五位對數表

五 位 對 數 表

蘇聯 В. Н. Шишкин 主編 吳什奎
人民教育出版社編譯

五位對數表

主　編：塞　斯　肯
編譯者：數　[illegible]　室
出版者：人民教育出版社
（營業許可證出字第二號）

發行者：新　華　書　店

印刷者：（見正文最後頁）

書號：參2010　　1952年2月原版
2,701—12,700　　1954年3月北京第二次印刷
定價6,900元

目　　錄

I. 對數的性質和各表的用法

對數的性質

1. 對數的意義 設 a、x 和 y 是任意的三個數而它們有這樣的關係

$$a^x=y,$$

我們就叫 a 做底數，叫 x 做方指數．這個關係便是 a 的 x 乘方等於 y．它所表示的是知道了 a 和 x 求 y．例如：

$$a=2,\quad x=3,\qquad 則\quad y=a^x=2^3=8;$$

$$a=8,\quad x=\frac{1}{3},\qquad 則\quad y=a^x=8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2;$$

$$a=64,\quad x=\frac{5}{6},\qquad 則\quad y=a^x=64^{\frac{5}{6}}=(\sqrt[6]{64})^5=32.$$

但若知道的是 a 和 y 要求 x，換句話說，我們問 a 的什麽乘方是 y，或 y 是 a 的多少乘方；即如 2 的什麽乘方是 8，8 的什麽乘方是 2，或 64 的什麽乘方是 32；這就是乘方法的一種逆運算．對於這種運算，我們說 x 是 a 作底數的 y 的對數，y 叫做眞數．a、x 和 y 的關係我們寫成

$$\log_a y=x.$$

［例］

$$\because\quad 2^3=8,\qquad \therefore\quad \log_2 8=3;$$

$$8^{\frac{1}{3}}=2,\qquad \log_8 2=\frac{1}{3};$$

$$64^{\frac{5}{6}}=32,\qquad \log_{64}32=\frac{5}{6};$$

$$10^{-1}=0.1,\qquad \log_{10}0.1=-1;$$

$$10^{-2}=0.01,\qquad \log_{10}0.01=-2.$$

在這裏應當注意：

（1） 用作底數的 a，一般地限於大於 $+1$ 的數．

（2） 因爲任何一個正數的任何乘方都是正的，所以 y 總是正的．也就是說，只有正數可以求它的對數．

（3） 在初等數學中我們只是學習運用對數來計算許多問題而不討論怎樣求出一個數的對數．

2. 對數的分類 通常我們使用的對數有兩種：

（1） 用 10 作底數的叫做常用對數．它的符號是 $\log_{10} N$，但我們總把底數 10 略了去，記成 $\log N$ 或 $\lg N$．

（2） 用 e 作底數的叫做自然對數或納伯爾對數．它的符號是 $\log_e N$，但我

們也常把底數 e 略了去，記成 $\ln N$. e 是一個常數，代表下面的級數的和，它是一個無理數.

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=2.7182818284\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

3. **關於對數的幾個定理** 由對數的意義我們可以得出下面的定理，這些定理同着用什麼數做底數都沒有關係.

定理 1. 一個數 a 關於自己作底數的對數等於 1；即

$$\log_a a=1.$$

$\because$ $$a=a,$$

$\therefore$ $$\log_a a=1.$$

定理 2. 兩個數 N_1 和 N_2 的積 $N_1\cdot N_2$ 的對數等於它們的對數的和；即

$$\log_a(N_1\cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2.$$

設 $$\log_a N_1=x \quad 和 \quad \log_a N_2=y,$$

則 $$N_1=a^x \quad 和 \quad N_2=a^y.$$

$\therefore$ $$N_1\cdot N_2=a^x\cdot a^y=a^{x+y}.$$

$\therefore$ $$\log_a(N_1\cdot N_2)=x+y.$$

即 $$\log_a(N_1\cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2.$$

自然，這個定理可以推到一般去，

$$\log_a(N_1\cdot N_2\cdot N_3\cdots\cdots N_n)=\log_a N_1+\log_a N_2+\log_a N_3+\cdots\cdots+\log_a N_n.$$

