保险精算学教程

范克新　编著

南京大学出版社

保险精算学教程

范克新　编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

保险精算学教程/范克新编著.一南京：南京大学出版社，2000.3

ISBN 7-305-03382-0

Ⅰ.保… Ⅱ.范… Ⅲ. Ⅳ.

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第 号

书　　名　保险精算学教程

著　　者　范克新

责任编辑　王金祥

装帧设计　朱　蓝

责任校对　蒋　雷

出版发行　南京大学出版社

(南京汉口路22号南京大学校内　邮编210093)

印刷　盐城市印刷二厂

经销　全国各地新华书店

开本　850×1168　1/32　印张　12.5　字数　325千

2000年3月第1版　2000年3月第1次印刷

印数　1—3000

定价　18.00元

ISBN 7-305-03382-0/F·515

前　言

现代保险业，尤其是保险公司，是无法离开保险精算这门学科的，这在保险界已是一个不争的事实。同时由于精算学理论与精算学技术的发展，其应用范围逐渐扩大，已成为一门以高等数学和统计学为基础，结合保险、金融与财务理论与实务的交叉学科。该学科在保险、投资、金融监管、社会保障、军事以及其他与风险管理等相关领域都越来越发挥出重要的作用。随着我国社会主义经济建设快速进行，保险市场的逐步开拓和完善，与之相适应的是我国的保险业除了急需数以千计的精算学专业人才以外，还需要一大批既熟悉保险精算原理与基本方法，又具有保险管理与营销知识的综合型保险业务人员。正因为如此，国内现已有一些大学设置大学本科生精算专业并已开始招收精算学研究生，同时陆续进入中国市场的外国保险公司开始纷纷出击，与国内财经院校合作，举办中国保险精算人员的培训班。

南京大学社会学系自 1994 年建立保险专业以来，已分别培养出两届保险专业的大专毕业生和三届本科毕业生，为提高学生的综合业务素质，在教学计划中开设了《保险精算》课程。通过几年教与学的实践，效果明显。本书是作者在参阅国内外大量保险精算学及其他书籍的基础上，结合几年来《保险精算》课程讲授的实践和同学们学习的特点编著而成。全书共十章，重点论述的内容为寿险精算基本原理、有关生存年金与人寿保险各险种的趸缴净保费的精算技术、均衡净保费与责任准备金、总保费、现金价值费用因素

与资产份额、多生命寿险精算及风险理论基础等。

在本、专科生大学一年级的教学中，尽管我们的学生学习了大学数学的微积分、线性代数及概率论与数理统计，但考虑到文科的特点，但是为适应教学，在写作过程中对精算学一些基本原理、基本概念、基本方法给予了详尽的阐述和介绍，有些需要证明的数学计算公式尽可能给出其来龙去脉，当然对过分复杂的数学推导和证明以“*”的形式给出，或者侧重从实际意义出发进行必要的分析讨论。全书文字表达力求实用、清楚，深入浅出，同时给出一些请读者习作的问题，其目的使读者做到既学了该书又要突破出该书的内容，向更精深的精算学方向发展。因此，本书不仅可作为经济、金融、财务、保险专业精算学课程的入门教材或参考书，还可以作为有关科研人员与实际保险工作者的参考书。

