解析几何学
学習方法指导書

第一分册

(初　稿)

董春成編

高等教育出版社

解析几何学

学習方法指导書

第一分册

（初 稿）

董寿成編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）
人民教育印刷厂印装 新华书店发行

統一书号13010·3 开本850×1168 1/32 印张15/16
字数19 000 印数9,301—18,300 定價（6）¥0.10
1959年5月第1版 1959年8月北京第2次印刷

第一分册目录

一．一般学習方法指示

1．因为我校的課堂教学是采用广播講授的方式，学員們不能当面看到教师推导公式、演作例题与描繪圖形等过程；所以閱讀講义尤为重要。学員們必須在听講后仔細閱讀講义，能在听講之前閱讀更好。閱讀时，对那些講义中略去的論証与計算，应詳細地补作出来并写在笔記本中，作为将来复習时的依据。

2．学員們应特别注意基本概念的定义。对这些概念必須有清楚的了解，否則，不可能学好解析几何学。要仔細思考講义中对某些定义所举的例子，能自己設法举出类似的例子更好。

3．学員們要特别注意公式的推导，其 [illegible] 公式的应用范圍。因为在解析几何学中，有很多具体問題是利用公式来解决的。

4．无論在听講时还是在自己閱讀講义时，都必須仔細地作笔記。这不仅是为了将来复習时可以参考，而且在当时对新知識的理解也会有帮助。在听講时，应該把教师講述的重要語句仔細地記录下来；或将講义中主要的部分标志出来，听后再詳細地写在自己的笔記本中。在閱讀講义时，更应該将自己的理解、体会以及对講义的摘要补充都記录在笔記本中。

5．在听講或閱讀講义时，有不能即时理解的部分，应标志在講义上或記录在笔記本中，以便事后自己深入鑽研或向輔导教师提問。

6．在听講后必須遵照教师或輔导教师的布置演作習題，而且要认真、仔細地演作。因为演題是学習中的一个重要环节；它不但能加深对已学过的知識的理解，而且能巩固既得知識，从而对进一步的学習起了推动作用。

7．在演作習題时，应首先对每一道題的題意有透徹的理解。也就是說，必須首先弄清題中已給了什么？要求作出什么？然后再运用旣得的知識思考解題的途徑，按步就班地演作出来。

8．在演作習題的过程中，应該注意每一步的依据，必須确实知道这些依据的正确性。比如，使用公式时必須知道这个公式的含义、它的使用范圍，以免用錯公式从而使演作結果發生錯誤。又如，使用概念的定义时必須确切地弄清这个概念究竟指的什么，以免發生錯誤。

9．每一道題都必須作到最終的答案。如果答案可以化簡时，必須化为最簡形式。如果答案不只一个，也必須完全而无遺漏地把每一个答案都作出来。

10．如果一道題有几种不同解法时，应选擇最恰当的解法解出。如果时間允許的話，使用其他的方法再解一遍，加以驗証和比較，就更好了。

11．因为解析几何学是使用解析的方法（代数的方法）研究几何圖形的性質的，所以在演作習題时除应重視代数的計算和論証外，描繪圖形也很重要。准确地描繪圖形不仅对寻求解題途徑有帮助，而且在很多情形下能驗証計算結果和論証的正确性。

12．演作解析几何学每一章的習題（行列式一章除外）都应附有圖形。而且一般应使用繪圖仪器按一定的比例尺准确地描繪。这样做不仅对学員思考演題方法有帮助，而且养成准确、整潔地描圖的習慣，对学習其他科学以及实际工作都有好处。

13．学員們应遵照輔导教师的布置参加測驗及考試，这不仅是为了檢查学員們的学習質量，也为了使学員从准备复習中得到加深理解以及巩固旣得知識的益处。

二. 各章学習方法指示

第一章 行列式理論初步

1. 本章的学習目的在于熟悉二、三阶行列式的展开法、性質以及利用它們解出和研究二元和三元一次方程組，为后面解决解析几何学中的一些具体問題打下基础。

2. 学習本章时，必須熟練地掌握二、三阶行列式的展开法則。能够利用行列式来解出和研究二元、三元一次方程組。必須掌握三元一次齐次方程組有非零解的条件。这几部分知識在以后各章中应用很广。