定理 3. 兩個數 N_1 和 N_2 的商 $\frac{N_1}{N_2}$ 的對數等於被除數的對數減去除數的對數；即

$$\log_a\frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2.$$

設 $$\log_a N_1=x \quad 和 \quad \log_a N_2=y,$$

則 $$N_1=a^x \quad 和 \quad N_2=a^y.$$

$\therefore$ $$\frac{N_1}{N_2}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}.$$

$\therefore$ $$\log_a\frac{N_1}{N_2}=x-y.$$

即 $$\log_a\frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2.$$

定理 4. 一個數 N 的 m 乘方的對數等於這個數的對數和方指數 m 的積；即

$$\log_a N^m=m\log_a N.$$

設 $$\log_a N=x,$$

則 $$N=a^x.$$

$\therefore$ $$N^m=(a^x)^m=a^{mx}.$$

$\therefore$ $$\log_a N^m=mx.$$

即 $$\log_a N^m=m\log_a N.$$

定理 5. 一個數 N 的 m 次根的對數等於這個數的對數除以根指數 m;即

$$\log_a N^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}\log_a N.$$

設 $$\log_a N=x,$$

則 $$N=a^x.$$

$\therefore$ $$N^{\frac{1}{m}}=(a^x)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m}\cdot x}.$$

$\therefore$ $$\log_a N^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}\cdot x.$$

即 $$\log_a N^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}\log_a N.$$

定理 6. 兩個數 a 和 b 互作底數的對數 $\log_a b$ 和 $\log_b a$ 互爲倒數;即

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a} \quad 和 \quad \log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

或 $$\log_a b\cdot\log_b a=1.$$

設 $$\log_b a=x,$$

則 $$a=b^x.$$

$\therefore$ $$b=a^{\frac{1}{x}}.$$

$\therefore$ $$\log_a b=\log_a a^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a a=\frac{1}{x}.$$

即 $$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

和 $$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

或 $$\log_a b\cdot\log_b a=1.$$

定理 7. 一個數 N 關於不同的兩個數 a 和 b 作底數的對數 $\log_a N$ 和 $\log_b N$ 的關係是,

$$\log_b N=\frac{1}{\log_a b}\cdot\log_a N.$$

設 $$\log_a N=x,$$

則 $$N=a^x.$$

$\therefore$ $$\log_b N=\log_b a^x=x\log_b a.$$

但 $$\log_b a=\frac{1}{\log\ b}.$$

$\therefore$ $$\log_b N=\frac{1}{\log_a b}\cdot x.$$

即 $$\log_b N=\frac{1}{\log_a b}\cdot\log_a N.$$

4. 常用對數的性質 常用對數是用 10 作底數的,現在我們來看 10 的整數乘方的常用對數.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \because\ 10^0=1, & \therefore & \log 1=0; \\
& 10^1=10, & & \log 10=1; \\
& 10^2=100, & & \log 100=2; \\
& 10^3=1{,}000, & & \log 1{,}000=3; \\
& \cdots\cdots & & \\
& 10^n=\underbrace{100\cdots\cdots0}_{n\text{個}0} & & \log 10^n=n.\ (n\text{是正整數.})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{又} & 10^{-1}=0.1, & \therefore & \log 0.1=-1; \\
& 10^{-2}=0.01, & & \log 0.01=-2; \\
& 10^{-3}=0.001, & & \log 0.001=-3; \\
& \cdots\cdots. & &
\end{array}
$$

這就是說, 10 的整數乘方的常用對數都是整數.

$$
\begin{array}{llll}
(2) & \because\ 5234=1000\times5.234, & \therefore & \log 5234=\log 1000+\log 5.234 \\
& & & \qquad =3+\log 5.234; \\
& 523.4=100\times5.234, & & \log 523.4=2+\log 5.234; \\
& 52.34=10\times5.234, & & \log 52.34=1+\log 5.234; \\
& 0.5234=0.1\times5.234, & & \log 0.5234=-1+\log 5.234; \\
& 0.05234=0.01\times5.234, & & \log 0.05234=-2+\log 5.234; \\
& \cdots\cdots. & &
\end{array}
$$

由對數的意義我們還可以知道: 若底數大於 $+1$, 對於同一底數, 對數是隨着眞數變的; 眞數加大和減小, 它的對數也相應地加大和減小.

