ZhXShX

中学数学丛书

熊大寅　刘佛清

极坐标与参数方程

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZhXShX

中学数学丛书

极坐标与参数方程

熊大寅　刘佛清

湖 北 教 育 出 版 社

极坐标与参数方程

熊大寅　刘佛清

*

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
荆州新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　5.5印张　1插页　125,000字
1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷
印数：1—17,000

统一书号：7306·136　　定价：0.76元

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社已组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学

概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系．同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示．丛书对教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　　录

第一章　平面极坐标

§1. 平面极坐标系

(一) 平面极坐标系的意义

假定炮弹从地面上的 O 地发射到 P 地，如果以 O 地作为坐标原点，且以由西至东的方向和由南至北的方向作为两条坐标轴建立直角坐标系，那末炮弹的落地点 P 的位置可以用一对实数（即横坐标和纵坐标）来确定．但在实际测量上，炮弹的落地点 P，用 O、P 两点的距离（即炮弹的射程）和射线 OP 的方向角来确定较为方便．因此，直角坐标系并不是确定平面上点的位置的唯一方法，还可以用距离和角度来确定平面上点的位置．下面我们介绍这种用角度和距离确定平面上点的位置的坐标系——平面极坐标系．

在平面内取一个定点 O，引一条射线 Ox，再选定一个长度单位和角度的正方向，这样就可以建立一个极坐标系（图 1—1），O 点叫做极点，射线 Ox 叫做极轴．

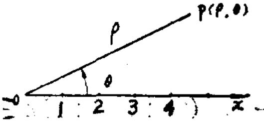


图 1-1

在平面内任意取一点 P，用 ρ（读 Rho 音）表示线段 OP 的长度，θ 表示从 Ox 到 OP 的角度，ρ 叫做点 P 的极径，θ 叫做点 P 的极角，那么有序数对 $(\rho,\ \theta)$ 就叫做点 P 的极坐标．极坐

标为 ρ、θ 的点 P，可表示为 $P(\rho,\ \theta)$.

用极坐标系来确定点的位置的方法，称为**极坐标法**.

为了今后处理问题方便起见，对极角 θ 和极径 ρ 分别作如下规定：

当极角 θ 是极轴 Ox 依逆时针（或顺时针）方向绕极点 O 旋转使与极径 OP 重合的角称为正角(或负角). 极角 θ 还可以看作是极轴 Ox 绕 O 点若干周之后与极径 OP 重合，因此，θ 可以为任意正值或负值(θ 的单位可用弧度制，也可用 60 分制)，即图 1—1 中的 P 点的坐标可以看作是 $(\rho,\ \theta)$，或 $(\rho, \theta+2n\pi)$，其中 n 为任意整数.

极径 ρ 既可以取正值也可以取负值. 当 ρ 为负值时我们作如下规定：在图 1—2 中，设 Oc 是极角为 θ 的终边，规定在 Oc 上度量的数值为正，而在 Oc 的相反方向，即 Oc 的反向延长线上度量的数值为负. 也就是说，如果在 Oc 正方向的 P 点坐标为 $(\rho,\ \theta)$，那么在 Oc 的反向延长线上的 P' 点，当 $|OP|=|OP'|$ 时，P' 点的坐标就是 $(-\rho,\ \theta)$. 于是图 1—2 中的 P 点坐标又可以写成 $(-\rho,\ \theta+\pi)$，

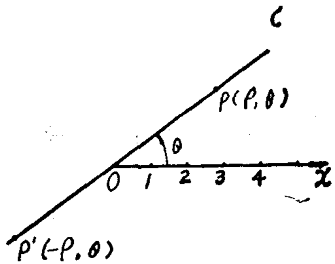


图 1-2

或 $(-\rho,\ (2n+1)\pi+\theta)\ n\in z$ (z 是全体整数的集合).

θ 和 ρ 照上面这样规定之后，在极坐标系中，一个点的极坐标有无穷的实数时，也就是说，极坐标中的点与坐标不是一一对应的.

