



7

中学数学教材研究与教案选

第 四 册

北京师范大学出版社

前 言

多年来，广大数学教师在教学实践中积累了非常丰富的教学经验，将这些经验进行交流与推广，无疑将对开展中学数学教学的研究，提高数学教学质量，会有积极的意义。为此，我们在翻阅了解放以来，尤其是近三、四年来有关中学数学教学的大量文章与资料的基础上，约请了全国二十多个省、市、自治区的二百多位教师撰写文章与教案，并经过精选和修改，编辑了《中学数学教材研究与教案选》这套书。本书的作者中，绝大部分都具有二、三十年甚至更长时间的教學实践，其中数十名是特级教师。选入书中的文章与教案可以说是他们几十年辛勤劳动的结晶，在一定程度上反映了全国某些地区中学数学教学的情况。

本书是按照一九八二年公布的《全日制六年制重点中学数学教学大纲（草案）》（征求意见稿）的教学体系，结合现行统编教材编写的。各章配备的教材分析或经验文章一般概括了课本各章、节的主要内容及其在初等数学中的地位和作用，提出了教学目的和要求，对重点和难点还配备了适当数量的教案。有的还对教材的结构作了分析，对教学方法提出了一些宝贵的建议。教案多数比较详尽，从中不仅能看到作者课堂教学的全过程，而且还能看出作者的一些意图和想法；少数教案较略，但言简意明，脉络清楚，重点突出。总之，本书就如何通过课堂教学加强学生的基础知识，进行基

本技能的训练以及培养学生的能力等方面各具特色，可供广大中学数学教师研究和参考。还需指出的是书中的文章与教案一般都对学生提出了较高的要求，读者在选作参考时，应结合自己的教学实践，而不能简单录用。

本书共分六册出版。前三册为初中部分；后三册为高中部分。具体内容安排：第一册为初一代数；第二册包括初二、初三代数；第三册包括初二、初三几何；第四册包括高一、高二代数与三角；第五册包括高一、高二立体几何与解析几何；第六册为高三代数与微积分。

参加本书编辑工作的有罗小伟、彭文遼、晨光、周耿等同志，最后由北京师范大学数学系钟善基、曹才翰先生审定。

由于水平有限，又兼仓促完稿，本书在内容的选材，文章与教案的安排以及文字的修饰等方面，还会存在许多问题，恳请同志们批评指正。

编 者

目 录

幂函数、指数函数和对数函数 (教案)

集合 (一)	杨天明 (1)
集合 (二)	杨天明 (5)
子集	杨天明 (11)
交集	贺龙泉 (18)
并集	贺龙泉 (23)
映射、函数	刘云章 (29)
一一映射	唐兴超 (36)
逆映射	唐兴超 (41)
函数 (续)	刘云章 (44)
幂函数 $y = x^n (n > 0)$ 的图象和性质 (一) ...	陈在钿 (51)
幂函数 $y = x^n (n < 0)$ 的图象和性质 (二) ...	陈在钿 (55)
反函数	白森林 (60)
互为反函数的函数图象间的关系	白森林 (65)
指数函数及其图象	许鸣岐 (70)
指数函数的图象和性质	许鸣岐 (74)
指数函数 $y = a^x$ 的练习	许鸣岐 (77)
对数函数及其图象	许鸣岐 (80)
对数函数的图象和性质	许鸣岐 (83)
对数函数 $y = \log_a x$ 的练习	许鸣岐 (86)
指数方程及其基本解法	吴德涛 李大元 (89)
对数方程及其基本解法	吴德涛 李大元 (93)

指数对数方程 吴德涛 李大元 (97)

多项式 (教案)

余数定理与因式定理 师立群 (101)

用综合除法、因式定理分解因式 师立群 (107)

三角函数

谈谈“三角函数”的教学 顾 青 (114)

教案

弧度制 吉 耳 (150)

已知三角函数值求角 (一) 李根水 (157)

已知三角函数值求角 (二) 李根水 (162)

三角函数线 (一) 李根水 (166)

三角函数线 (二) 李根水 (171)

两角和与差、倍角、半角的三角函数 (教案)

两角和与差的正切函数 刘景昆 (179)

半角的正弦、余弦和正切 杨永靖 (183)

三角函数的积化和差 张玉春 (190)

三角函数的和差化积 张玉春 (194)

三角变换练习 徐圣道 (200)

反三角函数 简单的三角方程

反三角函数和简单的三角方程 陈鸿侠 (204)

教案

反正弦函数的定义 鲍光培 (229)

反正弦函数的图象和性质 鲍光培 (232)

反正弦函数的练习 鲍光培 (235)

简单的三角方程 陆志昌 (237)

充分条件和必要条件 杨大淳 (244)

充要条件.....杨大淳(248)

不等式

关于不等式的教学.....杨佩祥(254)

教案

不等式性质.....郭思乐(272)

同解不等式和不等式解法(一).....郭思乐(279)

同解不等式和不等式解法(二).....郭思乐(284)

含指数、对数、三角函数的不等式的解法...李彭龄(288)

公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 及其应用.....赵大悌(295)

行列式(教案)

行列式的性质.....胡伟华(300)

按一行展开行列式.....胡伟华(307)

复数(教案)

复数的向量表示、复数的模.....

