高等数学参考资料

下册

八所高等院校1986年度招收硕士研究生
高等数学联合命题组编

出版社

高等数学参考资料

下册

八所高等院校1986年度招收硕士研究生
高等数学联合命题组编

哈尔滨工业大学出版社

高等数学参考资料

下

八所高等院校1985年招收硕士研究生
高等数学课程命题组编

哈尔滨工业大学出版社出版
北 京 市 新 华 书 店 发 行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张10.875 字数243,000
1986年2月第1版 1986年2月第1次印刷
印数 1—30,000

书号13341·16 定价2.35元

前　　言

继上册出版之后，于1985年7月，上海交通大学、天津大学、华中工学院、华南工学院、西安交通大学、南京工学院、浙江大学、哈尔滨工业大学等八所院校的命题代表又集聚在哈尔滨工业大学镜泊湖休养所，共同命出了1986年度招收硕士研究生的高等数学联合试题。参加这次联合命题的学校还有大连工学院、西北工业大学、东北工学院、重庆大学等四所院校。

1986年试题确定后，我们又对各院校为1985与1986两个年度联合命题会议所提供的试题，特别是对工程数学部分的试题，进行了精选和增补，共选出200多道题，并给出了解答，作为《高等数学参考资料》的下册出版。其内容为数学分析部分的补充题以及工程数学中线性代数、复变函数与概率论三个部分的题目。这些题的内容比较全面，综合性、概念性强，对运算技能和解题方法都有相应的要求，并具有一定的难度，比较全面地体现了参加联合命题的各院校对考生所应掌握数学知识的基本要求。

这本书是报考硕士研究生同学的有益参考资料，同时可供各种工科院校的在校生，广大自修高等数学的读者以及从事工科高等数学教学的同志们参考。

本书末，附有1986年度高等数学联合试题四份和参考题解，一并供给读者参考。

编　者

1985.9

目　　录

一、数学分析部分的补充

1. 设函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$．

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

1） 证明$f(x)$是奇函数；

2） 按照单调函数的定义，证明$f(x)$严格单调增加；

3） 求所给函数的反函数。

解 1） 证 ∵ $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\ln\frac{-x^2+1+x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

∴ $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数。

2） 证 对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$且 $x_1>x_2$， 有

$$f(x_1)-f(x_2)=\ln(x_1+\sqrt{1+x_1^2})-\ln(x_2+\sqrt{1+x_2^2})$$

要证明 $f(x_1)>f(x_2)$，只需证明

$$(x_1+\sqrt{1+x_1^2})-(x_2+\sqrt{1+x_2^2})>0$$

上式左边 $=x_1-x_2+\sqrt{1+x_1^2}-\sqrt{1+x_2^2}$

$$=x_1-x_2+\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(\sqrt{1+x_1^2}+x_1+\sqrt{1+x_2^2}+x_2)}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}>0$$

于是

$f(x_1)>f(x_2)$，即在$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)$严格单调增加.

3） ∵ $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，由 1） 有

$$-y=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$$

∴ $x+\sqrt{1+x^2}=e^y$， $-x+\sqrt{1+x^2}=e^{-y}$

两式相减，解得 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，所求的反函数是

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}$

$$\xlongequal{\;\;}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2y}$$

$$=e^{-2}$$

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

解 $(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\left(\dfrac{2}{4}\right)^n\right.$

$$\left.+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}$$

对于一切正数 n，有

$$1<\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1<4$$

于是

$$4<(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}<4\times4^{\frac{1}{n}}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}4\times4^{\frac{1}{n}}=4$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4$$

4. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义严格递增，且恒有 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$，试求 $f'(x)$。

解 先证 $f(x)=x$，用反证法，若有某 x 使

$f(x)>x$，则由 $f[f(x)]>f(x)$，又

$f\{f[f(x)]\}>f[f(x)]>f(x)$，与假设矛盾。同理

$f(x)$ 也不小于 x，故得证 $f(x)=x$，从而得所求 $f'(x)=1$。

5. 求极限

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+2)-\ln x]$；

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

解 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+2)-\ln x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2\cdot\frac{x}{2}}$$

$$=\ln e^2=2$$

2) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2}{2x\sin x^2+2x^3\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2/x^2}{\sin x^2/x^2+\cos x^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

6. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{\arcsin(1-\sqrt{1+x})}$$

解　利用$\arcsin x\sim x$，有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{1-\sqrt{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sqrt{1+x})[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]}{-x}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=-2e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=-2e\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}$$

$$=(-2e)\left(-\frac{1}{2}\right)=e$$

7. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left[\left(3+\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)^7+\left(3-\frac{\sin x}{2}\right)^7\right]$$