保险精算学在我国目前还处于起步发展阶段，要研习的问题较多，工作也不少，但由于本人水平有限，不妥及错误之处在所难免，恳请各位同仁及读者指正。

本书获南京大学教材出版资助。对于南京大学教材评议委员会和教务处各位领导的帮助与鼓励深表谢意。

编著者

1999年12月于南京大学

目　　录

第一章　人寿保险精算基础 …………………………………………（1）

1.1　生命表 ………………………………………………………（1）

1.1.1　生命表的概念 …………………………………………（1）

1.1.2　生命表的编制原理、框架 ………………………………（2）

1.1.3　生命表的种类与选用 ……………………………………（8）

1.1.4　生命表中死亡率的研究……………………………………（14）

1.1.5　死亡力度与分数年龄的死亡概率 …………………………（16）

1.2　利息理论与计算 ……………………………………………（28）

1.2.1　利息的基本概念 …………………………………………（28）

1.2.2　利息的一般测度 …………………………………………（28）

1.3　确定年金 ……………………………………………………（42）

1.3.1　确定年金的现值 …………………………………………（42）

1.3.2　确定年金的终值 …………………………………………（45）

1.3.3　延期确定年金的现值 ……………………………………（48）

1.3.4　永久年金与连续年金 ……………………………………（51）

1.3.5　变额年金…………………………………………………（55）

第二章　生存保险的现值计算……………………………………（63）

2.1　纯粹的生存保险 ……………………………………………（63）

2.2　基本生命年金 ………………………………………………（65）

2.2.1　期末付终身生命年金的现值 ……………………………（65）

2.2.2 期首付终身生命年金的现值 …………………………… (66)
2.2.3 期末付定期生命年金的现值 …………………………… (67)
2.2.4 期首付定期生命年金的现值 …………………………… (68)
2.2.5 期末付延期生命年金的现值 …………………………… (69)
2.3 非整数年龄开始付款的生命年金 …………………… (73)
2.4 年付款次数多于一次的生命年金 …………………… (74)
2.5 可变额生命年金 ………………………………………… (80)
2.6 利率、死亡率变化对生命年金现值的影响 ………… (90)

第三章 人寿保险 ……………………………………………… (93)

3.1 基本人寿保险的现值精算方法 …………………… (93)
3.1.1 定期死亡保险的现值 ………………………………… (94)
3.1.2 终身寿险的现值 ……………………………………… (96)
3.1.3 两全保险的现值 ……………………………………… (98)
3.2 可变额人寿保险的现值精算方法 ………………… (99)
3.2.1 递增型人寿保险的趸缴净保费 ……………………… (99)
3.2.2 递减型人寿保险的趸缴净保费 ……………………… (102)
3.3 死亡瞬时给付保险金的寿险模型及精算 ………… (104)
3.3.1 死亡瞬时给付的寿险模型 …………………………… (104)
3.3.2 死亡瞬时给付的寿险现值精算 ……………………… (107)
3.4 递推公式及人寿保险与生命年金的关系 ………… (113)
3.4.1 递推公式 ……………………………………………… (113)
3.4.2 人寿保险与生命年金的关系 ………………………… (116)

第四章 人寿保险的净保费 ………………………………… (121)

4.1 均衡净保费 ……………………………………………… (122)
4.1.1 定期人寿保险与终身寿险的年缴净保费 ………… (122)
4.1.2 生存保险的年缴净保费 ……………………………… (125)
4.1.3 两全保险的年缴净保费 ……………………………… (126)
4.1.4 延期生存年金的年缴净保费 ………………………… (127)

4.1.5 年缴均衡净保费与生存年金的关系 …………………… (129)
4.1.6 应用举例 ………………………………………………… (132)
4.2 一年缴付 m 次的净保费 ……………………………… (134)
4.3 收支平衡的一般模型及应用 …………………………… (137)

第五章 净保费责任准备金 ……………………………………… (140)

5.1 寿险责任准备金的概念 ………………………………… (140)
5.2 责任准备金的计算 ……………………………………… (142)
5.2.1 将来法 ……………………………………………… (143)
5.2.2 过去法 ……………………………………………… (145)
*5.3 全连续的净保费责任准备金 ………………………… (150)
5.4 期末责任准备金的递归方法及其分析 ………………… (154)
5.5 非整数时点的净保费责任准备金及应用 ……………… (159)
*5.6 连续模型 ……………………………………………… (163)

第六章 人寿保险总保险费的计算 ……………………………… (166)

6.1 附加保险费与总保险费的计算 ………………………… (166)
6.2 保险人技术收益及来源分析 …………………………… (175)
6.3 修正责任准备金的计算 ………………………………… (179)
6.3.1 Eillmer 修正法 ……………………………………… (180)
6.3.2 FPT 修正法 ………………………………………… (185)
6.3.3 CVM 修正法 ………………………………………… (187)
6.3.4 加拿大责任准备金修正法 …………………………… (190)

第七章 退保金 …………………………………………………… (193)

7.1 现金价值的计算 ………………………………………… (193)
7.2 领取退保金方式选择权 ………………………………… (199)
7.2.1 缴清保险 …………………………………………… (199)
7.2.2 展期保险 …………………………………………… (201)
7.2.3 保险单质押贷款和自动垫缴保险费贷款 ………… (203)

7.3 试验性总保费的评价与调整 …………………… (204)
7.3.1 资产份额的计算及评价………………………… (205)
*7.3.2 经验调整资产份额 ………………………… (212)

第八章 多个生命保险精算 ………………………… (215)