因爲 $1<5.234<10,$

所以 $\log 1<\log 5.234<\log 10.$

即 $0<\log 5.234<1.$

這就是說, 5.234 的對數在 0 和 1 中間, 它是一個純小數, 由五位對數表上查出來是 0.71883.

因此

$$
\begin{aligned}
\log 5234 &= 3+0.71883, \\
\log 523.4 &= 2+0.71883, \\
\log 52.34 &= 1+0.71883, \\
\log 5.234 &= 0+0.71883, \\
\log 0.5234 &= -1+0.71883, \\
\log 0.05234 &= -2+0.71883, \\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

由此可知, 一個數的常用對數含有整數和小數兩部分, 常用對數的整數部分叫做對數的指標, 小數部分叫做對數的假數.

並且由 (1) 我們可以看出來:

一個含有整數的數的常用對數的指標總是正的，可由這個數的整數位數來決定．若它所含的整數有 n 位，則它的常用對數的指標便是 $+(n-1)$．

一個純小數的常用對數的指標總是負的，可由這個數的第一個有效數字所在的小數位來決定．若它的第一個有效數字在小數的第 m 位，則它的常用對數的指標就是 $-m$．

至於常用對數的假數總是正的小數，可以由眞數所含的數字列（純小數從第一個有效數字起）在對數表中查出來．即如 5234、523.4、52.34、0.5234 和 0.05234 的數字列同是 5—2—3—4，它們的常用對數的假數都是 0.71883.

因了常用對數的指標有正有負而假數總是正的，我們將正指標的正號略去，負指標的負號記在指標的頂上，把指標同着假數連寫成一個數的形式．例如

$$\log 5234 = 3.71883, \qquad \log 523.4 = 2.71883,$$

$$\log 52.34 = 1.71883, \qquad \log 5.234 = 0.71883,$$

$$\log 0.5234 = \bar{1}.71883, \qquad \log 0.05234 = \bar{2}.71883.$$

第 一 表

常用對數表（19—37 頁）

這個表包含從 1 到 9999 各個數的對數的五位假數，小數點是略了去的．它的構造是這樣：

(1) 第一頁（19 頁）是從眞數 1 到 99 的對數的假數．

(2) 從第二頁（20 頁）起，第一行是眞數的前三位（從 100 到 999）．頂上和脚下的一排是眞數的第四位（從 0 到 9）．

(3) 記有 *C. T. P.* 的這一行的數是表中相鄰兩個假數的差，（注意，這是有例外的．）叫做表差．

(4) 最末一行頂上記有 *P. P.* 的是比例部分．黑體字的數是表差．表差下面，左邊的第一行是眞數．

(5) 每頁表脚所附的表是從 0″ 到 9900″ 的一些角的正弦和正切的對數．

現在我們舉例來說明這個表的用法．

(1) **由眞數求對數**　先定指標，後由表中查假數．

［**例 1**］　求 log 72.

因爲 72 有兩位整數，所以它的對數的指標是 1.

在表的第一頁（19 頁）和眞數 (N) 72 同排的假數是 85733.

$$\therefore \qquad \log 72 = 1.85733.$$

［**例 2**］　求 log 5.47.

因爲 5.47 有一位整數，所以它的對數的指標是 0.

在表中（28 頁）眞數 547 這一排，頂上記有 0 的一行的假數是 73799.

$$\therefore \qquad \log 5.47 = 0.73799.$$

［例 3］　　求 $\log 0.03809$.

因爲 0.03809 的第一個有效數字 (3) 在小數第二位，所以它的對數的指標是 -2.

