面向21世纪本科生教材

有限元分析基础

傅永华

全国优秀出版社
武汉大学出版社

面向21世纪本科生教材

有限元分析基础

傅永华

武汉大学出版社
全国优秀出版社

内 容 提 要

作为有限单元法的基础读物，本书系统地阐述了有限单元法的基本理论，介绍了各种弹性力学问题的有限元分析方法。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者，在第二章对有限单元法中涉及的弹性力学基本知识作了简要介绍。为了增强本书的实用性，最后用三章的篇幅介绍有限元分析中的一些特殊问题、结构分析的程序设计与大型工程有限元通用软件等相关知识。

本书可作为土木、水利、机械等工科专业本科生的教材，也可作为上述专业工程技术人员与教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限元分析基础/傅永华. —武汉：武汉大学出版社，2003.8
面向21世纪本科生教材
ISBN 7-307-03966-4

Ⅰ.有… Ⅱ.傅… Ⅲ.有限元分析 Ⅳ.O242.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第059437号

责任编辑：夏炽元　　责任校对：王　建　　版式设计：支　笛

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉理工大印刷厂
开本：787×1092　1/16　　印张：12.875　　字数：292千字
版次：2003年8月第1版　　2003年8月第1次印刷
ISBN 7-307-03966-4/O·281　　定价：19.00元

前　　言

有限单元法是当前工程技术领域中最常用最有效的数值计算方法，首先在结构分析，而后又在其他领域中得到广泛应用，已成为现代工程设计技术不可或缺的重要组成部分。

本书是为土木、水利、机械等工科专业本科生学习有限单元法而编写的教材。编者多年从事本科生与研究生有限单元法课程的教学工作，编写时力求深入浅出、概念清晰、思路简明、系统性强。本书依次介绍了平面问题、轴对称问题、空间问题、杆梁问题以及板壳问题的有限单元法。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者，在第二章对有限单元法中涉及的弹性力学基本知识作了简要介绍。对于当前有限元通用软件中使用最多的等参数单元，在第五章有较详细的阐述。第八章介绍热传导问题的有限单元法。为了增强本书的实用性，最后用三章的篇幅介绍了有限元分析中的一些特殊问题、结构分析程序设计以及大型工程有限元通用软件的相关知识。

根据教学实践，讲述本书约需 60 学时。

本书承武汉大学土木建筑工程学院院长朱以文教授百忙之中拨冗详加审阅，提出了许多建设性的宝贵意见，谨深表谢忱。石敦敦硕士用 Auto CAD 软件为本书精心绘制插图，也在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中缺点、错误在所难免，恳切期望读者批评指正。

编　　者

2003 年 3 月

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 有限单元法的发展

许多工程分析问题，如固体力学中的位移场和应力场分析、电磁学中的电磁场分析、振动特性分析、传热学中的温度场分析、流体力学中的流场分析等，都可归结为在给定边界条件下求解其控制方程(常微分方程或偏微分方程)的问题，但能用解析方法求出精确解的只是方程性质比较简单，且几何边界相当规则的少数问题. 对于大多数的工程技术问题，由于物体的几何形状较复杂或者问题的某些非线性特征，很少能得到解析解. 这类问题的解决通常有两种途径：一是引入简化假设，将方程和边界条件简化为能够处理的问题，从而得到它在简化状态的解. 这种方法只在有限的情况下是可行的，因为过多的简化可能导致不正确的甚至错误的解. 因此，人们在广泛吸收现代数学、力学理论的基础上，借助于现代科学技术的产物——计算机来获得满足工程要求的数值解，这就是数值模拟技术，数值模拟技术是现代工程学形成和发展的重要推动力之一.

目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有：有限单元法、边界元法、离散单元法和有限差分法，但就其实用性和应用的广泛性而言，主要还是有限单元法. 作为一种离散化的数值解法，有限单元法首先在结构分析，然后又在其他领域中得到广泛应用.