3. 使用行列式解二、三元的一次方程組时，应注意解法公式中分子的构造形式与分母的构造形式以及它們之間的关系。掌握这些規律将会大大簡化解方程組的手續。同时应注意，在三元方程組中$\Delta=0$的情形要比二元方程組中更为复杂。

第二章 平面上的直角坐标、曲綫及其方程

1. 本章的学習目的在于，明确解析几何学的研究对象并掌握一些最基本的研究方法，为以后各章的学習打下坚实的基础。只有在透徹理解本章內容的基础上，才能进一步学習以后各章，否則将是徒劳无功的。

2. 学習时，首先要弄清如何建立几何圖形的基本元素(点)和代数学的基本对象(实数)之間的一一对应关系。这种关系是通过

坐标系建立起来的。因此，可以說，坐标系是研究一切解析几何問題的基础，必須切实地掌握它。

3．坐标系的建立，使我們可以解决一些簡單而且是最基本的問題，例如，两点間的距离的求法、綫段的定比分割等。这些也都是在以后各章中常常使用的，应加注意。

4．本章中所講到的另一个重要問題是，如何把几何中的曲綫(点的集合)和代数中的方程联系起来。这种联系建立以后，我們才有可能使用代数的方法研究几何問題。在解析几何学中全部問題的研究都是建立在这种联系的基础上的，所以应特别加以注意。

5．学習本章教材后，必須掌握以下几方面的技能和技巧：

i）按給定的坐标，描出点；

ii）根据給出的点的位置，确定其坐标；

iii）按照已知条件，建立曲綫的方程；

iv）根据給出的方程，描出它所表示的曲綫(点的集合)，幷对圖形的性質作概略的討論；

v）利用本章內所学过的公式与方法，解决有关的具体問題；例如，求两点間的距离、按定比求綫段的分点的坐标、求三角形的面积、求綫段的射影、求两曲綫的交点等。

第三章　直綫

1．通过本章的学習应該明确：①凡直綫都可用一次方程来表示，②凡一次方程都表示直綫。这也就是在很多数学著作中称一次方程为綫性方程的由来，③两个条件可以确定一直綫。

2．在学習直綫的各种类型的方程时，必須弄清各种公式的含义及其使用价値；尤应注意到它們各自的使用范圍。

3. 在了解各类型的直綫方程的基础上，应該掌握它們彼此之間的互相轉化的方法。例如，直綫的一般方程如何化成法綫式方程、直綫的一般式方程如何化成截距式方程、直綫的一般式方程如何化成斜截式方程、直綫的参数方程如何化成一般式方程等。这种互相轉化在解决一些具体問題时是必要的。

4. 在研究两直綫之間的关系时，必須复習在第一章里学过的行列式的知識。这样对既得知識能得到进一步的理解与巩固。

5. 通过本章的学習，应該掌握以下几方面的技能和技巧：

i）根据已知条件，使用本章所学过的公式与方法建立直綫的方程；

ii）根据已知的直綫方程描出直綫的圖形并討論它的性質；

iii）根据已知点的坐标和已知直綫的方程，进行研究点与直綫以及直綫与直綫之間的关系；

iv）解决有关直綫的具体問題；例如，求相交二直綫的夹角的平分綫的方程、求三角形的高的方程并証明三个高交于一点等。

第四章　二次曲綫

1. 在前章中我們研究了一般一次方程

$$Ax+By+C=0$$

的圖形——直綫，在本章中要进一步研究一般二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

的圖形——二次曲綫。首先，按照給定的条件建立二次曲綫的标准方程，也就是，研究在上述一般二次方程中，系数取得特殊值的情形下它所表示的曲綫。这样就得到圓、橢圓、双曲綫和抛物綫的标准方程。在作了这些研究之后，很自然地会提出这样的問題：上面研究过的几种曲綫的方程都是二次的，但是否二次方程就只表