在表中 (25 頁) 眞數 380 這一排，頂上記有 9 的一行的假數是 58081.

$$\therefore \qquad \log 0.03809 = \bar{2}.58081.$$

（注意） 表中的各個假數除第一行的少數幾個以外都只有末三位，前兩位同着它們前面的假數的相同. 但末三位假數前面記有「·」號的，是同着它們後面的假數的相同.

［例 4］　　求 $\log 527.687$.

因爲 527.687 有三位整數，所以它的對數的指標是 2.

在表中 (28 頁) 只能查到眞數 5276 的對數的假數是 72230. 它同着下一個假數 72239 的差是 9. (注意這一排的表差是 8, 這一個是例外.) 在比例部分表差 9 這一行，眞數 8 同排的假數是 7.2, 7 的是 6.3. 又 527687 中的 8 是在 6 的下一位，7 是在 6 的下二位. 我們演算如下:

$$\begin{array}{rlcl}
 & \text{眞　數} & & \text{假　數} \\
 & 5276 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 72230 \\
 & \quad 0.8 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \quad 7.2 \qquad \text{表差: } 9. \\
+) & \quad 0.07 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \quad 0.63 \\
\hline
\therefore & \log 527.687 = 2.72238. & &
\end{array}$$

(2) **由對數求眞數**　先由對數的假數查眞數的數字列，後由對數的指標定眞數的整數位數或小數點的位置.

［例 1］　　已知 $\log x = 2.70295$ 求 x.

在表中 (28 頁) 和假數 70295 同排的眞數是 504, 同行的是 6, 即眞數的數字列是 5046.

對數的指標是 2, 眞數應當有三位整數.

$$\therefore \qquad x = 504.6.$$

［例 2］　　已知 $\log x = \bar{3}.58058$ 求 x.

在表中 (25 頁) 和假數 58058 同排的眞數是 380, 同行的是 7, 即眞數的數字列是 3807.

對數的指標是 -3, 眞數的第一個有效數字應當在小數第三位.

$$\therefore \qquad x = 0.003807.$$

［例 3］　　已知 $\log x = 3.46142$ 求 x.

在表中 (23 頁) 假數沒有恰好是 46142 的，和它最相近的是 46135. 在這一排的表差是 15. 46142 比 46135 大 7, 在比例部分表差 15 這一行中假數恰好是 7 的也沒有，和它最相近的是 6, 同排的眞數是 4. 7 比 6 大 1, 對於下一位說就是 10, 在比例部分表差 15 這一行中假數和它最相近的是 10.5, 同排的眞數是 7.

對數的指標是 3, 眞數應當有四位整數.

對數		眞數	
$\log x = 3.46142$			表差：15.
$-$ 135	…………	2893	
7			
$-$ 6	…………	4	
10			
10.5	…………	7	
∴		$x = 2893.47$.	

第二表

常數和它們的對數表（38頁）

這個表所載的是數學上的一些常數的近似值以及它們的常用對數.

第三表

三角函數對數表（39—84頁）

這個表包含從 0° 到 90° 每差 1 分的各個角的四種三角函數正弦、餘弦、正切和餘切的對數. 它的構造是這樣:

（1）角的度數記在每頁的表外，左上角順着從 0° 到 44°，右下角倒轉來從 45° 到 89°.

（2）除開表的右邊比例部分（性質和常用對數表的相同），表的左右兩邊的第一行是角的分數從 0′ 到 60′，左邊由上而下，右邊由下而上.

（3）函數的順序是正弦（sin）、正切（tg）、餘切（ctg）和餘弦（cos），頂上一排由左而右，底下一排由右而左. 角度在左邊的，函數的名稱在頂上；角度在右邊的，函數的名稱在底下.

（4）表中記有函數名稱的各行的數就是各函數的對數. 因爲大部分的三角函數都小於 1，它們的常用對數的指標都是負的，這個表裏除頂上記有 ctg 的一行外，都加上了 10 使指標都變成正的.

（5）表中記有 *d.* 的一行是它的左邊一行的表差；記有 *d. c.* 的一行是它的左右兩行公用的表差.