离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代. 1941 年 A. Hrennikoff 首次提出用构架方法求解弹性力学问题，当时称为离散元素法，仅限于用杆系结构来构造离散模型. 如果原结构是杆系，这种方法是精确方法，发展到现在就是大家熟知的结构分析的矩阵方法. 究其实质这还不能说就是有限单元法的思想. 1943 年 R. Courant 在求解扭转问题时为了表征翘曲函数而将截面分成若干三角形区域，在各三角形区域设定一个线性的翘曲函数. 这是对里兹法的推广，实质上就是有限单元法的基本思想，这一思想真正用于工程中是在电子计算机出现后.

20 世纪 50 年代因航空工业的需要，美国波音公司的专家首次采用三结点三角形单元，将矩阵位移法用到平面问题上. 同时，联邦德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论文，为这一方法的理论基础作出了杰出贡献. 1960 年美国的 R. W. Clough 教授在一篇题为"平面应力分析的有限单元法"的论文中首先使用有限单元法(the Finite Element Method)一词，此后这一名称得到广泛承认.

20 世纪 60 年代有限单元法发展迅速，除力学界外，许多数学家也参与了这一工作，奠定了有限单元法的理论基础，搞清了有限单元法与变分法之间的关系，发展了各种各样的单元模式，扩大了有限单元法的应用范围.

20世纪70年代以来，有限单元法进一步得到蓬勃发展，其应用范围扩展到所有工程领域，成为连续介质问题数值解法中最活跃的分支.由变分法有限元扩展到加权残数法与能量平衡法有限元，由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定性问题、动力问题和波动问题，由线性问题扩展到非线性问题，分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等，由结构分析扩展到结构优化乃至于设计自动化，从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域.有限单元法的工程应用如表1-1所示.

表1-1 有限单元法的工程应用

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
结构工程学、结构力学和宇航工程学	梁、板、壳结构的分析 复杂或混杂结构的分析 二维与三维应力分析	结构的稳定性 结构的固有频率和振型 线性粘弹性阻尼	应力波的传播 结构对于非周期载荷的动态响应 耦合热弹性力学与热粘弹性力学
土力学、基础工程学和岩石力学	二维与三维应力分析 填筑和开挖问题 边坡稳定性问题 土壤与结构的相互作用 坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的分析 流体在土壤和岩石中的稳态渗流	土壤—结构组合物的固有频率和振型	土壤与岩石中的非定常渗流 在可变形多孔介质中的流动—固结 应力波在土壤和岩石中的传播 土壤与结构的动态相互作用
热传导	固体和流体中的稳态温度分布		固体和流体中的瞬态热流
流体动力学、水利工程学和水源学	流体的势流 流体的粘性流动 蓄水层和多孔介质中的定常渗流 水工结构和大坝分析	湖泊和港湾的波动(固有频率和振型) 刚性或柔性容器中流体的晃动	河口的盐度和污染研究(扩展问题) 沉积物的推移 流体的非定常流动 波的传播 多孔介质和蓄水层中的非定常渗流
核工程	反应堆安全壳结构的分析 反应堆和反应堆安全壳结构稳态温度分布		反应堆安全壳结构的动态分析 反应堆结构的热粘弹性分析 反应堆和反应堆安全壳结构中的非稳态温度分布
电磁学	二维和三维静态电磁场分析		二维和三维时变、高频电磁场分析

数值模拟技术通过计算机程序在工程中得到广泛的应用.到20世纪80年代初期，国际上较大型的面向工程的有限元通用程序达到几百种，其中著名的有：ANSYS，NASTRAN，ABAQUS，ASKA，ADINA，SAP与COSMOS等.它们多采用FORTRAN语言编写，规模达几万条甚至几十万条语句，其功能越来越完善，不仅包含多种条件下的有限元分析程序，而且带有功能强大的前处理和后处理程序.由于有限元通用程序使用方便、计算精度高，其

计算结果已成为各类工业产品设计和性能分析的可靠依据.大型通用有限元分析软件不断吸取计算方法和计算机技术的最新进展,将有限元分析、计算机图形学和优化技术相结合,已成为解决现代工程学问题必不可少的有力工具.