示这几种曲綫呢？为了回答这个問題，我們必須掌握在解析几何学中非常有用的另一种研究工具——坐标变换。借助于坐标变换我們不仅回答了上述問題，同时也对二次曲綫作出了系統的研究与分类。

2. 和前章类似，在学習这一章时，要求学員們必須能够根据已知的条件建立二次曲綫的方程以及根据給定的二次方程描繪它的圖形。

3. 描繪二次曲綫比描繪直綫要复杂得多。因此，我們必須充分利用曲綫与坐标軸的交点、曲綫的对称性以及曲綫上的点的存在范圍等性質。在描繪双曲綫时还应利用它的漸近綫。这样作会使描繪曲綫的工作大大簡化。

4. 学習坐标变換时，必須注意到，坐标的变換只是使点的坐标改变，使曲綫的方程改变；但点的位置、曲綫的形状并不因此而改变。尤其是曲綫的方程的次数也不改变。这些事实都有利于我們对二次曲綫的一般研究。

5. 由于准綫、焦点与离心率这些概念的引入，我們可以把橢圓、双曲綫与抛物綫这三种曲綫的定义統一起来。这对于掌握它們的定义是非常有利的。

6. 在描繪圓錐曲綫时，除了根据它們的方程用“描点法”描繪外，我們还应該掌握通常使用的几种机械方法。現在分述如下：

i) 橢圓的画法。常用的有两种：①根据橢圓定义的画法，②同心圓的画法。分述如下：

①根据定义的画法。从橢圓的方程內求出 a 和 b 的值。在坐标軸上分别截取綫段 $|OA|=|OA'|=a$ 及 $|OB|=|OB'|=b$。于是得出橢圓的四頂点 A, A', B, B'（圖中假設長軸在 x-軸上）。以 B 为圓心，a 为半徑作弧交長軸于 F, F'；这就是橢圓的两焦点。这是因为 $c^2=a^2-b^2$，而在直角$\triangle OBF$ 中斜边等于 a，一直角边等于 b，故其他一直角边为 c。既然有了焦点 F, F'，分别以此两点为圓

心，以 r 及 r'（r 为任意長，$r'=2a-r$）为半徑作弧交于 M, M'；这就是椭圆上的点，因为 $|MF|+|MF'|=r+r'=2a$（合于椭圆定义）。由于 r 的值可以改变，我們得到椭圆上的許多点。連之即得椭圆。見圖(1)。

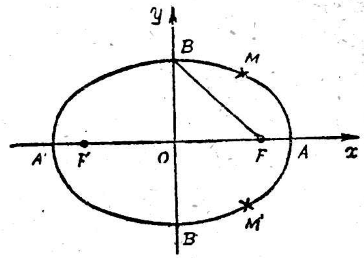

圖 1.

②同心圓法。以原点为圆心，分别以 a 和 b 为半徑作同心两圓。自原点出發作射綫，交大圓于点 M，交小圓于点 N。自点 M 作 y- 軸的平行綫，自点 N 作 x- 軸的平行綫。此两綫的交点 P 即椭圓上的点。改变射綫的方向，可以得到椭圓上的許多点。連之即得椭圓（長軸在 x- 軸上）。見圖(2)。这个方法的理論根据可参看第四章 §24 椭圓的参数方程。

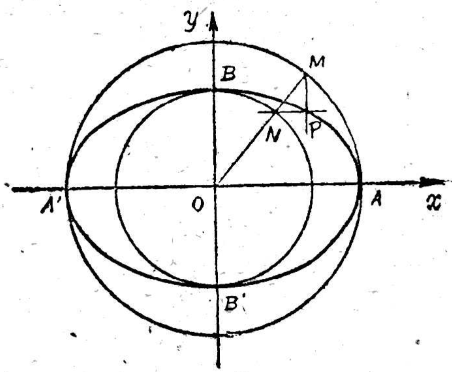

圖 2.

