=(6+3)+(2-9)i=9-7i.$$

例 5 求复数 $z=a+bi$ 与其共轭复数 $\bar{z}=a-bi$ 的积.

解 $$z\cdot\bar{z}=(a+ib)(a-ib)$$
$$=a^2-(ib)^2=a^2+b^2.$$

由此看出，$z\cdot\bar{z}$ 总是个实数.

Ⅳ. 除法 除法可作为乘法的逆运算来定义：设 $z_2\neq 0$，便可求得这样的一个复数 z，使 $z_2\cdot z=z_1$，这个复数 z 叫做复数 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z=\frac{z_1}{z_2}$，从这个定义可得到

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$
$$=\frac{x_1x_2-i^2y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{5}$$

例 6 计算 $\frac{1+2i}{2-3i}$.

解 $$\frac{1+2i}{2-3i}=\frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$$
$$=\frac{(2-6)+(4+3)i}{4+9}=\frac{-4+7i}{13}$$
$$=-\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i.$$

从复数加法和乘法的定义可直接得出下面的定律：

(i) **交换律**：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1.$$

(ii) **结合律**：

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3.$$

(iii) **乘法对于加法的分配率**：

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

从(1)、(2)、(3)、(5)式可知，复数经过代数运算后得到的数仍然是复数。

由于 $i^2=-1$，故对于虚数单位 i 的任意正整数次幂都可以确定，即

$$i^3=i^2i=-1\cdot i=-i,$$

$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1,$$

$$i^5=i^4\cdot i=i,$$

$$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=-1,$$

$$i^7=i^6i=-1\cdot i=-i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

当 n 是正整数时，

$$i^{4n}=1,$$

$$i^{4n+1}=i,$$

$$i^{4n+2}=-1,$$

$$i^{4n+3}=-i.$$

所以 i^n(n 是正整数)的值是周期地为 1，i，-1，$-i$。每当指数增加 4 时，其值不变.

例 7 $i^{200}=i^{4\times 50}=1$,

$$i^{1234}=i^{4\times 308+2}=-1,$$

$$i^{-5}=\frac{1}{i^5}=\frac{1}{i^{4\times 1+1}}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i.$$

例 8　求 $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$　(n 为任意常数)的值.

解　$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n(1+i+i^2+i^3)$

$$=i^n(1+i-1-i)=i^n\cdot 0=0,$$

例 9　化简 $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}i}$.

解　$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}i}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(2\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(2\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}$$

$$=\frac{(6+2)+(\sqrt{6}-2\sqrt{6})i}{14}$$

$$=\frac{8-\sqrt{6}i}{14}=\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{6}}{14}i.$$

例 10　当 x、y 等于什么值时,

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$$

成立?

解　因为

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=\frac{[x+1+i(y-3)](5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}$$

$$=\frac{(5x+3y-4)+i(5y-3x-18)}{34},$$

所以原式变为

$$\frac{(5x+3y-4)+i(5y-3x-18)}{34}=1+i.$$

在上式两边，实部与实部应相等，虚部与虚部应 相 等，于是有

$$\begin{cases}\dfrac{5x+3y-4}{34}=1\\[2ex]\dfrac{5y-3x-18}{34}=1,\end{cases}$$

解此方程组便得

$$\begin{cases}x=1\\ y=11,\end{cases}$$

即当 $x=1$，$y=11$ 时，$\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立。

例 11　如果方程 $x^2+2(a_1+ia_2)x+(b_1+ib_2)=0$ 有一个实根，其中 a_1，a_2，b_1，b_2 为实数，求证：

$$b_2^2-4a_1a_2b_2+4a_2^2b_1=0$$

证　设方程的实根为 x_1，则

$$x_1^2+2(a_1+ia_2)x_1+(b_1+ib_2)=0,$$

即

$$(x_1^2+2a_1x_1+b_1)+i(2a_2x_1+b_2)=0,$$

所以

$$\begin{cases}x_1^2+2a_1x_1+b_1=0 & (1)\\ 2a_2x_1+b_2=0. & (2)\end{cases}$$

当 $a_2\neq 0$ 时，由(2)式便得

$$x_1=-\frac{b_2}{2a_2},$$

代入(1)式得

$$\left(-\frac{b_2}{2a_2}\right)^2+2a_1\left(-\frac{b_2}{2a_2}\right)+b_1=0,$$

即有

$$b_2^2-4a_1a_2b_2+4a_2^2b_1=0.$$

当 $a_2=0$ 时，由(2)得出 $b_2=0$，这显然也能使

$$b_2^2-4a_1a_2b_2+4a_2^2b_1=0$$

成立，故得证。

例 12　将复数 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ 表示成 $x+iy$ 的形式。

解　因为

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i,$$

所以

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8=(-i)^8=1.$$

2. 复数的几何表示

复数之所以能应用于实际，这与它及其运算的几何表示是有关的。

用点与矢量表示复数

复数的几何表示是指用平面上的点或矢量来表示复数，现在就谈谈这个问题。

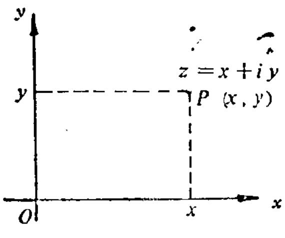


图 1

I. 点表示法

我们在平面上建立一直角坐标系 xOy，复数 $z=x+iy$ 就可用平面上横坐标等于 x，纵坐标等于 y 的点 $P(x,y)$ 来表示(图 1)，这是一种常用的表示法。这样，