§1-2 有限单元法的特点

在实际工作中,人们发现,一方面许多力学问题无法求得解析解答,另一方面许多工程问题也只需要给出数值解答,于是,数值解法便应运而生.

力学中的数值解法有两大类型.其一是对微分方程边值问题直接进行近似数值计算,这一类型的代表是有限差分法;其二是在与微分方程边值问题等价的泛函变分形式上进行数值计算,这一类型的代表是有限单元法.

有限差分法的前提条件是建立问题的基本微分方程,然后将微分方程化为差分方程(代数方程)求解,这是一种数学上的近似.有限差分法能处理一些物理机理相当复杂而形状比较规则的问题,但对于几何形状不规则或者材料不均匀情况以及复杂边界条件,应用有限差分法就显得非常困难,因而有限差分法有很大的局限性.

有限单元法的基本思想是里兹法加分片近似.将原结构划分为许多小块(单元),用这些离散单元的集合体代替原结构,用近似函数表示单元内的真实场变量,从而给出离散模型的数值解.由于是分片近似,可采用较简单的函数作为近似函数,有较好的灵活性、适应性与通用性.当然有限单元法也有其局限性,如对于应力集中、裂缝体分析与无限域问题等的分析都存在缺陷.为此,人们又提出一些半解析方法如有限条带法与边界元法等.

在结构分析中,从选择基本未知量的角度来看,有限单元法可分为三类:位移法、力法与混合法.其中位移法易于实现计算自动化(力法的单元插值函数也难以寻求),在有限单元法中应用范围最广.

依据单元刚度矩阵的推导方法可将有限单元法的推理途径分为直接法、变分法、加权残数法与能量平衡法.

直接法直接进行物理推理,物理概念清楚,易于理解,但只能用于研究较简单单元的特性.

变分法是有限单元法的主要理论基础之一,涉及泛函极值问题,既适用于形状简单的单元,也适用于形状复杂的单元,使有限单元法的应用扩展到类型更为广泛的工程问题.当给定的问题存在经典变分叙述时,这是最方便的方法.当给定问题的经典变分原理不知道时,须采用更为一般的方法,如加权残数法或能量平衡法来推导单元刚度矩阵.

加权残数法由问题的基本微分方程出发而不依赖于泛函.可处理已知基本微分方程却找不到泛函的问题,如流固耦合问题,从而进一步扩大了有限单元法的应用范围.

§1-3 有限单元法分析过程概述

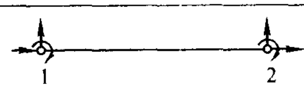
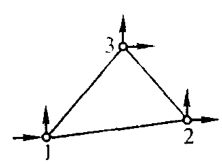
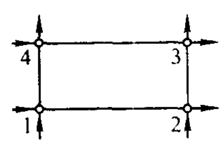
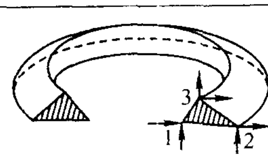
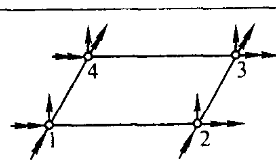
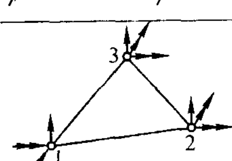
1. 结构离散化

结构离散化就是将结构分成有限个小的单元体，单元与单元、单元与边界之间通过结点连接. 结构的离散化是有限单元法分析的第一步，关系到计算精度与计算效率，是有限单元法的基础步骤，包含以下两个方面的内容：

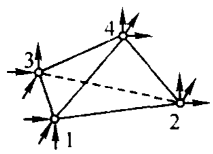
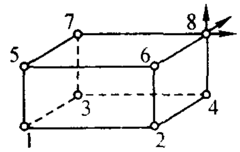
（1）单元类型选择

离散化首先要选定单元类型，这包括单元形状、单元结点数与结点自由度数等三个方面的内容. 基本的单元类型见表 1-2.