ii) 双曲綫的画法。先从双曲綫的方程中求得 a, b 的值（a为实半軸）。在两坐标軸上分别截取 $|OA|=|OA'|=a$和$|OB|=|OB'|=b$（圖中假設实軸在 x- 軸上）。以 O 为圓

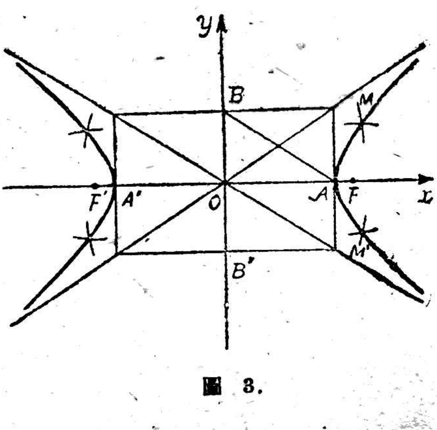

圖 3.

心，以$|AB|$为半徑作弧，交实軸于 F, F' 两点，即为双曲綫的焦点。这是因为$c^2=a^2+b^2$，而在直角$\triangle OBA$中，$|OA|=a$, $|OB|=b$，故其斜边$|AB|=c$。作出焦点以后，分别以两焦点 F, F'为圓心，以 r 和 r'(r 为任意長 $r'=2a+r$)为半徑，作弧交于点M和M'就是双曲綫上的点。这是因为$r'-r=2a$（合于双曲綫的定义）。改变 r 的值，可得双曲綫一枝上的許多点。对調F和F'（以F为圓心，r'为半徑；F'为圓心，r为半徑）便可得出另一枝上的点。連之即得。見圖（3）。双曲綫的基本矩形及漸近綫也应該作出，对描繪双曲綫很有帮助。

iii）拋物綫的画法。先从拋物綫的方程中求出 p 的值。以原点O为圓心，以 $\frac{p}{2}$ 为半徑作圓，交其对称軸(圖中設为 x- 軸)于F, K两点。过K（設拋物綫在 y- 軸的右側）点作直綫 DD' 垂直于 x- 軸；則F为拋物綫的焦点，DD'为其准綫。在 x- 軸上，距准綫任意距离 $d\left(>\frac{p}{2}\right)$处取一点$R$，点$R$应与焦点在准綫的同側。过$R$点作直綫平行于 y- 軸。以F为圓心，以 d 为半徑作弧，交上述直綫于M, M'两点。此即拋物綫上的点。这是因为$|FM|=|KR|$，即$r=d$（合于拋物的定义）。改变 d 的值，可以得到拋物綫上的許多点。連之即得拋物綫。見圖(4)。

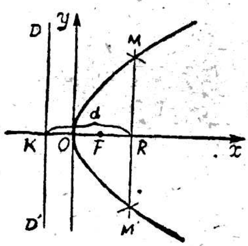

圖 4.

7. 上述描繪圓錐曲綫方法的根据是它們的标准方程。但所遇到的二次方程往往不是标准形式，这就要求我們必須能够利用坐标变換順利地把方程簡化成为标准形式，然后描繪其圖形。描繪时必須把新旧坐标分別画在圖紙上，并用字母标志清楚。

8. 使用坐标变換的手段化簡二次方程是一种比較繁复的演算过程，学員們必須熟練地掌握它。坐标变換的效能在于，坐标平移能消去一次項或常数項，坐标旋轉能消去 xy 項。在具体問題

中，必須能够判断应該單独使用哪一种变换，还是应該連續使用两种变换。在連續使用两种变换时，又必須能够判断应該先使用哪一种。关于这些，应仔細体会第四章§29、§30中的那些例題。

第五章　極坐标

1. 使平面上的点与一对实数發生对应关系的方法，是多种多样的。除笛卡尔坐标法外，常被使用的还有極坐标法。在解决实际問題时，例如，在积分学、測量学、彈道学、天文学中，利用極坐标有时較为方便。本章主要講述極坐标的概念，極坐标与直角坐标間的互换，如何建立曲綫的極坐标方程，如何根据極坐标方程描繪它所表示的曲綫以及几种常見的曲綫——直綫、圓、圓錐曲綫的極坐标方程的一般形式等几个部分。

