青年数学叢書

擺綫

别尔曼著

中国青年出版社

青年数学叢書

擺　　綫

别尔曼著

高徹　閻喜傑譯

中国青年出版社

一九五六年　北京

擺　　　綫

〔苏〕别尔曼著
高徹　閻喜傑譯

*

中國青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第036号
中國青年出版社印刷厂印刷
新華書店总經售

*

787×1092 1/32　4印張　59,000字
1956年5月北京第1版　1956年5月北京第1次印刷
印数1—8,000

統一書号：13009·8

定价(7)三角六分

序

在这本小册子裏，我們要講一条叫做“擺綫”的重要曲綫和它的一些同類曲綫的性質.

为什麼从許許多多各种各样的曲綫裏，我們單單选取擺綫呢？这有兩个原因.

第一，擺綫对於机械有着非常重要的意义．齒輪的齒的縱断面，好多類型的偏心輪、偏凸輪以及别的机器零件的輪廓就是这种曲綫．每一个繪圖員都应該熟悉擺綫和擺綫形的曲綫．从它的实用價值來說，擺綫是可以和橢圓、拋物綫、彈道綫等相提並論的.

第二，擺綫形曲綫是試金石，在十七世紀產生並在該世紀末形成了微積分的那种新的計算方法和新的數学思想，在这种試金石上受到了考驗．現在每一个中学生所熟知的人物，像伽利略、托里拆利和惠更斯，都曾經研究过这种重要的曲綫.

書裏的敍述非常淺顯，每一个高中学生、技術人員、大学生和大多數的熟練工人都可以了解．但是，要使很多人覺得容易接受，敍述就必然有些不够嚴正，也就不能像數学教科書那样簡潔扼要了.

在这裏，自然会發生一个問題：既然擺綫的性質可以非常簡短地用高等數学——微積分來說明，为什麼还要用冗長而

又不能完全使人信服的初等數学方法來叙述呢？人們可能会說："对那些不預备学高等數学的人，擺綫的性質本來未必会使他們感到兴趣；而那些对精密科学和技術有兴趣的人，等个兩三年進了專門学校或大学就可以学到了."

对这个問題，我們可以这样回答：有許多部門的人，他們对於跟机械有關係的科学問題很有兴趣，但是並不懂高等數学，对於这些人來說，也許就很想懂得对机械这样重要的这种曲綫的性質. 而对於那些準备將來学習高等數学的人，先在中学裏熟悉了那些事实、那些方法，以及曾經为高等數学的產生出过力的那些科学家，正可以使他們將來能够更好地去領会高等數学中的观念和方法，这也是有好处的.

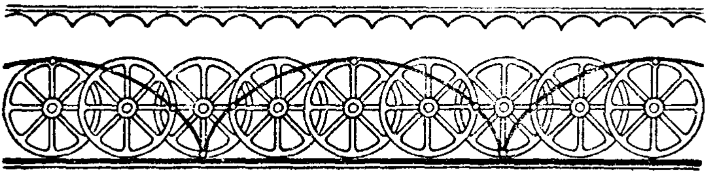
我們要預先告訴技術青年們："擺綫"是一本數学書而不是技術書，是一本讀物而不是教本. 書裏面对机械的应用只是粗具輪廓. 但是，它对於技術人員也許不無用处：本來，沒有理論的实踐就是盲目的实踐. 基本上說，这本書是为數学爱好者和中学裏(高年級的)的數学小組寫的.

許多人对數学都怀着敬意，但是總歸不大願意跟它接近. 假使这本小册子对消除这种奇怪的偏見有些帮助的話，即使帮助很少，作者也將引为荣幸.

对促進本書的寫作和出版的所有人士，致以衷心的謝意.

作　者

目　次



第 一 章
車輪產生出來的曲綫

笨熊騎在自行車上走路……

丘科夫斯基

兩个騎自行車人的談話

我的朋友——九年級学生㊀瓦夏和物理系学生謝尔該，是自行車运動的愛好者．有一次，他們兜風回來，曾經進行这样的談話．

謝尔該： 瓦夏，你想，自行車是不是会把附在它後輪上的泥漿甩開來濺在騎車人的身上？

瓦夏： 当然啦！在稀泥道上偶尔降低速度的時候，那些飛濺的泥點就常常落到背上．

謝尔該： 为什麼会这样呢？这事你想过嗎？据你的意見，从車輪边緣上飛開來的泥漿应該是怎样動法的？朝什麼方向動的？

㊀ 相当于我國的高中二年級学生。——譯者註

瓦夏： 讓我想想．唉！想不出來……

謝尔該： 那末讓我來提醒你吧．假使任一个質點被迫沿着曲綫运動，但是突然可以自由运動了，那末它依照慣性，就会保持着"解除束縛"那一瞬間具有的速度的大小和方向，依着运動軌綫的切綫方向运动．明白嗎？

