

431038

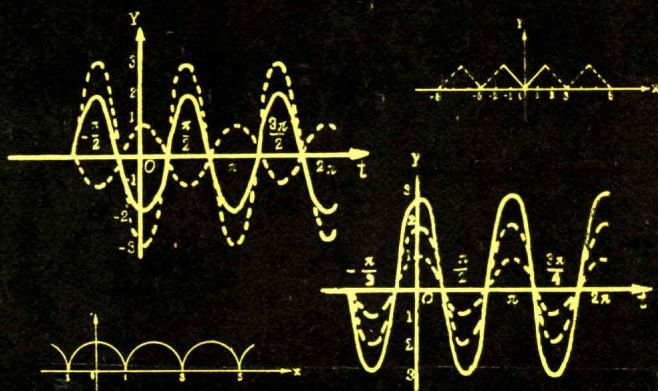
51.2

M44

初等数学疑难问题讲解

三角函数 和差积商的周期

马明 宣立新



内蒙古人民出版社

初等数学疑难问题讲解

三和(差) 积(商)的周期

马 明 宣立新

内蒙古人民出版社

1984·呼和浩特

初等数学疑难问题讲解
三角函数式和(差)积(商)的周期
马 明 宣立新

*

内蒙古人民出版社出版
(呼和浩特市新城西街82号)

内蒙古新华书店发行 通辽教育印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 4.5 字数: 91千

1984年7月第一版 1984年8月第1次印刷

印数: 1—22,000册

统一书号: 7089·354 每册: 0.45元

出版说明

《初等数学疑难问题讲解》丛书，是为自学数学的广大社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的。它是就疑难问题较多的篇章中撰写为《曲线的切线和切线方程》、《空间直线·平面·多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和(差)积(商)的周期》、《排列组合及其应用》、《解题思路与解题技巧》、《容易错的概念，容易错的方法》等书组成。

这套丛书各册的共同特点是：对有关基础知识和基本训练方面的疑难问题讲解的比较细致通俗，易读易懂；对所用例题都有分析，通过分析疏通了思路、抓住了解题的关键，对综合题采用了不同知识的多种解法，同时，适当地注意了知识的准确性和语言的趣味性。

因此，这套丛书，可供为广大社会青年自学数学的辅导用书，也可作为在校中学生的课外辅助读物，对于中学数学教师也是较好的教学参考资料。

内蒙古人民出版社

一九八三年十二月二十一日

前 言

自然界中一些物质的运动是周而复始的。地球每年绕太阳运行一周，地球每天自转一周，交流电（电流、电压）的变化，声波的振动，乃至人们的心脏的跳动，都是周期运动。为了刻画这许许多多的周期运动，数学上当然要研究一种函数，叫做周期函数。同时，为了研究周期运动的周期，当然也要研究周期函数的周期。这本小册子，就是从大家熟悉的三角函数开始，结合周期运动这个物理概念，结合教材课本中关于周期函数的定义，这里不仅从正面去理解它，还得从反面去理解它（举出一些非周期函数的实例），对于周期函数的最小正周期，也做同样的处理。

关于三角函数的和（差）积（商）的周期，以及相应的最小正周期的求法，是一个比较复杂，当前尚在继续研讨中的问题。这里虽然给出了一般结论，但由于时间仓促，再加上水平的限制，难免有繁琐和不妥之处，敬请数学工作者和读者批评指正。

此外，有两点需要说明：

第一、到目前为止，周期函数的定义有两种，为了配合现行的教材课本，这本小册子采用了与之相一致的定义（尽管我们不一定完全赞同这种定义方法）。

第二、初学者在阅读这本小册子时，不能不会遇到一些困难，但这种困难是理解性的困难，不是知识总量不足的困

难，只要用心反复阅读，反复思索，当克服这种理解性的困难之后，在阅读能力上就会有一个明显的进步。

著 者

于南京师院附中

一九八三年九月

目 录

§ 1 三角函数的图象和周期性	(1)
§ 2 周期函数与周期运动	(3)
§ 3 周期函数的定义	(7)
§ 4 周期函数与非周期函数举例	(10)
§ 5 周期函数的最小正周期	(17)
§ 6 函数的定义域与函数的周期性	(24)
§ 7 简谐振动的合成	(30)
§ 8 两个三角函数的和(差)的周期性	(37)
§ 9 两个三角函数的积的周期性	(42)
§ 10 两个三角函数的商的周期性	(71)
§ 11 两个三角函数的和(差)为周期函数时最小正周期 的求法	(86)
§ 12 两个三角函数的积为周期函数时最小正周期的求 法	(99)
§ 13 两个三角函数的商为周期函数时最小正周期的求 法	(107)
§ 14 函数 $\sum_{k=1}^n (a_k \cos m_k x + b_k \sin m_k x)$ 的最小正周期	(116)
附 录	(128)