8.1 联合生命状态 ………………………………… (215)
8.2 某些死亡规律下的精算简化 ………………… (220)
8.2.1 龚珀茨(Gompertz)死亡律下的简化 ……………… (220)
8.2.2 马克哈姆(Makeham)死亡律下的简化 ……………… (222)
8.3 最后生存者状态 …………………………… (223)
8.4 一般状态 ………………………………………… (228)
8.5 复合状态与精算 …………………………… (235)
8.6 简单有序状态的生命寿险精算 ……………… (238)
8.6.1 简单条件概率 ………………………………… (239)
*8.6.2 两人以上联合状态投保的条件概率举例 ………… (241)
8.6.3 条件概率的简化计算 ……………………… (246)
8.6.4 简单有序状态的保险精算……………………… (249)
8.7 复合条件下多个生命寿险精算 ……………… (253)
*8.8 孤寡保险与继承性年金介绍 ……………… (261)

第九章 多重衰减模型与精算 ……………………… (265)

9.1 多重衰减模型 ………………………………… (265)
9.2 衰减力度与概率分布的计算 ………………… (267)
9.3 多衰减原因概率表 ………………………… (271)
9.3.1 多衰减原因基本概率函数与概率表 ……………… (271)
9.3.2 联合单衰减因表 ……………………………… (273)
9.3.3 由联合单减因表构造多减因表 ……………… (276)
9.4 多衰减因下的精算现值 ……………………… (279)

第十章 风险理论基础 ……………………………… (283)

10.1 风险理论基础 ……………………………… (283)

10.1.1 累计频数分布 …… (284)
10.1.2 概率与概率分布 …… (286)
10.1.3 风险期望值 …… (300)
10.1.4 方差、标准差 …… (303)
10.1.5 变异系数 …… (307)
10.2 效用理论 …… (309)
10.2.1 货币的效用值 …… (309)
10.2.2 效用理论 …… (311)
10.2.3 保险与效用 …… (313)
*10.3 保险人财务风险选择 …… (321)
10.3.1 危险性程度比较 …… (322)
10.3.2 保险人无力履行赔付责任的概率 …… (323)
10.3.3 保险人可支配的责任准备金标准 …… (324)
10.3.4 数学知识附注 …… (329)
参考文献 …… (335)

附　　录 …… (337)
附表一 1958C·S·O 生命表(男性) …… (337)
附表二 1958C·S·O 生命表(男性) $i=3\%$ …… (339)
附表三 中国人寿保险业经验生命表(1990～1993) …… (342)
附表四 1971 个体年金生命表(男性) $i=6\%$ …… (346)
附表五 1971 个体年金生命表(女性) $i=6\%$ …… (349)
附表六 非养老金业务男女表(1990～1993) …… (352)
附表七 非养老金业务女表(1990～1993) …… (355)
附表八 养老金业务男表(1990～1993) …… (358)
附表九 养老金业务女表(1990～1993) …… (361)
附表十 复利终值表$[(1+i)^n]$ …… (364)
附表十一 年金现值表$\left(\frac{1-v^n}{i}\right)$ …… (366)
附表十二 年金终值表$\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ …… (368)

附表十三　复利现值表 $\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$ …………………… (370)
附表十四　生命表解示——基本函数 …………………… (372)
附表十五　生命表解示——转换函数 $\left(\begin{matrix}D_x, N_x, S_x \\ i=0.06\end{matrix}\right)$ … (375)
附表十六　生命表解示——转换函数 $\left(\begin{matrix}C_x, M_x, R_x \\ i=0.06\end{matrix}\right)$ … (378)
附表十七　生命表解示——趸缴净保费 $\left(\begin{matrix}\ddot{a}_x, 1\,000Ax \\ i=0.06\end{matrix}\right)$ …………………………………………………… (381)
附表十八　服务表解示 …………………………………… (383)
附表十九　标准正态分布表 ……………………………… (385)

第一章　人寿保险精算基础

人寿保险的保险标的是以人的生存和死亡为保险事故的保险，被保险人在保险期内死亡或生存到一定年龄，保险人依照契约规定给付保险金。在人寿保险上由于保险费的交付在前而保险金的给付在后以及其他的原因，这就要求对投保人的保险费的计算必须考虑到生存率、死亡率及利息的息率等因素。再者，投保人的保险费的交付往往并不是一次全部缴清，而是依时间不同分批交付，故此还必须考虑年金因素，凡此这些构成了人寿保险精算的重要基础。

1.1　生命表

1.1.1　生命表的概念

生命表（又称死亡表），它是以统计表的形式，研究在一定时期的特定区域或特定人口群体同时出生的一批人随着年龄增长渐渐死亡，直至这批人全部死亡的整个过程。生命表是人寿保险用以测定死亡或生存概率的基础。根据以往死亡人数的统计资料，推测出未来死亡或生存概率，是计算人寿保险费率的必要依据，它贯穿于整个人寿保险精算的全过程。