（6）從 0° 到 3° 的表中比例部分是空着的. 因爲小於 3° 的角的函數變化很大，須用第一表脚下所附的表計算.

現在我們舉例來說明這個表的用法.

（1）由角求它的函數的對數

［**例 1**］　求 $\log \sin 25°\,12'$.

在表中 25° 的一頁（65頁）查左邊第一行得 12′，和它同排頂上記有 sin 一行的數是 9.62918.

即　$\log \sin 25°\,12' = 9.62918 - 10 = \bar{1}.62918.$

[**例 2**]　求 $\log \cot 72^\circ 48'$.

在表中 72° 的一頁 (57 頁) 查右邊第一行得 48′, 和它同排底下記有 ctg 一行的數是 9.49073.

即　　　$\log \cot 72^\circ 48' = 9.49073 - 10 = \bar{1}.49073.$

[**例 3**]　求 $\log \tan 52^\circ 13' 48''$.

在表中 52° 的一頁 (77 頁) 查右邊第一行得 13′, 和它同排底下記有 tg 一行的數是 0.11058. 這裏的表差是 26. 在比例部分表差 26 的一行同着 4″ 和 8″ 同排的假數分別是 1.73 和 3.47. 我們演算如下:

$$\begin{array}{rl} & \log \tan 52^\circ 13' = 0.11058 \\ & \underline{\qquad\qquad +48'' \cdots\cdots +21} \\ \therefore & \log \tan 52^\circ 13' 48'' = 0.11079. \end{array} \qquad 表差: 26\left\{\begin{array}{l} 40'' \cdots\cdots 17.3 \\ \underline{\ 8'' \cdots\cdots\ 3.47} \\ 48'' \cdots\cdots 20.77. \end{array}\right.$$

[**例 4**]　求 $\log \cos 72^\circ 52' 29''$.

$$\begin{array}{rl} & \log \cos 72^\circ 52' = \bar{1}.46923 \\ & \underline{\qquad\qquad +29'' \cdots\cdots -20} \\ \therefore & \log \cos 72^\circ 52' 29'' = \bar{1}.46903. \end{array} \qquad 表差: 41\left\{\begin{array}{l} 20'' \cdots\cdots 13.7 \\ \underline{\ 9'' \cdots\cdots\ 6.15} \\ 29'' \cdots\cdots 19.85. \end{array}\right.$$

(注意 1)　在 0° 和 90° 中間, 正弦和正切都跟着角的變大而變大, 所以例 3 要相加, 餘弦和餘切卻相反跟着角的變大而減小, 所以例 4 要相減.

(注意 2)　例 4 也可以照下面的方法計算:

$$72^\circ 52' 29'' = 72^\circ 53' - 31''.$$

$$\begin{array}{rl} & \log \cos 72^\circ 53' = \bar{1}.46882 \\ & \underline{\qquad\qquad -31'' \cdots\cdots +21} \\ \therefore & \log \cos 72^\circ 52' 29'' = \bar{1}.46903. \end{array} \qquad 表差: 41\left\{\begin{array}{l} 30'' \cdots\cdots 20.5 \\ \underline{\ 1'' \cdots\cdots\ 0.68} \\ 31'' \cdots\cdots 21.18. \end{array}\right.$$

(2) 由函數的對數求角

[**例 1**]　已知 $\log \tan x = \bar{1}.12813$ 求 x.

在表中 (47 頁) $\log \tan 7^\circ 39' = 9.12813 - 10 = \bar{1}.12813$,

$\therefore$　　　$x = 7^\circ 39'.$

[**例 2**]　已知 $\log \cos x = \bar{1}.43546$ 求 x.

在表中 (55 頁) $\log \cos 74^\circ 11' = 9.43546 - 10 = \bar{1}.43546$,

$\therefore$　　　$x = 74^\circ 11'.$

[**例 3**]　已知 $\log \sin x = \bar{1}.52767$ 求 x.