解　令　$f(x)=(3+x)^7$，则　$f'(0)=7\times 3^6=5103$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\left(3+\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)^7-3^7}{\frac{\sin x}{2}}+\frac{\left(3-\frac{\sin x}{2}\right)^7-3^7}{-\frac{\sin x}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\left(3+\frac{\mathrm{tg}x}{2}\right)^7-3^7}{\frac{\mathrm{tg}x}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(3-\frac{\sin x}{2}\right)^7-3^7}{-\frac{\sin x}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[f'(0)+f'(0)\right] = 5103$$

8. 计算极限

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - x\sin\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,dt + \ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}$

解 1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - x\sin\frac{1}{x}\right) \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6}$$

2) 法一 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \frac{x}{1+x^2}}{4x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin x - x}{4(x^3+x^5)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x - 1 + (1+x^2)\cos x}{4(3x^2+5x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)\sin x + 4x\cos x}{4(6x+20x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)\frac{\sin x}{x} + 4\cos x}{24+80x^2} = \frac{5}{24}$$

法二　利用 $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^5)$,

$$\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)\right)$$

则　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}$

$$\frac{\int_0^x \left\{t - \frac{t^3}{3!} + o(t^5)\right\}dt - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^6) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^6)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4!}\right) + o(x^2)\right] = \frac{5}{24}$$

9．设函数 $f(x)$ 处处连续，并满足关系式

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 及 $f(0)$。

解　$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(1 + \frac{x^2 + f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{x^2 + f(x)}}\right\}^{\frac{x^2 + f(x)}{x^2}}$$

$= e^3$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 + f(x)}{x^2} = 3$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 2$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$

其次，由题设知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3$$

即 $$\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3+o(1)$$

于是 $$1+x+\frac{f(x)}{x}=e^{3x+o(1)}$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

由此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，而 f 连续，所以 $f(0)=0$。

10. 证明 对每个正整数n，方程

$$x+x^2+\cdots+x^n=1$$

在闭区间 $[0,1]$ 上必有且只有一个根，记此根为 x_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 令 $f(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1,\qquad x\in[0,1]$

则 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}>0,\qquad x\in[0,1]$

而$f(0)=-1<0$，$f(1)=n-1>0,\qquad n>1$

注意，由$f'(x)>0$，知$f(x)$在$[0,1]$上是严格单调增加的，且在端点异号，因此，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 有且仅有一个零点，$n=1$时上述结论显然也对，此时根为$x=1$。

设f在$[0,1]$内的零点为x_n，下面来证$\{x_n\}$是单调减少的有界数列。

有界性显然：　$0<x_n<1$

单调性：　$n=1$时，$x-1=0$，根$x_1=1$，

$n=2$时，$x^2+x-1=0$，根 $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<x_1$

令设　$x_n<x_{n-1}$，下面证　$x_{n+1}<x_n$。

设x_n，x_{n+1} 分别为下列两个方程的根，

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_{n-1}=0$$

$$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$$

两式相减得

$$x_{n+1}^{n+1}+(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}^{n-1}+x_{n+1}^{n-2}x_n+\cdots+1)=0$$

上式第一项>0，第二项的第二个因子>0，故必

有　$x_{n+1}-x_n<0$

即　$x_{n+1}<x_n$

根据单调有界定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$x_n$应满足方程

$$x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n-1=0$$

即
$$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$$

令　$n\to\infty$，注意到 $0<x_n<1$，即 $x_n^n\to0$，故得

$$\frac{a}{1-a}=1\ ,\qquad a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\qquad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$$

11．一倒置圆锥形容器，深10尺，顶上圆口直径6尺，今以每分钟 8 立方尺之速率注水于其中，问当水深 4 尺时，液面上升之速率为何？

解　如图（1—1），设在某时刻t时，液面半径为r，水

深为h，水之体积为V，水面面积为A，则

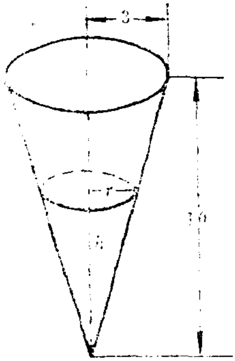

图 1—1

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

$$\because\quad \frac{r}{3}=\frac{h}{10}$$

$$\therefore\quad r=\frac{3}{10}h$$

故 $$V=\frac{3\pi}{100}h^3$$

上式对 t 微分得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{9\pi}{100}h^2\frac{dh}{dt},$$