2. 学習本章教材时，要求学員們掌握以下几方面的技能技巧：

i）由已知点的極坐标求作該点，由圖上的已知点求出該点的極坐标；

ii）由已知点的極坐标(r, θ)求出其直角坐标(x, y)，由已知点的直角坐标(x, y)求出該点的極坐标(r, θ)；

iii）同一曲綫的極坐标方程及其直角坐标方程之間的互相变换；

iv）根据已知曲綫的極坐标方程描繪曲綫。

三．各章習題指示

下面給出第一章至第五章大部分習題的答案或提示，有的还給出詳細解答。

第一章

1. a. 26　b. -38　c. 1。

2. a. $\left.\begin{array}{l}3x-2y+13=0\\5x+8y-1=0\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 8\end{vmatrix}=24+10=34\neq0$, 所以原方程組有一組确定的解，$x=-3$, $y=2$。

b. $\left.\begin{array}{l}2x-10y-3=0\\4x+5y-1=0\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}2 & -10\\4 & 5\end{vmatrix}=10+40=50\neq0$, 所以原方程組有一組确定的解，$x=\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{5}$。

3. a. $\left.\begin{array}{l}x-2y+3=0\\2x-4y-7=0\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & -4\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=0$, 但 $\begin{vmatrix}-3 & -2\\7 & -4\end{vmatrix}=$ $=-2\begin{vmatrix}-3 & 1\\7 & 2\end{vmatrix}=-2(-6-7)=26\neq0$, 所以原方程組无解。

b. $\left.\begin{array}{l}3x-2y=5\\6x-4y-10=0\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}3 & -2\\6 & -4\end{vmatrix}=3\times(-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=0$, 且 $\begin{vmatrix}5 & -2\\10 & -4\end{vmatrix}=$ $=5\times(-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}3 & 5\\6 & 10\end{vmatrix}=3\times5\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=0$; 所以原方程組有无限多組的解。

c. $\left.\begin{array}{l}x=2\\x-3=0\end{array}\right\}$ 这虽然是一元方程組，但我們可以把它看做二元方程組，其中关于另外一个未知数的系数为零；即 $\left.\begin{array}{l}x+0\cdot y=2\\x+0\cdot y=3\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}=0$, 但 $\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 0\end{vmatrix}=0$ 而 $\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}=3-2\neq0$, 根据第一章 § 2, (ii); 可知原方程組无解。

4. a. $\left.\begin{array}{l}3x+2y=0\\x-5y=0\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & -5\end{vmatrix}=-15-2=-17\neq0$, 所以原方程組只有一組零解，即 $x=y=0$。

b. $\left.\begin{array}{l}x-2y=0\\4x=8y\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}1 & -2\\4 & -8\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1 & -2\\1 & -2\end{vmatrix}=4(-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=0$, 所以原方程組有无限多組解。

c. $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$ 原方程組可看做 $\left.\begin{array}{l}x+0\cdot y=0\\0\cdot x+\quad y=0\end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1\neq0$, 所以原方程組只有一組零解 $x=y=0$。

5. a. $\left.\begin{array}{l}x+5y-10z=0\\2x-3y+6z=0\end{array}\right\}$ $x=\begin{vmatrix}5 & -10\\-3 & 6\end{vmatrix}k=0\cdot k$, $y=\begin{vmatrix}-10 & 1\\6 & 2\end{vmatrix}k=-26k$, $z=\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & -3\end{vmatrix}=-13k$; 或 $x=0, y=2k, z=k$（其中 k 为任意实数）。

b. 原方程組可看做 $\left.\begin{array}{l}3x-4y+2z=0\\ x-2y+0\cdot z=0\end{array}\right\}$ $x=\begin{vmatrix}-4&2\\-2&0\end{vmatrix}k=4k,\ y=\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}k=$ $2k,\quad z=\begin{vmatrix}3&-4\\1&-2\end{vmatrix}k=-2k$; 或 $x=2k, y=k, z=-k$（其中 k 为任意实数）。