§ 1 三角函数的图象和周期性

用设值描点法，我们可以很快地把三角函数的图象画出来。

根据“三角函数表”，先将一些特殊角的三角函数值列表如下：

x	$y = \sin x$	$M = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	.50	.87	.58
$\frac{\pi}{4}$	.71	.71	1
$\frac{\pi}{3}$	.87	.50	1.73
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
$\frac{2\pi}{3}$	.87	-.50	-1.73
$\frac{3\pi}{4}$	.71	-.71	-1
$\frac{5\pi}{6}$	.50	-.87	-.58
π	0	-1	0
$\frac{7\pi}{6}$	-.50	-.87	
$\frac{5\pi}{4}$	-.71	-.71	
$\frac{4\pi}{3}$	-.87	-.50	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	
$\frac{5\pi}{3}$	-.87	.50	
$\frac{7\pi}{4}$	-.71	.71	
$\frac{11\pi}{6}$	-.50	.87	

用这张表就可以在直角坐标系上分别画出正弦函数、余弦函数和正切函数的图象。(图1与图2)

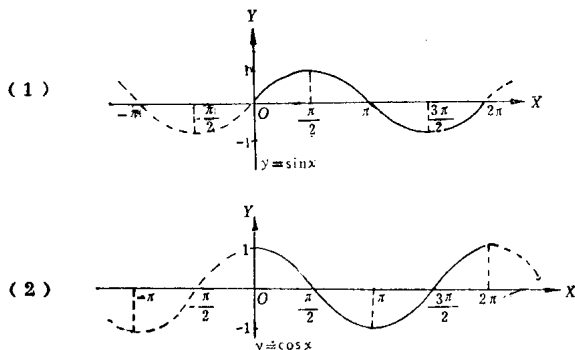


图1

图中实线是根据上面这张三角函数表绘制的，由于

$$\sin(2\pi + x) = \sin x,$$

$$\cos(2\pi + x) = \cos x,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x.$$

所以我们可以预料余下部分应由虚线来完成。就是说，正弦函数值、余弦函数值和正切函数值都是依照一定的规律不断重复出现的(周而复始)，这正是三角函数的一个极其重要的性质，

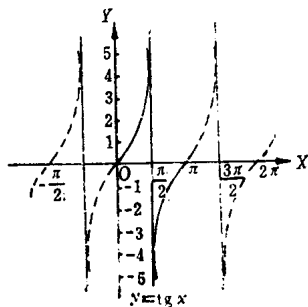


图2

叫做周期性。因而，三角函数也叫做周期函数。这里值得注意的是，正弦函数和余弦函数，当 x 的值每增加(或减少) 2π 时，函数值便周而复始，而正切函数，当 x 的值每增加(或减少) π 时，函数值便周而复始。

§ 2 周期函数与周期运动

在上一节，我们已经接触到周期函数这个数学概念。为了进一步理解它，我们还得从周期运动这个物理概念开始。

凡是物质在等时间内作往复的运动，就称为周期运动，也叫做**振动**。例如，钟摆的运动，声波的运动，交流电中电流、电压的变化等都属于这种运动。

先让我们做一个实验，用它把周期运动和周期函数这两个概念联系起来。

细线的一端栓上一个小球，使小球做等速圆周运动（图 3），于是时间(t)与小球的位置之间就构成函数关系——对于一定的时间(t 的一个定值)，小球就有一个特定位置与之对应。为了寻找这个函数关系，我们把小球运动的平面图画出来，并装上平面直角坐标（图 4）。如果小球的初始

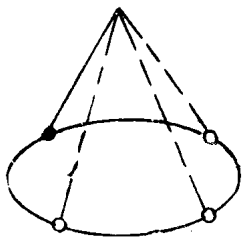


图 3

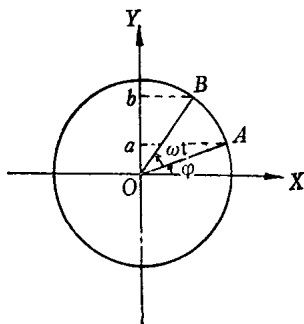


图 4

($t=0$) 位置在点 A 处, 而且小球的角速为 ω (常数), 经过时间 t 以后, 小球的位置在 B 处. 于是 $\angle AOB = \omega t$. 因此, B 点的坐标, 即小球的位置可以用

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t + \varphi), \\ y = R\sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (1)$$

来表示.