表 1-2 典型单元

单元类型				结点数	结点自由度	典型应用
一维单元	杆			2	1	桁架
一维单元	梁			2	3	平面刚架
二维单元	平面问题	三角形		3	2	平面应用
二维单元	平面问题	四边形		4	2	平面应用
二维单元	轴对称问题	三角形		3	2	轴对称体
二维单元	板弯曲问题	四边形		4	3	薄板弯曲
二维单元	板弯曲问题	三角形		3	3	薄板弯曲

续表

单元类型			结点数	结点自由度	典型应用
三维单元	四面体		4	3	空间问题
	六面体		8	3	空间问题

(2) 单元划分

划分单元时应注意以下几点：

(i) 网格的加密

网格划分越细，结点越多，计算结果越精确. 对边界曲折处、应力变化大的区域应加密网格，集中载荷作用点、分布载荷突变点以及约束支承点均应布置结点，同时要兼顾机时、费用与效果. 网格加密到一定程度后计算精度的提高就不明显，对应力应变变化平缓的区域不必要细分网格.

(ii) 单元形态应尽可能接近相应的正多边形或正多面体. 如三角形单元三边应尽量接近，且不出现钝角，如图 1-1 所示；矩阵单元长宽不宜相差过大等，如图 1-2 所示.

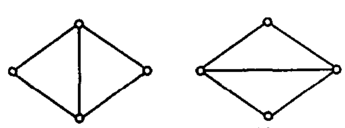


图 1-1

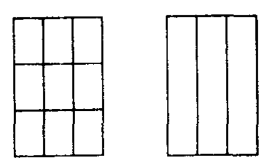


图 1-2

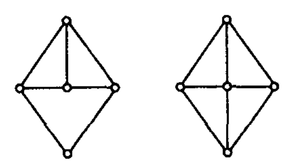


图 1-3

(iii) 单元结点应与相邻单元结点相连接，不能置于相邻单元边界上，如图 1-3 所示.

(iv) 同一单元由同一种材料构成.

(v) 网格划分应尽可能有规律，以利于计算机自动生成网格.

(3) 结点编码：整体结点编码和单元结点编码.

2. 单元分析

单元分析有两个方面的内容：

(1) 选择位移函数

位移法分析结构首先要求解的是位移场. 要在整个结构建立位移的统一数学表达式往往是困难的甚至是不可能的. 结构离散化成单元的集合体后，对于单个的单元，可以遵循某些基本准则，用较之以整体为对象时简单得多的方法设定一个简单的函数为位移的近似函数，称为位移函数. 位移函数一般取为多项式形式，有广义坐标法与插值法两种设定途径，殊

途同归，最终都整理为单元结点位移的插值函数.

(2) 分析单元的力学特征

(i) 单元应变矩阵$[B]$

单元应变矩阵反映出单元结点位移与单元应变之间的转换关系，由几何学条件导出.

(ii) 单元应力矩阵$[S]$

单元应力矩阵反映出单元结点位移与单元应力之间的转换关系，由物理学条件导出.

(iii) 单元刚度矩阵$[K]^e$

单元刚度矩阵反映出单元结点位移$\{\delta\}^e$与单元结点力$\{F\}^e$之间的转换关系，由平衡条件导出，所得到的转换关系式称为单元刚度方程

$$[K]^e[\delta]^e=\{F\}^e$$

3. 整体分析

整体分析包括以下几方面内容：

(1) 集成整体结点载荷向量$\{R\}$

结构离散化后，单元之间通过结点传递力，所以有限单元法在结构分析中只采用结点载荷. 所有作用在单元上的集中力、体积力与表面力都必须静力等效地移置到结点上去，形成等效结点载荷. 最后，将所有结点载荷按照整体结点编码顺序组集成整体结点载荷向量.

(2) 集成整体刚度方程$[K]$

集合所有的单元刚度方程就得到总体刚度方程

$$[K]\{\delta\}=\{R\}$$

式中：$[K]$称为总体刚度矩阵，直接由单元刚度矩阵组集得到；$\{\delta\}$为整体结点位移向量；$\{R\}$为整体结点载荷向量.