瓦夏： 不完全明白．我忘記了軌綫是怎样一回事．

謝尔該： 質點运動的曲綫，就叫軌綫．

瓦夏： 对！对！現在完全明白了．

謝尔該： 你試把这条規律运用到我們的情況看．

瓦夏： 为什麼？

謝尔該： 你会得出意外的結果．

瓦夏： 好吧．（一边在想．）假設小泥點走的路綫是这样子的，（瓦夏当場就画了一張画，样子像我們的圖 1，只是他画的自行車比圖上的要坏得很多．）那末，从 A 點飛出來的小泥點就要依着車輪边緣的切綫方向运動，因而就画出这样一条

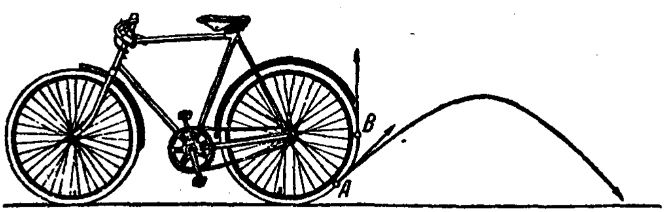


圖 1． 对嗎？

曲綫（他指了一下）．若是把石子斜斜地扔出去，它也照着同这一样的路綫飛出去．

謝尔該： 这条曲綫叫做拋物綫．

瓦夏(接下去)： 即使泥漿在車輪上黏得牢一些，一直升高到B點(圖1)才甩出來，也不会赶上騎車人：因为它將要垂直向上运動．而再上面一點的泥漿就不会往上甩了．有遮泥板把它擋住了．

謝尔該： 假使騎車人減低速度，又会怎麼样？

瓦夏： 騎車人即使完全停下來，泥漿無論怎样總濺不到他……这个結論多荒唐！泥漿不是明明会落到背上來嗎！

謝尔該： 我說过，要得出意外的結果來的！

瓦夏： 究竟是怎麼回事兒？我弄不明白……

謝尔該： 問題完全就在你判断得不正確．你更仔細地看一下車輪的运動(圖2)．假設車輪是向右轉動的．(謝尔該画了一个車輪，見圖2的左边一个，又画了一个繞軸心向右轉的箭头v.)我們假定騎車人的速度是v公尺/秒，車輪的半徑是r公尺．当車輪的軸心向前走的距离等於車輪的圓周長，也就是等於$2\pi r$的時候，車輪才整个轉了一周(圖2)．我們用x來代表車輪轉一周需要花的時間．於是得：

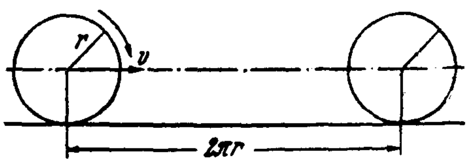


圖2．自行車輪的複合运動

車輪軸心前進$2\pi r$公尺需要花時間x秒，

車輪軸心前進v公尺需要花時間1秒．

因此：

$$x=\frac{2\pi r}{v}\text{秒}.$$

这样說來，車輪轉一周要花 $\frac{2\pi r}{v}$ 秒；那末它一秒鐘轉幾周呢？

瓦夏： 讓我自己來算．設 y 是車輪每秒鐘轉的周數．現在要列一个比例式．我們这样來看：

車輪轉一周要花 $\frac{2\pi r}{v}$ 秒，

它轉 y 周要花 1 秒．

我們就得到比例式：

$$1:y=\frac{2\pi r}{v}:1.$$

对吧？

謝尔該： 对！

瓦夏： 那就是說，每秒鐘轉 $y=\frac{v}{2\pi r}$ 周！

謝尔該： 不錯！我們現在可以看出，自行車車輪做的是複合运動：它以 v 公尺/秒的匀速度向前進，而同時又在做每秒 $\frac{v}{2\pi r}$ 周的轉動．來，記記看，假使有一點同時在做兩种运動，这一點的速度怎样求？

瓦夏： 这个我知道！用平行四边形的方法把兩种运動的速度合起來．

謝尔該： 对！我們現在來看車輪边緣上某一點 A 在某一瞬間的运動（圖 3）．这一點一方面在做向前推進的运動，——也就是說，它具有水平速度 v 公尺/秒．但是这同一點也在做旋轉运動，它本身还具有第二个速度．这个速度怎样算法