(1) 式是由两个函数关系 $x = g(t)$ 与 $y = h(t)$ 组成的, 我们就把(1)式叫做**函数组**. 而且这个函数组的周期可以用数学方法计算出为 $\frac{2\pi}{\omega}$, 因为

$$R\cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = R\cos(\omega t + \varphi),$$

$$R\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = R\sin(\omega t + \varphi).$$

如果从物理运动的意义来分析, 我们也会发现小球运动的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$, 因为当小球完成一圈 (即 2π 弧度) 的运动时, 就周而复始. 设小球完成一圈所需要的时间为 T (即周期), 那么就有 $\omega T = 2\pi$, 于是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

在计算小球运动的周期 T 时, 我们分别用了数学方法和物理方法, 其结果一致, 你不会感到奇怪吧! 而且, 你还应该看到, 周期函数这个数学概念, 只不过是小球运动 (周期运动) 这个物理模型的抽象而已.

下面, 让我们沿着 “小球运动” 再做进一步的抽象. 仍然从实验开始.

如果把图3的实验在灯前进行(灯在小球运动的平面上),并添置一个铅垂的纸屏(图5),那么小球的圆周运动投影在纸屏上就成为一条线段(MN)上的往返振动,它的路程(MN)长度就是圆的直径($MN=2R$),而且完成一个振

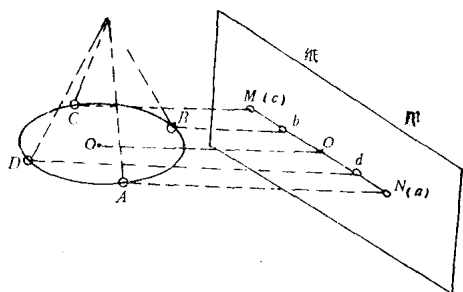


图 5

动(如 $O \rightarrow M \rightarrow O \rightarrow N \rightarrow O$)所需要的时间仍旧是一个常数 $\frac{2\pi}{\omega} (=T)$ 。

这里有两个运动,一个是小球的圆周运动,另一个是小球在纸屏上的投影(影子)的直线段上的往返运动。由于这两个运动之间存在一种对应关系(小球位置与其投影位置之间的关系),所以,在研究小球的圆周运动时,有时只要研究它在两坐标轴的投影运动就可以了。

为此,我们再用数学方法找出时间 t 与距离 y (即小球投影与线段 MN 的中点的距离)的函数关系表达式。方法还是画出平面图形,装上直角坐标,并把纸屏上的线段 MN 平移至 y 轴上(图6)。因为

$$\angle AOB = \omega t,$$

$$\therefore y = \overline{ob} = R \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

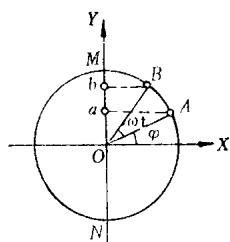


图 6

这就是小球在 Y 轴上的投影的运动方程。它的运动周期仍然是 $\frac{2\pi}{\omega}$ (不管是数学方法或是物理方法, 周期都是 $\frac{2\pi}{\omega}$)。现在, 我们就可以用研究(2)式

来代替研究(1)式。而且, 在数学上我们就把由(2)式所规定的振动(或周期运动)叫做简谐振动。

最后, 我们强调一下: 这里有两个看来完全不同运动(小球的圆周运动与它的投影的直线段上往返振动), 但用数学的眼光来看, 它们的实质是一样的。因此, 有人把小球的运动轨迹(圆)做为简谐振动的“参考圆”, 这是很有道理的。

§ 3 周期函数的定义

教科书已经给出周期函数的定义：对于函数 $y=f(x)$ ，如果存在一个常数 $T \neq 0$ ，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有

$$f(x+T)=f(x).$$

成立，那么函数 $y=f(x)$ 叫做周期函数，常数 $T \neq 0$ 叫做这个函数的周期。周期函数的周期不止一个。如果在所有周期中存在一个最小正数，这个最小正数叫做最小正周期。

正弦函数 $y=\sin x$ ， $x \in \mathbb{R}$ 和余弦函数 $y=\cos x$ ， $x \in \mathbb{R}$ 都是周期函数， $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$) 是它们的周期，最小正周期是 2π 。

以上是我们在课本中熟知的内容，为了加深对它们理解，让我们提出几个问题讨论一下。

1. 30° 的正弦值等于 $\frac{1}{2}$ ，即 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，而当 30° 增加 120° (变为 150°) 时，正弦值仍为 $\frac{1}{2}$ ，即 $\sin(30^\circ + 120^\circ) = \frac{1}{2}$ ，

能否说这个常数 120° 也是正弦函数的周期呢？

请你自己回答一下，然后看下面的解释。

“ 120° ” 没有“资格”叫做正弦函数的周期。因为我们在定义中已经约定“……使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立”，就是说，如果 120° 是 $\sin x$ 的周

期, 应该“永远”有 $\sin(x+120^\circ)=\sin x$.