(3) 引进边界约束条件，解总体刚度方程求出结点位移分量(位移法有限元分析的基本未知量).

第二章　弹性力学基本方程与变分原理

§2-1　关于外力、应力、形变与位移的定义

1. 外力

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力.

体力指分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力. 物体内各点受体力的情况，一般是不相同的. 用体力集度矢量表明该物体在某一点所受体力的大小和方向. 该矢量在坐标轴 x、y、z 上的投影记为 X、Y、Z，称为体力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负. 它们的因次是[力][长度]$^{-3}$.

面力指分布在物体表面上的力，例如流体压力和接触力. 物体在其表面上各点受面力的情况，一般也是不相同的. 用面力集度矢量表明该物体在其表面上某一点所受面力的大小和方向. 该矢量在坐标轴 x、y、z 上的投影记为 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$，称为面力分量，同样以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负. 它们的因次是[力][长度]$^{-2}$.

有限单元法分析中也使用集中力这一概念，其正负号规定同上.

2. 应力

物体受了外力的作用，或由于温度有所改变，其内部将发生内力. 为了研究物体在其某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撇开，如图 2-1 所示. 撇开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力. 取这一截面的一小部分，它包含着 P 点，而它的面积为 ΔA. 设作用于 ΔA 上的内力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$，则内力的平均集度，即平均应力为 $\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A}$. 现在，命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力为连续分布，则 $\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A}$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{S}$，即

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A} = \boldsymbol{S}$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{S}$ 就是物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力.

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不会使用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量和物体的形变或材料强度都没有直接的关系. 与物体的形变及材料强度直

接相关的，是应力在作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力 σ 和剪应力 τ，如图 2-1 所示. 应力及其分量的因次也是[力][长度]$^{-2}$.

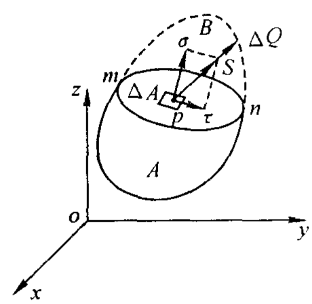


图 2-1

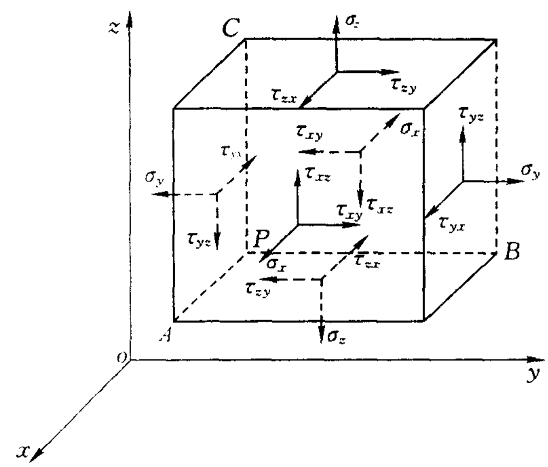


图 2-2

显然，在物体内的同一点 P，不同截面上的应力是不同的. 为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA = \mathrm{d}x$、$PB = \mathrm{d}y$、$PC = \mathrm{d}z$，如图 2-2 所示. 将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行. 正应力用 σ 表示. 为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码. 例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的. 剪应力用 τ 表示，并加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴. 例如，剪应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的.

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负. 相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负. 图上所示的应力分量全部都是正的. 注意，虽然上述正负号规定，对于正应力来说，结果是和材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），但是，对于剪应力来说，结果却和材料力学中的规定不完全相同. 按照这里的符号规则，剪应力互等定理表达为

$$\tau_{yz} = \tau_{zy},\ \tau_{zx} = \tau_{xz},\ \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

在物体的任意一点，如果已知 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力. 因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态.

3. 形变

所谓形变，就是形状的改变. 物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示. 因此，物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变.