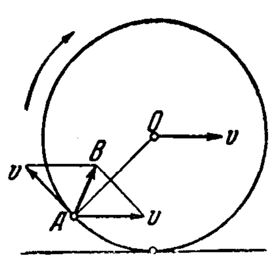


圖 3． 前進运動和旋轉运動速度的合成

呢？

瓦夏： 我現在就來算。在一秒鐘裏，車輪轉 $\frac{v}{2\pi r}$ 周。車輪轉一周，边緣上的 A 點走的路程等於輪周的長度，也就是 $2\pi r$ 公尺。这就是說，在一秒鐘裏，車輪轉 $\frac{v}{2\pi r}$ 周，A 點就走 $\frac{v}{2\pi r}\cdot 2\pi r = v$ 公尺。看來这第二个速度也是 v 公尺/秒。

謝尔該： 正是这样。在車輪轉動的時候，边緣上这點的速度也等於 v 公尺/秒；但是前進运動的速度是沿着水平方向的，而这第二个速度却是沿着車輪边緣的切綫方向的。

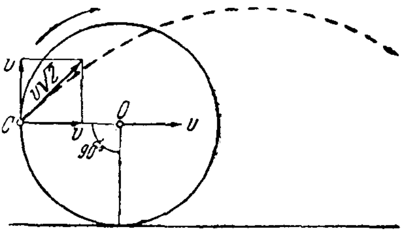


圖 4．从車輪上跳出的泥點所經的路徑

合起來的速度就得沿着这个等边平行四边形的对角綫（也就是菱形的对角綫）的方向，像圖 3 指示的那样（箭头 AB）。淸楚嗎？

瓦夏： 淸楚了。

謝尔該： 現在，瓦夏，你來看一下圖 4 上到達位置 C 的泥漿。它的速度是由兩个速度合成的，一个是水平速度 v，另一个是豎直速度，也等於 v。合成的速度就等於 $v\sqrt{2}$（按照畢達哥拉斯定理㊀），而它的方向和水平方向成 45° 的仰角。

泥漿點就像跟水平方向成 45° 角向上拋出去的石子一样

㊀ 这条定理，在歐洲相傳是希臘的幾何学家畢達哥拉斯首先發現的，所以称为畢達哥拉斯定理；但是在我國古算書"周髀算經"中，商高就已經知道了"勾方加股方，開方後得弦"，所以我們通常把它称为"勾股弦定理"。——譯者註

运動（見圖 4 上用虛綫画出的抛物綫）. 根据慣性，它仍然繼續保持着水平方向的分速度 v㊀. 它是不是会濺到騎車人身上呢？

瓦夏： 不会.

謝尔該： 如果騎車人降低了速度呢？

瓦夏： 这時候泥漿點就落到他背上來了！

謝尔該： 事实上是这样的嗎？

瓦夏： 是的. 三号那天，我騎車回來就濺了一背脊泥.

謝尔該： 这就是說，你全明白了？

瓦夏（想了一下）： 不，还沒有呢！ 我現在还很糊塗！ 在圖 4 上可以清楚地看到，速度的方向並不是沿着車輪边緣的切綫方向，而是要偏一些的. 起初我們就說过，泥漿點的速度必然是沿着軌綫的切綫方向的. 你自己曾經說过这話.

謝尔該： 是什麼东西的运動軌綫呢？

瓦夏： 当然是車輪边緣上我們說的那一點.

謝尔該： 完全对！ 它也就是沿着这条軌綫的切綫方向.

瓦夏： 我不懂. 依我看，圖 3 和圖 4 就跟这件事發生矛盾.

謝尔該： 一點也不. 你想想看.

現在我們跟謝尔該和瓦夏一起來想一下，这个表面上的矛盾有什麼根据. 我們來想一下，当自行車运動時，車輪边緣上的每一个點画出什麼样的軌綫（什麼样的曲綫）. 用幾何学

㊀ 为了使計算簡單，我們沒有把空气的阻力考慮進去. 这並不会使結果过分不正確.

的語言來說,—— 我們要弄清楚,在一个沿直綫滚動但無滑動的圓上面的每一个點,画出什麽样的曲綫。泥漿點不是沿着車輪边緣的切綫方向运動,而正是沿着这一条曲綫的切綫方向运動的。

擺綫究竟是什麽?