成立. 固然, $x=30^\circ$ 时上式是成立的, 但是 x 取定义域内其它的值时, 上式不一定成立, 例如, $x=60^\circ$ 时, 上式就不成立, 因为 $\sin(60^\circ+120^\circ)\neq\sin 60^\circ$. 因此, 120° 并不是 $\sin x$ 的周期.

2. 常数0能否叫做 $\sin x$ 的周期?

当 $T=0$ 时, 固然永远有等式

$$\sin(x+T)=\sin x$$

成立, 但“定义”中已经明白地说, $T\neq 0$, 即周期只能是一个不为零的常数. 所以常数0不是 $\sin x$ 的周期.

3. “定义”中还说, “周期函数的周期不止一个”, 这是为什么?

2π 是 $\sin x$ 的一个周期, 这是因为当 x 在定义域 R 内取任意数时, 有等式

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \text{ 成立.}$$

上面这个等式说明, $x\in R$ 时, $x+2\pi$ 也属定义域 R , 因此, 当自变量取值 $x+2\pi$ 时, 上面等式变为 $\sin(x+4\pi)=\sin(x+2\pi)$, 于是有 $\sin(x+4\pi)=\sin x$. 所以 4π 也是 $\sin x$ 的一个周期.

同理 $3\cdot 2\pi, 4\cdot 2\pi, \dots, n\cdot 2\pi (n\in N)$ 都是 $\sin x$ 的周期, 所以 $\sin x$ 的周期不止一个.

一般地说, 设常数 $T(T\neq 0)$ 是周期函数 $f(x)$ 的一个周期, 那么 $nT(n\in N)$ 都是 $f(x)$ 的周期.

4. 如果正数 $T(T>0)$ 是 $f(x)$ 的一个周期, 能否说 $-T(-T<0)$ 也是 $f(x)$ 的一个周期?

不能这么说. 例如, 2π 是 $f(x)=\sin 10^1 x$ 的一个周期,

或者说， 2π 是 $f(x) = \sin x (x > 0)$ 的一个周期，但不能说 -2π 也是 $f(x)$ 的一个周期，这是因为，当 $x > 0$ 时，不能保证 $x - 2\pi > 0$ 。

谈到这里，我们要向大家介绍一下周期函数的另一种定义（常见于某些书籍和文章）：设 $f(x)$ 是定义在某一实数集 M 上的函数，若存在一常数 $T (\neq 0)$ ，具有性质：（1）对于任何 $x \in M$ ，有 $x \pm T \in M$ ；（2）对于任何 $x \in M$ ，有 $f(x + T) = f(x)$ ，那么称 $f(x)$ 为集 M 上的周期函数。

这一定义不仅要求对于任何 $x \in M$ ，有 $f(x + T) = f(x)$ ，且有 $f(x - T) = f(x)$ ，而前一定义只要求有 $f(x + T) = f(x)$ 即可。

§ 4 周期函数与非周期函数举例

六个基本三角函数都是周期函数，然而，符合前面讲的周期函数定义的远远不止这六个函数。

例如， $y = \sin 2x$ ， $y = \sin x + \cos x$ ，……都是周期函数；此外，我们还可以“人为”地再定义一些周期函数：

例1 设 $y = f(x)$ 是定义在实数集上的周期函数， $T = 3$ ，且

$$f(x) = \begin{cases} -x & \left(-\frac{3}{2} \leq x \leq 0\right), \\ x & \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

试绘制它的图象并求下列各值 $f(7)$ ， $f(-7.3)$ ， $f(9.7)$ ， $f(-8.7)$ 。

解

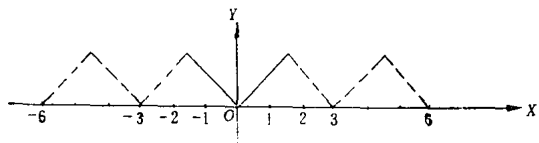


图7

$$f(7) = f(1 + 2 \times 3) = f(1) = 1;$$

$$f(-7.3) = f(-1.3 - 2 \times 3) = f(-1.3) = 1.3;$$

$$f(9.7) = f(0.7 + 3 \times 3) = f(0.7) = 0.7;$$

$$f(-8.7) = f(0.3 - 3 \times 3) = f(0.3) = 0.3.$$

例2 设 $f(x)$ 是定义实数集上周期等于 $2k(k \geq 2)$ 的周期函数，且