对于任何复数 $z=x+iy$，有平面上一个唯一的点 $P(x,y)$ 与之对应，反之，对于平面上任何点 $P(x,y)$，有唯一的一个复数 $z=x+iy$ 与之对应。也就是说，复数和平面上的点有一一对应关系。

x 轴上的点与实数对应，故称 x 轴为实轴，y 轴上的点与纯虚数 iy 对应，故称 y 轴为虚轴，这个坐标平面叫做复平面，也叫做高斯平面，并且常把“点 z”作为“数 z”的同义词，例如点 $P_1(1,2)$ 表示数 $1+2i$，点 $P_2(-2,1)$ 表示数 $-2+i$；点 $P_3(-1,-2)$ 表示数 $-1-2i$；点 $P_4(2,-2)$ 表示数 $2-2i$（图 2）。

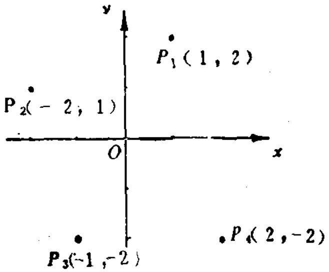


图2

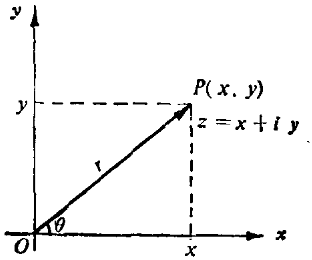


图3

Ⅱ. 矢量表示法

复数 z 还可以用原点指向点 $P(x,y)$ 的矢量来表示。我们知道，对于复平面内任一点 $P(x,y)$，有一矢量（有向线段）$\overrightarrow{OP}$ 和它对应（图 3）。因为矢量 $\overrightarrow{OP}$ 与复平面上的点 $P(x,y)$ 之间有一一对应关系，而平面上的点 $P(x,y)$ 和复数 $z=x+iy$ 之间也有一一对应关系，所以复数 $z=x+iy$ 与矢量 $\overrightarrow{OP}$ 之间也有一一对应关系，故可用平面上的矢量表示复数。

用复平面内的点 $P(x,y)$ 或矢量 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数，叫做复数 z 的几何表示。

复数的模与辐角

由于复数 $z=x+iy$ 可以用矢量 $\overrightarrow{OP}$ 表示，因此就把矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 叫做复数 z 的模或绝对值，记作 $|z|$，即 $|z|=r$，矢量 $\overrightarrow{OP}$ 与实轴正向所成的角 θ，叫做复数 $z=x+iy$ 的辐角，记作 $\operatorname{Arg} z$，即 $\operatorname{Arg} z=\theta$，从图 3 可以看出

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{1}$$

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z)=\frac{y}{x}. \tag{2}$$

当 $z=x+iy\neq 0$ 时，x，y 就不同时为零，由 (1)式知 $r>0$，由(2)式可以求出 θ，但终边相同的角可以相差 2π 的整倍数，所以任一个复数 $z\neq 0$ 的辐角有无穷多个值，这些辐角的值相差 2π 的整数倍。如果 θ 是其中的一个值，那么

$$\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi \quad (k\text{ 为任意整数})$$

就给出了 z 的全部辐角。

由于 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，为方便起见，我们把满足条件

$$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$$

的 θ 称为辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，并记作 $\theta_0=\arg z$，这样 $\arg z$ 就只有一个值了。当点 z 在包括实轴在内的上半平面时，θ_0 取非负值，并适合 $0\leqslant\theta_0\leqslant\pi$；当点 z 在不包括实轴在内的下半平面时，θ_0 取负值，并适合 $-\pi<\theta_0<0$。当 $z=0$ 时，$|z|=0$，而辐角不确定。

例 1 求复数 $\frac{(3+4i)(1-i)}{2i}$ 的实部与虚部,模与辐角.

解 因为 $z=\frac{(3+4i)(1-i)}{2i}=\frac{7+i}{2i}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$,

所以

$$\boldsymbol{R}(z)=\frac{1}{2},\quad \boldsymbol{I}(z)=-\frac{7}{2},$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\arg z=\operatorname{arc\,tg}(-7).$$

由于复数 $z=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$ 对应的点在下半平面,故 $\arg z$ 应取负值,于是

$$\arg z=\operatorname{arc\,tg}(-7)=-81°52'.$$

例 2 已知 $|z|-z=2+3i$, 求 z.

解 令 $z=x+iy$, 则 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, 于是有

$$\sqrt{x^2+y^2}-(x+iy)=2+3i,$$

即

$$(\sqrt{x^2+y^2}-x)-iy=2+3i.$$

由复数相等的条件得

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-x=2 & (1)\\ -y=3, & (2)\end{cases}$$

由(2)式得 $y=-3$, 将其代入(1)式有

$$\sqrt{x^2+9}-x=2,$$

即

$$\sqrt{x^2+9}=x+2.$$