性质 1 若 $(\rho,\ \theta)$ 是点 P 的一个极坐标，则 P 点的一般坐

标是

$$[(-1)^n\rho,\ \theta+n\pi],\ (\rho\neq 0)$$

其中 n 为任意整数.

但若规定 ρ 取正值，同时又规定 θ 在 O 与 2π 之间（也可以规定在 $-\pi$ 与 π 之间），即 $0\leqslant\theta<2\pi$（或 $-\pi<\theta\leqslant\pi$），那么除极点外，平面内的点与实数对 $(\rho,\ \theta)$ 则是一一对应的.

极点 O 的坐标规定为 $\rho=0$，θ 为任意值．即 O $(o,\ \theta)$.

性质 2 极点的坐标有无限多个：$(0,\ \theta)$，其中 θ 为任意实数.

和直角坐标系一样，我们也把极坐标系平面分成四个象限：如图 1—3，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 的区域，称为第Ⅰ象限；$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 的区域，称为第Ⅱ象限；$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 的区域，称为第Ⅲ象限；$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 的区域，称为第Ⅳ象限.

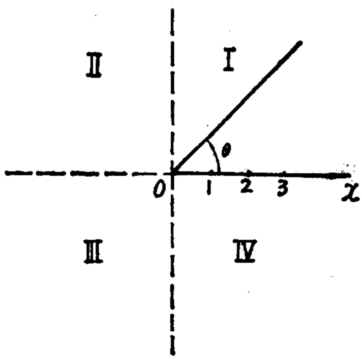


图 1-3

现在具体来谈一谈对于每一种新坐标系都要解决的两个基本问题：

(1) 已知点的坐标，求作点；

(2) 在坐标系中给出了点，确定它的坐标.

问题(1)这样解决：设求作点 $P(\rho,\ \theta)$．从极点 O 引出与极轴组成角 θ（如何计算角 θ，前面已经说过了）的射线，当 $\rho>0$ 时，就在此射线上从 O 点起取长度为 ρ 的极径，这个极

径的终点就是 $P(\rho,\theta)$；当 $\rho<0$ 时，就在射线的反向延长线上从极点 O 起取长度为 $|\rho|$ 的极径，而极径的终点就是点 $P(\rho,\theta)$。

对于问题（2），我们这样解决：设 P 为极坐标系中任意给定的一点．联结 OP，量出 OP 的长度作为 P 点的极径 ρ，量出依逆时针方向由 Ox 轴旋转至 OP 的角度作为极角，则在一般情况下，我们就记 P 点的坐标为 $(\rho,\ \theta)$，当然也可以把 P 点的坐标写成 $[(-1)^n\rho,\ n\pi+\theta]$，$n\in Z$．

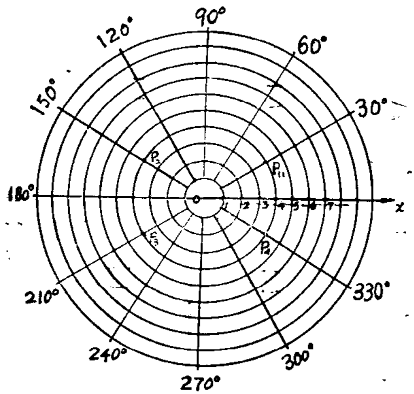


图 1-4

在举例说明问题（1）和（2）之前，我们先介绍一种专门用于描绘极坐标系中点的位置的坐标纸，称为极坐标纸（它在一般文具商店均有出售），如图 1—4，在极坐标纸上画有许多间隔相等的同心圆和由同一点出发的射线，这些同心圆和射线称为坐标线，射线是圆周角的等分线．使用的时候，将圆心定为极点 O，选出其中一条射线作为极轴 Ox，并标明长度单位．在同一圆周上的点的极径是相等的．在同一条射线上的点的极角是相等的，或相差 $2n\pi$ $(n\in Z)$．与极轴所成的角为 α 度的射线，称为 α 度线，例如图 1—4 中的射线 OP_1，称为 30° 线；射线 OP_3 称为 210° 线．