.....天津市冶金局技工学校数学研究室(311)

复数的四则运算、复数的加法与减法.....

.....天津市冶金局技工学校数学研究室(316)

复数加法与减法的几何意义.....

.....天津市冶金局技工学校数学研究室(321)

复数的乘法.....黄久征(326)

复数开方.....徐水法(329)

二项方程与实系数方程虚根成双定理.....金晓树(334)

复数的三角形式.....薛新国(341)

利用复数三角形式乘、除法的几何意义解某

些几何问题.....薛新国(347)

中学代数中绝对值的教学.....储传能(354)

幂函数、指数函数和对数函数(教案)

集 合 (一)

教学目的：使学生初步了解集合概念与表示集合的两种方法；会按照指定方法表示一些集合；注意培养学生用集合观点认识概念的内涵与外延的能力。

教学过程：

一、要求学生观察下面四组对象（写在黑板上，或出示预先写好的小黑板）：

- (1) 1, 2, 3, 4, 5;
- (2) 1983 年，全国出生的婴儿的全体；
- (3) 所有很大的实数；
- (4) 所有大于 10^4 的实数。

并提出问题：每一组对象分别指的是些什么？每一组中含有的对象是完全确定的吗？这里，应对“确定”稍加解释，指出：能按照明确的标准判断任何一个对象在或者不在该组中，结论只能有一个，这就是说，判断既不能含糊不清、模棱两可，也不能因人而异、服从主观意愿，这样便说该组含有的对象是完全确定的。使学生明白第（1）、（2）、（4）组所含的对象是完全确定的。

进一步概括：一组确定的对象的全体形成一个集合

(或简称集)，形成集合的每一个对象，叫做这个集合的元素，并结合第(1)、(2)、(4)组对象所形成的集合分别加以说明。指出：元素对于集合的关系是成员对于集体的隶属关系(参照第(2)组对象组成的集合说明)。

初中数学中，讲过“有理数集”，“不等式(例如： $2x-1>x+3$)的解集”，说明它们为什么能称为集合(集)。再看课本列举的各组对象，说明为什么分别形成集合。从而：(1)及时巩固对于一组对象的全体形成一个集合的条件认识；(2)使学生认识数、式、几何图形、实物等都可以成为集合的元素，说明集合概念是十分基本、十分普遍的。

二、引用列举的实例，讲述什么叫有限集、什么叫无限集，举例让学生辨别。

三、怎样表示一个集合呢？

首先，集合是从整体上、全体上来表达一类确定的对象的，在数学上，用大括号 $\{ \}$ 表示集合概念反映的这个整体。

由元素1, 2, 3, 4, 5组成的集合，就写成 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，表明大括号里填出的是全部元素。这种将元素一个不漏地一一填在大括号里(相邻两个元素用逗号隔开)用以表示集合的方法称为列举法。用列举法表示一个集合时，随便调换元素的顺序是完全允许的，如：也可用 $\{3, 2, 5, 1, 4\}$ 表示由1, 2, 3, 4, 5组成的集合。

例1 试用列举法表示下面各组对象分别形成的集合：

(1) $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$;

(2) 英语字母表里的所有元音;

(3) 全体小于10的质数;

(4) 绝对值小于 1 的所有整数。

对于 (4)，用列举法表示为 $\{0\}$ ，应向学生强调指出： $\{0\}$ 是由数 0 组成的集合，数 0 是集合 $\{0\}$ 的一个元素，0 与 $\{0\}$ 具有不同意义，但有隶属关系。

四、通过实例说明：还有一些集合，其元素不能无遗漏地一一列举出来，或者不便于、不需要一一列举出来，而是根据属性来确定集合的元素。这样的集合可以用描述法表示。如：所有大于 10^4 的实数组成的集合就是这样，可用描述法表示为：