1.1.2 生命表的编制原理、框架

对于每个人的死亡时间在正常情况下是未知的（或者说是随机的），尽管对任意选取的一批人来讲，可以大体上了解到一些人可能在一定时间内死亡，但却无法知道哪个人将死亡。这种由生命死亡时间的不确定性所引起的损失，正是我们建立人寿保险的原因之一。一个大群体中死亡的相对数量可预测得比较精确，以保证人寿保险公司为那些对健康状况有某种要求的人提供保险保障。另外在正常情况下，人们的生命风险相对来讲又较为稳定。因此，可以通过过去经验的仔细观察，较准确的估计某一年中一个特定群体中有多少人将死去，从而推算出死亡率，构成生命表。

在编制生命表时，首先选择初始年龄且假定在该年龄生存的一个合适的封闭人口数（封闭人口是指没有人口迁移的人口，在封闭人口中只有人口的出生和死亡变动），这个数称为确定基数。例如，我们选择 0 岁为初始年龄，并规定了此整数年龄的人数，通常取 10 万人，然后根据各年龄的死亡率，计算出各年龄的死亡人数和生存人数。显然，在这 10 万人的群体中，随着时间的不断向后推移，各年的存活人数不断递减，总的死亡人数不断递增。记 w 表示该群体的生命存在的极限年龄，即：在 w 年时，该群体的存活人数为零。把上述的过程按年龄的变化列成表格即为生命表。

在生命表中的主要框架中有如下项目的定义：

1. x：表示年龄，在生命表中的变化范围从 0 岁到终极年龄 $w-1$（x 取值整数）。

2. l_x：表示存活到确切整数年龄 x 岁的人数，这里 $x=0,1,2,\cdots,w-1$。

例如，l_0 表示同时出生的一批人数（即 0 岁）。由于我们关心的是研究同时出生的一批人数的死亡规律，所以对确定基数取多少人数并不重要，它可以任意取定。但为了方便起见，我们取 $l_0=$

100 000，也可以取 $l_0 = 1\,000\,000, \cdots$。$l_0$ 经过一年活到 1 岁的人数就是 l_1，l_1 经过一年活到 2 岁的人数就是 $l_2, \cdots, l_{30}$ 表示 l_{29} 经过一年活到 30 岁的人数。由此可以看出两点：

(1) $l_0 > l_1 > l_2 > \cdots$　　　(2) $l_w = 0$

3. $\boldsymbol{d_x}$：表示 x 岁的存活人在 x 这一整年内的死亡人数。

由统计规律告诉我们，只要确定基数较大，每一年都会因各种不同的原因而死去一些人。l_0 的人数经过一年到达 l_1，必死去一部分，记这死去的人数为 $l_0 - l_1 = d_0$。由此式也告诉我们 $l_0 = l_1 + d_0$（即 l_1 的存活人数加上在 l_0 的死亡人数 d_0 就等于出生人数 l_0）。类似的有：

$$l_1 - l_2 = d_1$$

$$l_2 - l_3 = d_2$$

一般有

$$l_x - l_{x+1} = d_x \tag{1-1}$$

由此可以得到，确定基数人数等于每年的死亡人数的累加。

即：$$l_0 = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{w-1} = \sum_{x=0}^{w-1} d_x \tag{1-2}$$

由(1-1)式得：

$$\begin{aligned} l_x &= d_x + l_{x+1} \\ &= d_x + d_{x+1} + l_{x+2} \\ &= \cdots \\ &= \sum_{t=0}^{w-x-1} d_{x+t} \end{aligned} \tag{1-3}$$

4. $\boldsymbol{q_x}$：死亡率，表示 x 岁的人在一年内死亡的概率。显然有 $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}, x = 0, 1, \cdots, w-1$。

依据此得到如下公式：

$$q_{w-1} = \frac{d_{w-1}}{l_{w-1}} = \frac{l_{w-1} - l_w}{l_{w-1}} = 1$$

5. $\boldsymbol{p_x}$：生存率，表示 x 岁的人在一年内仍存活的概率，即到 $x+1$岁时仍存活的概率。因为l_{x+1}表示 $x+1$ 岁时的生存人数，故：