例 1　在图 1—4 中有 P_1，P_2，P_3，P_4 四个点，根据图上所标明的位置，并按照下面的条件写出它们各点的坐标：

(1) $\rho>0$，且$-\pi<\theta\leqslant\pi$；

(2) $\rho>0$，且$0\leqslant\theta<2\pi$；

(3) $\rho<0$，且$-\pi<\theta<\pi$；

(4) $\rho<0$，且$0\leqslant\theta<2\pi$；

(5) $\rho>0$ 或 $\rho<0$，但$|\theta|$必须是最小值.

解： (1) $P_1(4, \frac{\pi}{6})$，$P_2(4, \frac{5\pi}{6})$，$P_3(4, -\frac{5\pi}{6})$，$P_4(4, -\frac{\pi}{6})$；

(2) $P_1(4, \frac{\pi}{6})$，$P_2(4, \frac{5\pi}{6})$，$P_3(4, \frac{7\pi}{6})$，$P_4(4, \frac{11}{6}\pi)$；

(3) $P_1(-4, -\frac{5\pi}{6})$，$P_2(-4, -\frac{\pi}{6})$，$P_3(-4, \frac{\pi}{6})$，$P_4(-4, \frac{5\pi}{6})$；

(4) $P_1(-4, \frac{7\pi}{6})$，$P_2(-4, \frac{11}{6}\pi)$，$P_3(-4, \frac{\pi}{6})$，$P_4(-4, \frac{5\pi}{6})$；

(5) $P_1(4, \frac{\pi}{6})$，$P_2(-4, -\frac{\pi}{6})$，$P_3(-4, \frac{\pi}{6})$，$P_4(4, -\frac{\pi}{6})$.

例 2 作出下列各点：

$P_1(5, \frac{\pi}{3})$；$P_2(5, -\frac{\pi}{3})$；$P_3(-5, \frac{\pi}{3})$；$P_4(-5, -\frac{\pi}{3})$；$P_5(5, \frac{7\pi}{3})$；$P_6(-5, -\frac{16}{3}\pi)$.

解：定点 P_1：因 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 为正角，依逆时针方向把 Ox 轴转 $\frac{\pi}{3}$ 角至 Oc_1 位置，又因 $\rho=5>0$，于是在 oc_1 方向截取 $OP_1=5$，就得到点 P_1，如图 1—5。

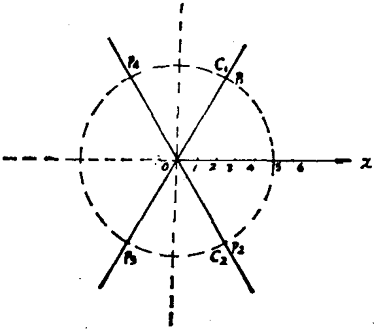


图 1-5

定点 P_2：因 $\theta=-\frac{\pi}{3}$ 为负角，依顺时针方向把 Ox 轴转 $\frac{\pi}{3}$ 角到 oc_2，图 1—5，又因 $\rho=5>0$，在 Oc_2 上取 $OP_2=5$，则得到点 P_2。

定点 P_3：因 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\rho=-5<0$，于是在射线 Oc_1 的反向延长线上取线段 $OP_3=5$，如图 1—5，则 P_3 为所求的点。

定点 P_4：如图 1—5，先引射线 Oc_2，在 Oc_2 的反向延长线上取 $OP_4=5$，则 P_4 为所求点。

定点 P_5：因为 P_5 和 P_1 两点的极径相等，而 P_5 的极角 $\left(\frac{7\pi}{3}=2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ 只是比 P_1 的极角依逆时针方向多转一周而已，因此，P_5 就是 P_1，如图 1—5。