$\{a \mid a \text{ 是大于 } 10^4 \text{ 的实数}\}$ 。

在大括号内划一条竖线（或用冒号“：”，或用分号“；”），左边是集合的代表元素，右边指明集合元素的公共属性。

强调指出：竖线左边指的是一个元素，它既不表示集合的某一个具体元素，也不表示集合的全体元素；它是作为该集合的代表、一般表达形式出现的，只有加上大括号后，才显示出全体性。我们说：“ a 是大于 10^4 的实数”，是指 a 可以取大于 10^4 的任何一个实数值， a 本身并不表示大于 10^4 的全体实数的集合。

在不致引起混淆的情况下，用描述法表示集合还可以有更省略的形式： $\{\text{大于 } 10^4 \text{ 的实数}\}$ 。这时，去掉竖线及表示代表性元素的符号，直接填元素的公共属性。

例 2 用描述法表示下列各集合：

(1) 正实数；

(2) 1, 2, 3, 4, 5；

(3) 抛物线 $y = x^2 + 1$ 上的点的坐标。

解答时，引导学生注意：第 (1) 题可以用 $\{x \mid x \text{ 是正实}$

数}或{正实数}表示；第(2)题可表示为{小于6的正整数}，当集合的元素已被一一列举出来时，要用描述法表示必须细心分析这些元素的公共属性，使得根据这种属性足以把这些元素与其他对象区别开；第(3)题可表示为 $\{(x, y) | y = x^2 + 1\}$ ，说明适合函数关系 $y = x^2 + 1$ 的任何一个有序数对(坐标)都是这个集合的元素，如： $(-2, 5)$ 便是这个集合的一个元素。

五、简短小结

这节课要求(1)初步了解集合的概念，要注意一组对象在什么条件下才形成一个集合，要区别 a 与以 a 为元素组成的集合 $\{a\}$ ；(2)初步了解表示集合的两种方法——列举法和描述法，并能按指定方法表示一些集合。

六、布置作业

1. 阅读课文(到集合的两种表示法止，按上面小结里的要求阅读)；

2. 书面作业(参照六年制重点中学高中数学课本，第一册代数，1981年12月第一版，下同)；第4页练习第1—10题；

3. 思考题：

(1) 考虑下面各组对象，分别是否形成集合，为什么？——“所有身材瘦小的人”，“方程 $x^{100} - 41x^{17} + x = 0$ 的所有实根”，“我们班上的全体同学”；

(2) 写出方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的所有的根组成的集合；

(3) 用{所有的整数}或者{整数的集合}来表示由全体整数组成的集合，对不对？(答案：不对。“所有的整数”指的是对象，而不是属性。不符合描述法表示集合的要求，

并且，大括号即有“全体”这一含义；{整数的集合}则是以“整数的集合”为元素组成的集合，完全是另一个集合。正确的表示法是：{整数}。）

贵阳市教育局教研室 杨天明

集 合 (二)

教学目的：（1）使学生进一步了解集合概念、集合的两种表示方法及其适用场合；（2）使学生初步能使用表示元素对于集合的隶属关系的术语、符号及常用数集符号；（3）注意培养学生用集合观点认识概念的内涵和外延的能力。

教学过程：

一、复习提问，引进新课

请一个学生回答：

（1）一组对象在什么条件下能组成集合？

（2）“所有身材瘦小的人”，“方程 $x^{100} - 41x^{17} + x = 0$ 的所有实数根”，“我们班上的全体同学”分别形成集合吗？为什么？

由教师对学生的回答进行简短讲评，指出：“身材瘦小”其意义含糊不清，无明确标准，无法判断；“我们班上的全体同学”其对象依“我们”而定，具有主观性。因此，这两组对象都不能形成集合。根据方程的实根的定义，对于任意给出的一个实数 a ，由于对实数作乘方、乘法、加减运

算，结果都是确定的数，从而 $\alpha^{100} - 41\alpha^{17} + \alpha$ 是一确定的数，它如果等于 0，则 α 是原方程的实数根；否则便不是。虽然我们只晓得 0 是原方程的一个实根，原方程还有哪些实根，没有指出来，我们也不清楚，但“方程 $x^{100} - 41x^{17} + x = 0$ 的所有实数根”仍然组成一个集合。从而，引导学生对集合元素的确定性的认识深入一步。

再请一个学生回答：方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的所有根组成的集合是什么？最后由教师给出正确答案，原方程的根有两个： $x_1 = x_2 = 1$ ，但根的集合是 $\{1\}$ 。向学生说明：一组确定的对象形成集合后，两个相同的对象列入集合时，只算作一个元素。