6. a. 原方程可改写成 $\left.\begin{array}{r}-2x+3y+5z=0\\ 4x-6y-10z=0\end{array}\right\}$ 两个方程实际只是一个，在 $x=\frac{3y+5z}{2}$ 中，給 y, z 以任意值，便可求出 x 值。

b. 与上題类似，$x=-5y+10z$。

7. a. 4； b. −4； c. 8。

8. a. −48; b. ab;

c. $\begin{vmatrix}x-1&x+2&x-3\\3&5&-2\\1&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-2\\3&4\end{vmatrix}(x-1)-\begin{vmatrix}3&-2\\1&4\end{vmatrix}(x+2)+\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}(x-3)=$ $=26(x-1)-14(x+2)+4(x-3)=16x-66$。

9. a. 原方程組可改写成 $\left.\begin{array}{r}2x-4y+3z=1\\ -x+2y-4z=-3\\ 3x-y+5z=2\end{array}\right\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2&-4&3\\-1&2&-4\\3&-1&5\end{vmatrix}=$ $=2\begin{vmatrix}2&-4\\-1&5\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1&-4\\3&5\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-1&2\\3&-1\end{vmatrix}=25\neq 0$，所以原方程有唯一的确定解：$x=-1,\ y=0,\ z=1$。

b. $x=1,\ y=-1,\ z=2$。

10. a. $\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&1\\4&-6&2\\4&1&-3\end{vmatrix}=0$，但分子行列式中有不为零的；所以原方程組无解。

b. Δ 及各分子行列式全为零，方程組有无限多組解。这是因为前两方程相加的結果与第三方程一样。

11. a. $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&4\\1&-7&1\end{vmatrix}\neq 0$，所以原方程組只有一組零解，$x=y=z=0$。

b. $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&4\\4&-11&10\end{vmatrix}=0$；但其余子式中有不为零的，如 $\begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}=-5\neq 0$。原方程組的解为：$x=7k,\ y=-2k,\ z=-5k$（其中 k 为任意实数）。

第二章

1. 略； 2. (2, −3)； 3. (−4, −5)； 4. (−2, 3)；

以上各題都应在坐标紙上画出圖来。

5. a. $|AB|=\sqrt{(2-3)^2+(7-0)^2}=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$;

b. $|AB|=\sqrt{13}$; c. $|AB|=\sqrt{41}$;

d. $|AB|=\sqrt{10}$。

6. 三角形的周長$=\sqrt{5^2+0}+\sqrt{4^2+2^2}+\sqrt{1^2+2^2}=5+3\sqrt{5}$。

7. $|AB|=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$, $|BC|=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$, $|CA|=\sqrt{2^2+2^2}==2\sqrt{2}$。显然 $|AB|=|BC|\neq|CA|$，所以这个三角形是等腰三角形。

8. 解法与上题类似。

9. $x_1=2$, $x_2=4$; $y_1=5$, $y_2=8$; $\lambda=\frac{2}{3}$，将这些代入公式(5)，得 $x=\frac{14}{5}$, $y==\frac{31}{5}$。这就是 c 点的坐标。

10. 所求分点的坐标为：$y=13$, $y=8$。

11. 根据題意，由公式(5′)可得：$\frac{2+x}{2}=3$, $\frac{y+6}{2}=2$。这就是説，$x=4$, $y==-2$。因此原設两点为$(2,-2)$, $(4,6)$。

12. 根据平面几何的知識，我們知道，三角形的三条中綫交于一点，这点在每一条中綫上都是距三角形頂点較远的一个三分点。此点叫做三角形的重心。显然，BC 边的中点M的坐标为

$$x=\frac{a_2+a_3}{2},\qquad y=\frac{b_2+b_3}{2}.$$

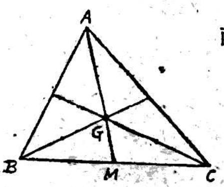

圖 5.