定点 P_6：因 $-\frac{16}{3}\pi=-4\pi-\frac{4\pi}{3}=-4\pi-\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，故 P_6 的极角的终边与 $-\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ 的终边相同，即在图 1—5 中 OP_4 的位置上，又 $\rho=-5<0$，故须在 OP_4 的反向延长线上取 P_6 使 $OP_6=5$，所以 P_6 就是 P_2。

在例 2 中，显然 P_1 和 P_2 两点关于极轴对称，P_1 和 P_4 关于 90°线对称，P_1 和 P_3 关于极点 O 对称．如果 P_1 的坐标为 (ρ, θ)，则 $P_4(\rho, \pi-\theta)$，$P_3(\rho, \pi+\theta)$，$P_2(\rho, -\theta)$．又 P_1、P_2、P_3、P_4 各点的一般坐标分别为 $[(-1)^n\rho, n\pi+\theta]$、$[(-1)^n\rho, n\pi-\theta]$、$[(-1)^n\rho, (n+1)\pi+\theta]$、$[(-1)^n\rho, (n+1)\pi-\theta]$，于是得到下面对称点的性质：

性质 3 对于任意的整数 n 和 k：

$[(-1)^n\rho, n\pi+\theta]$ 和 $[(-1)^k\rho, k\pi-\theta]$ 两点，关于极轴对称；

$[(-1)^n\rho, n\pi+\theta]$ 和 $[(-1)^k\rho, (k+1)\pi-\theta]$ 两点，关于 90° 线对称；

$[(-1)^n\rho, n\pi+\theta]$ 和 $[(-1)^k\rho, (k+1)\pi+\theta]$ 两点，关于极点对称．

取 $n=k=0$，就得到下面常用的对称点的坐标：

(ρ, θ) 与 $(\rho, -\theta)$ 两点关于极轴对称；

(ρ, θ) 与 $(\rho, \pi-\theta)$ 两点关于 90° 线对称；

(ρ, θ) 与 $(\rho, \pi+\theta)$ 两点关于极点对称．

从图 1—5 中还可以看到：P_4 和 P_3 关于 180° 线对称，P_3 和 P_2 关于 270° 线对称，而 180° 线和 270° 线分别是极轴和 90° 线的反向延长线，故习惯上还是把 P_4 和 P_3 称为关于极轴对称，P_3 和 P_2 称为关于 90° 线对称，这样规定之后，显然性质 2 仍然成立．

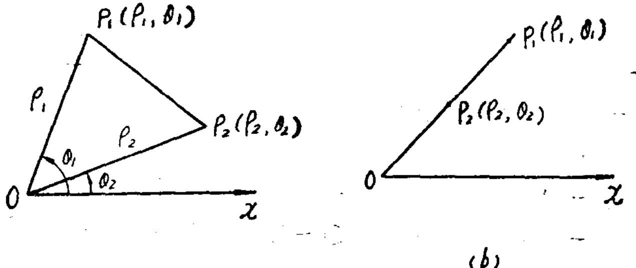
（二）两点间的距离

设 P_1、P_2 两点的坐标为 (ρ_1, θ_1)、(ρ_2, θ_2)，若 P_1、P_2 与极点 O 不在同一条直线上，如图 1—6 (a)，则在 ΔP_1OP_2 中，由余弦定理可得

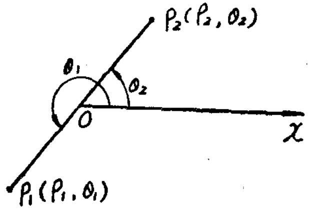
$$|P_1P_2|^2=|OP_1|^2+|OP_2|^2-2|OP_1||OP_2|\cos\angle P_1OP_2$$

$$= \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2), \qquad ①$$

$$\therefore \quad |P_1P_2| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$



(a) (b)



(c)