自行車車輪的軸心沿着直綫在均匀地运動。車輪本身在均匀地轉動。这時候,車輪边緣上每一个點画出什麽样的曲綫呢?如果軸心不動,那麽車輪上所有的點画的都是圓。但是軸心也在运動,因而相应的圓就"擴展起來","拉長起來"了。我們現在來研究沿直綫滚動但無滑動的圓上面的點画出的曲綫。这种曲綫就叫做**擺綫**。

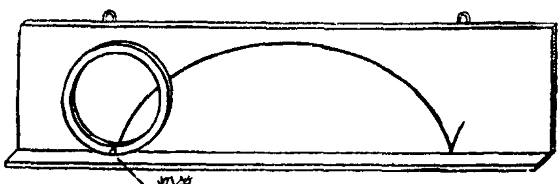


圖 5. 說明擺綫的教学用品

我們先來做一个試驗。我們从膠合板上鋸下或者从厚紙板上剪下一个圓片,在这个圓片的边上用錐子刺一个小孔,然後在小孔內放一小段筆鉛。把一支尺放在一張紙上,我們就拿这小圓片緊緊地压在紙上,然後使它沿着这支尺滚動。那一小段筆鉛就会画出我們的擺綫。圖 5 上画的是一种教学用品,在課堂上講到擺綫的時候,就可以用它來帮助說明。它是

一塊可以豎直掛起來的黑板，下边安着一条水平的边板．沿这条边板滚動着一个厚实的鉄环，很像小孩子們喜欢“滚玩”的那种鉄环．鉄环上有一个小孔，这裏可以放一小段粉筆．当鉄环沿边板滚動的時候，粉筆就画出一条擺綫．在圖 5 上可以看到这条美麗的曲綫的形狀．

現在我們來“一點一點”地画出这条擺綫來．我們要把这条曲綫作得尽可能精確．引直綫 AB（圖 6），在直綫左端画一个半徑 a 的圓，跟直綫 AB 在 K 點相切．最簡單的方法是这样：在跟直綫 AB 相距 a 的地方引一条直綫 MP，平行於 AB（这条直綫对我們來說是必需的）．在离綫段 MP 左端不远的地方标出一點 O，用 O 作圓心、用 a 作半徑画一个圓．这个圓一定跟直綫 AB 相切．切點用字母 K 标出．

現在，我們在直綫 AB 上从 K 點往右截取一段綫段，長度等於半徑 a 的圓周．大家知道，要用圓規和直尺把这綫段精確地做出來是不可能的．只好用近似作圖．如果一个圓的

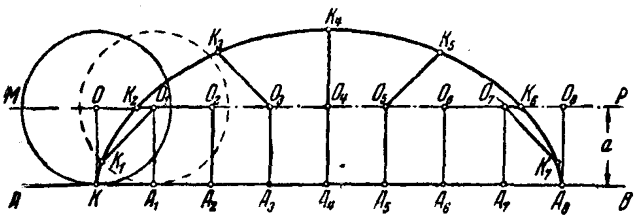


圖 6．一點一點地來画擺綫

半徑等於 a，那末它圓周的長就是 $2\pi a$，也就是說接近於 $6\frac{2}{7}a$ 或 $6.28a$．假設我們是在离直綫 AB 4厘米的地方引直綫 MP 的．这就是說，我們具有 $a=4$．因此，我們必須在 AB 上截

取長等於 4×6.28，也就是 25.1 厘米的綫段㊀. 这綫段的末端用 A_8 标出.

現在我們設想，剛才所作的圓沿着直綫 AB 在滾動. 它的圓心沿着直綫 MP 移動. 截取綫段 OO_8 等於 KA_8，把 OO_8 分成八等分. 點 O_1(第一分點)处在相当於圓周長 $\frac{1}{8}$ 的地方. 当圓心 O 移動到 O_1 時，半徑 OK 轉動了 $360°\div8=45°$. 作角 $A_1O_1K_1$ 等於 $45°$，並作綫段 O_1K_1 等於 OK. 點 K_1 一定在擺綫上. 用虛綫画出在圓周 $\frac{1}{8}$ 相应位置上的圓.

現在我們來看看轉了 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ 圓周的圓心 O_2. 我們完全照上面說的情形一样來作圖，只是角 $A_2O_2K_2$ 等於 $2\cdot\frac{360°}{8}=90°$. 我們得到擺綫上的點 K_2. 为了得到圓心在 O_3 時擺綫上的點，我們作等於 $3\times\frac{360°}{8}=135°$ 的角，並作綫段 O_3K_3 等於 OK.