即 $$\frac{dh}{dt}=\frac{100}{9\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

$$\because\quad \frac{dV}{dt}=8$$

$\therefore$ 当 $h=4$时，有

$$\frac{dh}{dt}=\frac{100}{9\pi\cdot 16}\times 8=\frac{50}{9\pi}\quad（尺/分）$$

12．设a，b，c都是正常数，试证明多项式

$$p(x)=x^5+x^4+x^3-ax^2-bx-c$$

的正零点有且仅有一个。

证　因为　$p(0)=-c<0$，$p(+\infty)>0$

所以$p(x)$至少有一个正零点。

若$p(x)$至少有两个正零点，由于$p(0)<0$，$p(+\infty)>0$，故$p(x)$至少有三个正零点（其中零点的重数计入个数）所以$p'(x)$至少有两个正零点，由于$p'(0)<0$，$p'(-\infty)>0$，

所以$p'(x)$也至少有一个负零点，从而$p'(x)$至少有三个实零点，$p''(x)$至少有两个实零点，$p'''(x)$至少有一个实零点。但这是不可能的，因为$p'''(x)=60x^2+24x+6>0$，所以$p(x)$的正零点有且仅有一个。

13. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有$|f''(x)|\leqslant M$，且$f(x)$在(a,b)内取得最大值，试证

$$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a)$$

证 由可导函数极值存在的必要条件，在(a,b)内至少存在一点c，使得$f'(c)=0$，函数$f'(x)$在$[a,c]$及$[c,b]$上应用微分中值定理有

$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_1)(a-c),\qquad a<\xi_1<c$$

$$f'(c)-f'(b)=f''(\xi_2)(c-b),\qquad c<\xi_2<b$$

注意到$f'(c)=0$，于是

$$|f'(a)|=|f''(\xi_1)|(c-a)\leqslant M(c-a)$$

$$|f'(b)|=|f''(\xi_2)|(b-c)\leqslant M(b-c)$$

两式相加

$$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(c-a)+M(b-c)=M(b-a)$$

证毕。

14. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内有二阶导数$f''(x)$，又设连接点$A=(a,f(a))$及点$B=(b,f(b))$的线段与$f(x)$的图象有交点P，而P点异于A、B两点，证明存在点$c\in(a,b)$，使得$f''(c)=0$。

证 参见图（1—2），设P点坐标为$(x_0,f(x_0))$，由微分中值定理，存在点$\xi_1\in(a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

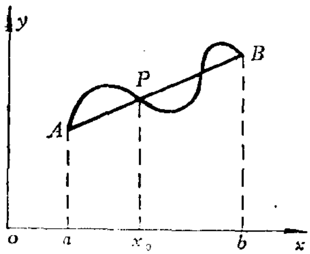

图 1—2

注意到A、B、P三点在同一直线上，因此AP、PB有相同斜率，故这即是

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$$

对函数$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上应用洛尔定理，则存在点$c\in(\xi_1,\xi_2)$，使$f''(c)=0$。

15． 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上$f(x)>0$，且$f''(x)$存在，并有$f''(x)<0$，试证明$f'(x)>0$。

解 用反证法：

1) 若有$x_0>1$，使$f'(x_0)\leqslant 0$，则因$f''(x)<0$，$f'(x)$单调减少，故当$x>x_0$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$单调减少。

2) 若$f(x)$无下界，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故当$x$足够大时，$f(x)<0$，这与$f(x)>0$的题设矛盾。

3) 若$f(x)$有界，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l<+\infty$存在，因

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi),\qquad x<\xi<x+1$$

故当x足够大时，有

$$|f'(\xi)|=|f(x+1)-f(x)|\leqslant$$
$$|f(x+1)-l|+|l-f(x)|<2\varepsilon$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi)=0$

由于 $f'(x)<0$及$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi)=0$，故$f'(x)$不能单调减少，这与$f''(x)<0$的题设矛盾，即$f'(x_0)$不能小于或等于0，即$f'(x_0)>0$。

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，试求函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的导函数。

解 ∵ 当 $x\neq 0$ 时， $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}[xf'(x)-f(x)]$

当 $x=0$ 时，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\therefore\quad g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\Big[xf'(x)-f(x)\Big], & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}$$

17. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的二阶导数 $f''(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，设

$$\varphi(x)=\begin{cases}f'(0), & x=0\\ \dfrac{e^x}{x}f(x), & x\neq 0\end{cases}$$