到此，对作为数学研究对象的集合概念的基本性质（特征）已举例说明，有必要进一步概括、小结如下：

(1) 元素的确定性：对于任何一个对象，都能确定地判断它是或者不是某个集合的元素，二者必居且仅居其一；

(2) 元素的互异性：一组对象的全体组成集合后，其中相同的对象在集合中只算作一个元素。也就是说：集合中的任何两个元素都是不相同的；

(3) 元素的无序性：如果一组对象的全体组成集合，列举该集合元素时与先后顺序没有关系。

（以上，可在黑板上写出，也可预先写在小黑板上，逐条向学生解说）

二、表示集合有两种方法，通过比较进一步认识它们适用的场合，合理地选用它们、正确地表示集合，仍然是应注意的事，为此，说明以下几点：

1. 用列举法表示集合的优点是清楚、明显，一眼就能

看清集合的所有元素。有些集合看起来可以用列举法表示，但实际上不必要（如：绝对值小于 10^4 的整数的集合），不方便（如：18 到 24 之间（包括 18 与 24）7 个自然数的立方数的集合，用列举法表示应为 $\{5832, 6759, 8000, 9261, 10648, 12167, 13824\}$ ），甚至是不可能的（如：圆周率 π 这个无理数中，出现无穷次的十进制数码的集合。0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 是十进制数的数码，在 π 中，这些数码有哪几个出现的次数是无穷的，那么所有这样的数码便是这个集合的元素。这个集合显然是有限集，却不能用列举法表示）。

2. 用描述法表示集合的优点是集合元素的公共属性能被清楚地刻划出来，便于利用属性研究集合间的关系；而且，不能用列举法表示的集合，只好借助于描述法来表示。当然，列举法也是不可少的，例如：集合 $\{x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2\}$ 的元素的公共属性不明显，难以概括，不便于用描述法表示这个集合。

3. 有些集合用两种方法表示都很方便（如： $\{ \text{小于 6 的正整数} \}$ 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ）；有些数学问题的解法反映了把集合的描述法表示转化为用列举法表示的要求（如把集合 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 化为集合 $\{1, 2\}$ ）。

4. 对于用列举法表示的集合，根据对每一个具体元素的观察，正确概括出所有元素的公共特征；对于用描述法表示的集合，根据对公共属性的分析，正确地判断哪些对象是它的元素。这两方面的能力是应该在学习中努力培养的。

例 1 下面各集合是用什么方法表示的？试用另一种表示法表示它们。

$$(1) \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$(2) \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

$$(3) \{(x, y) \mid 3x + 2y = 16 \text{ 且 } x, y \text{ 是正整数}\}$$

$$(4) \{r \mid r = (-1)^n, \text{ 其中, } n \text{ 是整数}\}$$

(答案: (1) {18 的正因数}, (2) {绝对值小于 6 的非负整数的平方数}, (3) {(2, 5), (4, 2)}; (4) {1, -1})

三、大家已经知道, 元素对于集合的关系是隶属关系。例如, 3 是 {1, 2, 3, 4, 5} 的元素, 我们就称: 3 属于 {1, 2, 3, 4, 5}, 用符号 “ $\in$ ” 表示 “属于”, 记作:

$$3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$\sqrt{2}$ 不是 {1, 2, 3, 4, 5} 的元素, 我们称: $\sqrt{2}$ 不属于 {1, 2, 3, 4, 5} 用符号 “ $\notin$ ” (或 $\bar{\in}$) 表示 “不属于”, 记作:

$$\sqrt{2} \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

要求学生正确理解符号含义、读法及书写方式, 提醒学生: 符号开口一方朝向集合; 朝向对象一方是弧形的, 不是尖角; 也不能写成英语字母 E。

在数学里, 一般用大写的拉丁字母表示集合, 用小写拉丁字母表示集合的元素。如: $a \in A$, 表示 a 是集合 A 的元素, $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的元素。如果用 B 表示集合 {1, 2, 3, 4, 5}, 即有: $3 \in B$, $\sqrt{2} \notin B$, 等等。

最后, 有许多数集是基本的, 今后常常会用到。这些数集, 我们约定用专门符号表示, 以后, 在不致混淆的情况下, 我们将不再加以说明:

用 N 表示自然数集, 即全体自然数的集合;

用 Z 表示整数集, 即全体整数的集合;

用 Q 表示有理数集, 即全体有理数的集合;

用 R 表示实数集, 即全体实数的集合。

N 、 Z 、 Q 、 R 分别取自自然数集、整数集、有理数集、实数集的拉丁语词组的第一个字母的大写形式。为了方便, 还常用 Q^+ 表示正有理数集, R^- 表示负实数集, 等等。