點 K_4，K_5，K_6，K_7 的作法就很清楚了. 顯而易見，點 K_8 和點 A_8 重合. 把所有用这种方法得到的點用一根平滑曲綫(隨手)連起來，我們就得到了一条擺綫. 假使得到的曲綫顯得不够平滑，讀者可以自己考慮怎样來作出中間的那些點. 比如說，从一開始就可以把基本綫段(滾動圓的周長)不分成

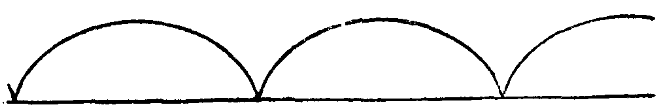


圖 7. 擺綫的一般形狀

㊀ 書裏的圖 6 是按比例 1 : 4 画的——在圖上 $a=1$ 厘米. 我們建議讀者画一个更大一些的圖，像正文裏說的那样($a=4$ 厘米).

八分，而分成 12 分．这样就不用作等於 45°，90°，135° 等等的角，应該作等於 30°，60°，90°，120° 等等的角了．

我們建議讀者來練習作各种大小（半徑 a 等於各种數值）的擺綫，並且用各种數目來劃分輔助分點．

我們要注意，和直綫一样，我們要想像擺綫是一条無限曲綫．我們假定，这个圓（它叫做母圓）沿着直綫（準綫）滚到無限远．这時候就得到一条由無限多个拱弧組成的曲綫（在圖 7 上我們画了兩个完全的拱弧和第三个拱弧的一部分）．一个个的拱弧都在具有公切綫（竪直的）的那种點（尖端）連接起來．这种點叫做擺綫的**歧點**（圖 8）．它們就对应於在滚動的圓上我們所注意的描出擺綫那一點的最低位置．最高的位置恰好在兩个歧點的中間；这些“最高的”點就叫做擺綫的**頂**（在圖 6 上，擺綫的一个頂是在點 K_4；你試指出圖 7 上所有的頂）．兩个相隣的歧點中間的直綫段，長等於 $2\pi a$，叫做擺綫的**底**（更精確些說，是擺綫的一个拱弧的底）．

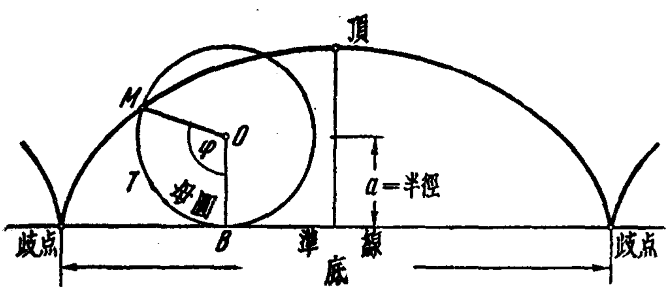


圖 8．擺綫的各个要素（画的是一个拱弧）

在研究擺綫的時候到底会發生些什麼問題呢？首先，必

須給它一个跟力学無關的純粹的幾何定义．其次，必須研究它的性質，学会作它的切綫，計算它的弧長、它的拱弧跟底所圍的面積、它的拱弧繞準綫旋轉所成的旋轉体的体積．順便我們还研究擺綫的同族曲綫，熟悉它們純粹在幾何学上的应用，以及它們在隣近部門的应用．但是在談到所有这些之前，我們先來作一个簡短的歷史介紹．

簡短的歷史介紹

著名的意大利天文学家、物理学家和啓蒙运動者伽利略(1564–1642)是開始研究擺綫的第一人．他又創造了"擺綫"这个名称，意思就是："联想到圓"的曲綫．伽利略本人關於擺綫沒有寫过什麼，但是他的学生和繼承者維維安尼、托里拆利等人却曾經提到他在这方面的工作．托里拆利是著名的物理学家，气压計的發明者，他对於數学也曾經花了不少功夫．在文藝復兴時代，还沒有狹隘的專門学者．有天才的人既研究哲学，也研究物理学和數学，並且处处得到了有趣的結果和做出了出色的發明．法國人从事擺綫的研究比意大利人要稍稍晚一點．1634年，著名的衡量制發明者罗别尔瓦里算出了擺綫的拱弧和它的底所圍的面積．關於这些事情的詳情，以及另外一些跟擺綫有關的学者們的發現，我們放到後面去細談．現在我們要花一點篇幅來談談可以說是擺綫的前期歷史，就是古代哲人們的一些值得注意的研究；我們可以看到，这些研究是对擺綫很有關係的．

偉大的古代哲学家、"邏輯学之父"、斯塔吉尔人亞里士多