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x、y、z 的正方向取三个

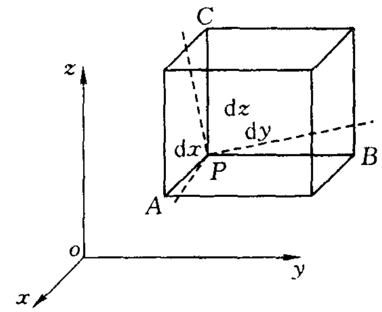


图 2-3

微小的线段 PA、PB、PC，如图 2-3 所示. 物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变. 各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为正应变. 各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为剪应变. 正应变用字母 ε 表示：ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变，其余类推. 正应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应. 剪应变用字母 γ 表示：γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段（即 PB 与 PC）之间的直角的改变，其余类推. 剪应变以直角变小时为正，变大时为负，与剪应力的正负号规定相适应. 正应变和剪应变都是无因次的数量.

在物体的任意一点，如果已知 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy} 这六个应变分量，就可以求得经过该点的任一线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变. 因此，这六个应变分量，可以完全确定该点的形变状态.

4. 位移

将物体内任意一点的位移用它在 x、y、z 坐标轴上的投影 u、v、w 来表示，称为该点的位移分量. 以沿坐标轴正方向的为正，沿坐标轴负方向的为负.

§2-2 弹性力学的基本方程与求解

严格地说，弹性力学问题都是所谓空间问题，即弹性体占有三维空间，在外界因素作用下产生的应力、应变与位移也是三维的，而且一般都是三个坐标的函数.

弹性力学分析问题从静力学条件、几何学条件与物理学条件三方面考虑，分别得到平衡微分方程、几何方程与物理方程，统称为弹性力学的基本方程.

1. 平衡微分方程

在物体内的任意一点 P，割取一个微小的平行六面体，它的六面垂直于坐标轴，而棱边

的长度为 $PA = \mathrm{d}x, PB = \mathrm{d}y, PC = \mathrm{d}z$，受力如图 2-4 所示.

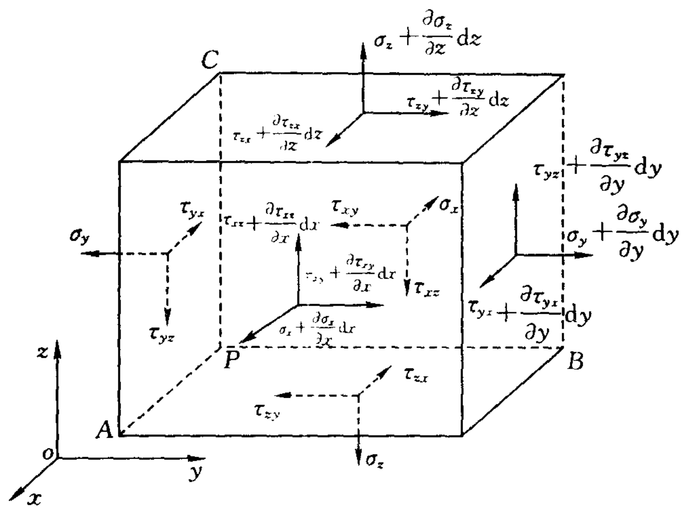


图 2-4

三个力矩平衡方程只是再次证明剪应力的互等关系. 由三个投影的平衡方程则不难得到空间问题的三个平衡微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{cases} \tag{2-1}$$

2. 几何方程

经过弹性体内任意一点 P，沿坐标轴方向取微分长度 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 分析应变与位移之间的关系. 由应变的定义可知应分别沿三个坐标面方向分析. 如沿 xy 坐标面，记 $PA = \mathrm{d}x$ 和 $PB = \mathrm{d}y$（图 2-5）. 假定弹性体受力以后，P、A、B 三点分别移动到 P'、A'、B'，其中 P、A、B 三点的位移标注如图所示.

不计高阶微量，线段 PA 的正应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\left(u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{a}$$

同样，线段 PB 的正应变为

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{b}$$