而重心G把 AM 分为两段成 $2:1$ 之比。所以点G的坐标为

$$x=\frac{a_1+2\times\frac{a_2+a_3}{2}}{1+2}=\frac{a_1+a_2+a_3}{3},$$

$$y=\frac{b_1+2\times\frac{b_2+b_3}{2}}{1+2}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}.$$

13. a. 根据公式(6)，这个三角形的面积$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3&0&1\\5&2&1\\7&6&1\end{vmatrix}=2$。

b. Δ 的面积$=28$（根据同样公式）。

14. 設 (x,y) 为軌迹上的任意点，根据題意可知：$\sqrt{x^2+(y-2)^2}==\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$，化簡后得，$3x+y+3=0$。

15. 設 (x,y) 为軌迹上的动点，根据題意可知：$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=4$ 化簡后得，$x^2+y^2+2x-4y-11=0$。

16. 設 (x,y) 为軌迹上的动点，根据題意可知：$[\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}]^2++[\sqrt{(x-8)^2+(y-2)^2}]^2=16$，化簡后得，$x^2+y^2-12x-4y+36=0$。

17. 設 (x,y) 为三角形第三頂点的坐标，則 $[\sqrt{(x+3)^2+y^2}]^2--[\sqrt{(x-3)^2+y^2}]^2=\pm16$，化簡后得，$3x-4=0$ 和 $3x+4=0$。

18. 設 (x, y) 为动点，則 $\sqrt{(x+5)^2+y^2}+\sqrt{(x-5)^2+y^2}=12$，化簡后得，$11x^2+36y^2-396=0$。

以上 14—18 各題都应画出圖形加以驗証。

19. 描繪下列各方程所表示的曲綫：

a. $x^2-4y-6x=0$，在方程中設 $y=0$，則 $x=0, 6$；設 $x=0$，則 $y=0$。这就是說，它所表示的曲綫通过原点 $(0, 0)$ 及点 $(6, 0)$。原方程可化为 $x=3\pm\sqrt{9+4y}$。由此可知，y 的值必須大于或等于 $-\frac{9}{4}$ 卽 $y\geqslant-\frac{9}{4}$，否則 x 值将为虛数。x, y 的一些对应值見下表：

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	$\frac{7}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	4

b. $y^2-4x^2=0$，原方程可以分解为 $(y-2x)(y+2x)=0$。因此，它所表示的軌迹为两条綫（学習下一章时可知它們都是直綫）：$y-2x=0$ 和 $y+2x=0$。它們都过原点，并且第一条綫过点 $(1, 2)$，第二条綫过点 $(-1, 2)$。

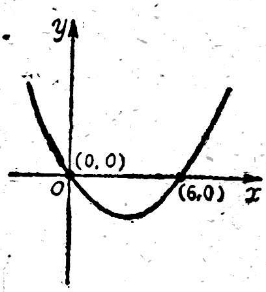

圖 6.

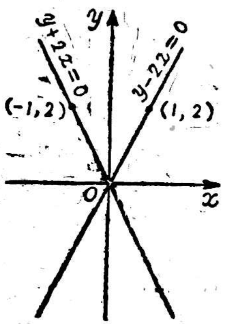

圖 7.

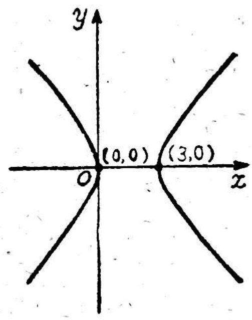

圖 8.

c. $y^2-x^2+3x=0$，在方程中設 $y=0$，則 $x=0, 3$；設 $x=0$，則 $y=0$。所以曲綫过原点 $(0, 0)$ 与点 $(3, 0)$。方程中只含 y 的偶次冪，所以曲綫关于 x-軸对称。原方程可以改写成 $y=\pm\sqrt{x(x-3)}$，由此可知，x 值必須滿足不等式 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant3$。否則 y 将得虛数值。原方程又可改写成为 $x=\frac{3\pm\sqrt{9+4y^2}}{2}$，由此可知，$y$ 可取任何实数值。

x, y 的一些对应值見下表：