图 1-6

事实上，公式①对于 P_1、P_2、O 三点在同一条直线上时也是正确的．例如当 P_1、P_2 和 O 三点的位置关系象图 1—6(b) 那样，则 $\theta_1 - \theta_2 = 0$（或 $2n\pi$，$n \in Z$），并且

$$\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos 0}$$

$$= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2}$$

$$= \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2} = |\rho_1 - \rho_2| = |P_1P_2|,$$

因而公式①同样正确．当 P_1、P_2 和 O 三点的关系象图 1—6(c)那样，或 P_1、P_2 中有一点与 O 点重合，不难验证此公式也是正确的．

定理 1·1 若 P_1 和 P_2 两点的坐标分别为 (ρ_1, θ_1) 和 (ρ_2, θ_2)，则这两点之间的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}. \qquad (1-1)$$

例 1 求下面每对点之间的距离：

(1) $A\left(3,\ \frac{\pi}{4}\right)$和$B\left(4,\ \frac{7\pi}{4}\right)$；

(2) $C(5,\ 30°)$和$D(-7,\ 210°)$；

(3) $E(-2,\ -20°)$和$F(3,\ 40°)$.

解：直接利用公式(1－1)可以得到：

(1) $$|AB|=\sqrt{3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{25-24\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{25}=5,$$

因此，A、B两点间的距离等于5.

(2) $$\because\quad |CD|=\sqrt{5^2+(-7)^2-2\cdot5\cdot(-7)\cos(30°-210°)}$$

$$=\sqrt{74+70\cos(-180°)}$$

$$=\sqrt{74-70}=2,$$

$$\therefore\quad |CD|=2.$$

(3) $$\because\quad |EF|=\sqrt{(-2)^2+3^2-2\cdot(-2)\cdot3\cos(-20°-40°)}$$

$$=\sqrt{13+12\cos(-60°)}$$

$$=\sqrt{13+6}=\sqrt{19},$$

$$\therefore\quad |EF|=\sqrt{19}.$$

(三) 三角形的面积

在讨论一般的三角形面积之前，先讨论由$P_1(\rho_1,\ \theta_1)$，$P_2(\rho_2,\ \theta_2)$两点及极点O为顶点的三角形的面积.

假定P_1、P_2、O三点依逆时针方向的顺序排列，如图1－7(a)，则ΔP_1P_2O的面积

$$S=\frac{1}{2}|OP_1||OP_2|\sin\angle P_1OP_2$$

$$=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1);$$

若 P_1、P_2、O 三点依顺时针方向排列，如图 1-7(b)，则ΔP_1P_2O的面积

$$S=\frac{1}{2}|OP_1||OP_2|\sin\angle P_2OP_1$$

$$=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)=-\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1).$$

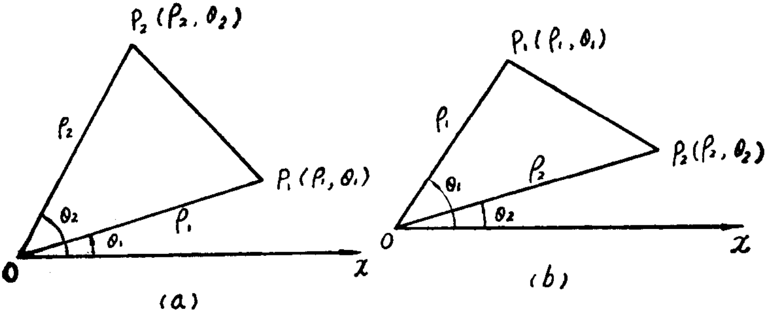


图 1-7

因此，若不考虑 ΔP_1P_2O 的顶点顺序时，其面积为

$$S=\left|\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)\right|. \qquad (1—2)$$

设 ΔABC 的三个顶点的坐标分别是 $A(\rho_1, \theta_1)$，$B(\rho_2, \theta_2)$，$C(\rho_3, \theta_3)$. 当 A、B、C 三点的排列顺序为逆时针方向时，如图 1—8，则