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{1-4}$$

综上所述，可以看出，生存率与死亡率存在如下关系：

$$p_x + q_x = 1$$

利用生存率与死亡率的定义，类似的可以计算其他情况的生存概率指标。

6. $\boldsymbol{{}_nd_x}$：表示在 x 岁到 $x+n$ 岁之间死亡的人数，用公式表示即为：

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n} \tag{1-5}$$

7. $\boldsymbol{{}_nq_x}$：表示 x 岁的存活人数在 x 岁到 $x+n$ 岁之间的死亡概率，用公式表示即为：

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_nd_x}{l_x} \tag{1-6}$$

特别当 $n=1$ 时，记${}_1q_x = q_x$。

8. $\boldsymbol{{}_np_x}$：表示 x 岁的存活人数再存活 n 年的概率，用公式表示即为：

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{1-7}$$

由(1-6)式和(1-7)式有：

$${}_np_x + {}_nq_x = 1 \tag{1-8}$$

9. $\boldsymbol{{}_{n|}q_x}$：表示 x 岁的存活人数，在活到 $x+n$ 岁后，在 $x+n+1$ 岁的死亡概率。用公式表示即为：

$${}_{n|}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}$$

上式也可表示为下面几个等价的表示形式：

$$
{}_{n|}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} = \frac{d_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}}
$$

$$
= {}_np_x \cdot q_{x+n} \tag{1-9}
$$

而当 $n=0$ 时，我们规定：${}_{0|}q_x = q_x$。

把${}_{n|}q_x$ 作进一步推广有：

10. ${}_{n|m}q_x$：表示 x 岁的存活人数，在活到 $x+n$ 岁后在$x+n+m$ 岁内死亡的概率。用公式表示，有 ${}_{n|m}q_x = \dfrac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$

上式还可表示为下面几个等价的表示形式，

$$
{}_{n|m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}
$$

$$
= {}_np_x - {}_{n+m}p_x \qquad \text{(由(1-7)式)}
$$

$$
= {}_np_x - \frac{l_{x+n+m} \cdot l_{x+n}}{l_x \cdot l_{x+n}} \qquad \text{(由(1-7)式)}
$$

$$
= {}_np_x - {}_np_x \cdot {}_mp_{x+n} \qquad \text{(由(1-7)式)}
$$

$$
= {}_np_x(1 - {}_mp_{x+n}) \qquad \text{(由(1-8)式)}
$$

$$
= {}_np_x\,{}_mq_{x+n} \tag{1-10}
$$

当 $m = 1$ 时，记${}_{n|1}q_x = {}_{n|}q_x$。

11. $\overset{0}{e}_x$，完全平均余寿或生命期望值，即表示 x 岁的存活人数在以后可望生存的平均年数。在此定义下，$\overset{0}{e}_0$ 就表示确定基数的一个群体的平均寿命。如何计算 $\overset{0}{e}_x$，进而如何计算一个群体的平均寿命 $\overset{0}{e}_0$。下面的定理给出了这一计算公式。

定理 1.1 假设死亡人数在每个年龄区间上均匀分布，则平均余寿为：

$$
\overset{0}{e}_x = \frac{1}{l_x}(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{w-1}) + \frac{1}{2}
$$

$$
= \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{w-1}\left(t + \frac{1}{2}\right)d_{x+t} \tag{1-11}
$$

平均寿命为：

$$\overset{0}{e}_0 = \frac{1}{l_0}\left(\sum_{t=1}^{w-1} l_t\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{l_0}\sum_{t=0}^{w-1}\left(t + \frac{1}{2}\right)d_t \qquad (1-12)$$

证明 记 L_x 表示 x 岁的人在一年内生存的总人年数(如一个人存活了一年则称为一个人年数)。由于假设死亡人数在每个年龄区间上均匀分布,所以 x 岁存活人数的总人年数就可表示为 x 岁的人数 l_x 和 $x+1$ 岁的人数 l_{x+1} 的平均数,即

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \\ &= \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+1} - l_{x+1}}{2} \\ &= l_{x+1} + \frac{1}{2}d_x \qquad (1-13) \\ &(x=0,1,2,\cdots,w-1) \end{aligned}$$

再记 T_x 表示 x 岁的存活人数在未来生存的总人年数。

则:
$$\begin{aligned} T_x &= L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{w-1} \\ &= \sum_{t=0}^{w-x-1} L_{x+t} \qquad (1-14) \end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned} \overset{0}{e}_x &= \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{w-x-1} L_{x+t} \\ &= \frac{1}{l_x}\left(\sum_{t=0}^{w-x-1}\left(l_{x+t+1} + \frac{1}{2}d_{x+t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{l_x}\left(\sum_{t=0}^{w-x-1} l_{x+t+1} + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{w-x-1} d_{x+t}\right) \\ &= \frac{1}{l_x}(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{w-1}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

除此之外,$\overset{0}{e}_x$ 还可以表示为:

$$\begin{aligned} \overset{0}{e}_x &= \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{w-x-1} L_{x+t} \\ &= \frac{1}{l_x}\left(\sum_{t=0}^{w-x-1} \frac{l_{x+t} + l_{x+t+1}}{2}\right) \end{aligned}$$