例 2 (1) 指出三个数, 使之属于 Q 并且也属于 R^- ;
(2) 指出三个数, 使之属于 Q 但不属于 R^- ; (3) 指出三个数, 使之不属于 Q 但属于 R^- ; (4) 指出三个数, 使之不属于 Q 并且也不属于 R^- 。要求用符号 “ $\in$ ” 或 “ $\notin$ ” 一一表示出来。

解 (1) 例如: $-\frac{1}{3} \in Q$, $-5 \in Q$, $-1.4 \in Q$;
 $-\frac{1}{3} \in R^-$, $-5 \in R^-$, $-1.4 \in R^-$ 。

(2) 例如: $0 \in Q$, $\frac{1}{3} \in Q$, $105 \in Q$; $0 \notin R^-$, $\frac{1}{3} \notin R^-$,
 $105 \notin R^-$ 。

(3) 例如: $-\sqrt{2} \notin Q$, $-\sqrt{3} \notin Q$, $-\sqrt{5} \notin Q$;
 $-\sqrt{2} \in R^-$, $-\sqrt{3} \in R^-$, $-\sqrt{5} \in R^-$ 。

(4) 例如: $\sqrt{2} \notin Q$, $\sqrt{3} \notin Q$, $\pi \notin Q$; $\sqrt{2} \notin R^-$,
 $\sqrt{3} \notin R^-$, $\pi \notin R^-$ 。

四、简短小结

这节课是在上次课基础上, 进一步概括了集合概念的三个基本特征 (集合元素的确定性、互异性、无序性), 比较了集合两种表示方法的适用场合, 讲解了有关的术语、符号。这些内容还有待于在今后的学习中加深理解, 加以熟练。

五、布置作业

1. 阅读课文（认真阅读本节全文，注意结合听课情况进行概括、小结）。

2. 书面作业：

(1) 课本第4页练习第11—14题；

(2) P 表示平面内的点，属于下列集合的点分别组成什么图形：

① $\{P \mid PA = PB, A, B \text{ 是定点}\}$ ；② $\{P \mid PO \leq 3\text{cm}, O \text{ 是定点}\}$ 。

3. 复习参考题：

(1) 用列举法表示：用3去除一个自然数，可能得到的余数的集合；（答案： $\{0, 1, 2\}$ ）

(2) 用描述法表示：用3除余2的自然数的集合；（答案： $\{x \mid x = 3m + 2, m \text{ 是非负整数}\}$ ）

(3) 集合 $\{ax^2 + bx + c = 0 \mid a \neq 0 \text{ 并且 } b^2 - 4ac \geq 0\}$ 是由什么样的元素所组成，试用语言加以叙述；（答案：所有具有实数根的一元二次方程）

(4) 集合 $\{x \mid ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \text{ 并且 } x \in R\}$ 是由什么样的元素所组成，试用语言叙述。（答案：一元二次方程的所有实数根）

附注 以下两点，可视情况，适当说明

1. 有些无限集也可以用列举法表示，如：用 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 表示自然数集，用 $\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$ 表示整数集。但应注意：（1）要联系上、下文加以判断，且不致引起误解；（2）元素的列举应显示其特征，不要随便调换顺序，如用 $\{7, 2, 3, \dots\}$ 表示自然数集则令人费解。

2. 用列举法表示的集合, 即使元素的公共属性难以概括, 也并不是绝对不能用描述法表示的。如: 集合 $\{3, -1, 0\}$ 可用描述法表示为:

$$\{x | x=3 \text{ 或 } x=-1 \text{ 或 } x=0\},$$

但必要性不大。还应注意, 用列举法表示的集合, 用描述法表示时, 方法不一定是唯一的。

贵阳市教育局教研室 杨天明

子 集

教学目的: 使学生正确理解子集概念, 两个集合的包含关系、相等关系, 以及两个集合包含关系的简单性质; 能判定两个常用数集或学生熟悉的一些集合之间是否有包含关系, 并会用相应的数学符号表示。

教学过程:

一、复习提问, 引进新课

提问: 设 $B = \{a, b, c, d, e\}$

1. 请你随便指出集合 B 的三个元素, 并用数学符号表示它们与集合的关系。(答: 例如 $a \in B, b \in B, e \in B$)

2. 你所指出的三个元素, 能组成一个集合吗? 设这个集合为 A , 试用列举法表示这个集合。(答: $A = \{a, b, e\}$)

3. 集合 A 的元素是从哪里取出来的? 集合 A 的元素与 B 的元素有什么关系?

教师引导学生得出如下的结论: 集合 A 的每一个元素