在表中 (59 頁) 正弦的對數沒有恰好是 $\bar{1}.52767 + 10$ 即 9.52767 的, 和它最相近的是 $\log \sin 19^\circ 41' = 9.52740 - 10 = \bar{1}.52740$. 我們由下面的運算就可以得出所求的數.

$$\begin{array}{rl} & \log \sin x = \bar{1}.52767 \\ - & \underline{\qquad\qquad 740 \cdots\cdots 19^\circ 41'} \qquad 表差: 35. \\ & \qquad\qquad 27 \\ & \qquad - \underline{23.3 \cdots\cdots 40''} \\ & \qquad\qquad 3.7 \\ & \qquad\qquad \underline{3.5 \cdots\cdots 6''} \\ \therefore & \qquad\qquad x = 19^\circ 41' 46''. \end{array}$$

［例 4］　已知 $\log\cot x=\bar{1}.22947$ 求 x.

在表中（49 頁）$\log\cot 80°\,23'=9.22901-10=\bar{1}.22901.$

$$
\begin{array}{rll}
\log\cot x=\bar{1}.22947 & & \\
-\underline{|\;\;901}\cdots\cdots 80°\,23' & & \text{表差: } 76. \\
46 & & \\
-\underline{|\;\;38}\cdots\cdots\cdots\cdots 30'' & & \\
8 & & \\
\underline{7.6\cdots\cdots\cdots\cdots 6''} & & \\
\therefore\quad x=80°\,23'-36'' & & \\
=80°\,22'\,24''. & &
\end{array}
$$

或　　$977\cdots\cdots 80°\,22'$　　表差: 76.

$$
\begin{array}{r}
\log\cot x=\bar{1}.22947 \\
-\underline{|\qquad\qquad} \\
30 \\
-\underline{|\;\;25.3}\cdots\cdots\cdots\cdots 20'' \\
4.7 \\
\underline{5.07\cdots\cdots\cdots\cdots 4''} \\
\therefore\quad x=80°\,22'+24'' \\
=80°\,22'\,24''.
\end{array}
$$

上面各例題中的角都是大於 3° 的. 若角小於 3° 則它的變化雖很小，它的正弦和正切的變化卻很大. 同樣地，近於 90° 的角的餘弦和餘切的變化也很大. 因此在第三表中不能恰好查出的小於 3° 的角，須用第一表脚下所附的表.

這個附表包含從 0″ 到 2°45′9900″ 一些角的正弦（S）和正切（T）的對數. 因爲這些對數的前四位都是 4.685（指標加上 10 的），所以每頁都只有第一個對數記得有它.

這個附表的用法是：由角求它的函數的對數的時候，若已知的角不能在第三表中找出來，就在這附表中（19—37 頁）查和它最相近的角的函數的對數；再將已知角的度數和分數都化成秒數而把所得的數目的常用對數加上去. 這個計算法對於正弦和正切都一樣.

［例 1］　求 $\log\sin 1°\,9'\,46''$.

在第一表的附表中（26 頁）和 $1°\,9'\,46''$ 最相近的角是 $1°\,10'$，它的正弦的對數是 $4.68554-10$.

又　　$1°\,9'\,46''=1°\,10'-14''=4200''-14''=4186''.$

和　　$\log 4186=3.62180.$

$$
\begin{array}{r}
\log 4186=3.62180 \\
+\underline{|\;\;1°\,10'\cdots\cdots 4.68554-10} \\
\therefore\quad \log 1°\,9'\,46''=8.30734-10 \\
=\bar{2}.30734.
\end{array}
$$

［例 2］　求 $\log\cot 89°\,53'\,23''.8$.

$$\because \qquad \cot 89°\,53'\,23''.8=\tan(90°-89°\,53'\,23''.8)$$
$$=\tan 6'\,36''.2$$
$$=\tan 396''.2.$$
$$\log 396.2=2.59791$$
$$+)\quad 390'' \quad \cdots\cdots 4.68558-10$$
$$\therefore \qquad \log\tan 6'\,36''.2=7.28349-10.$$
即 $$\log\cot 89°\,53'\,23''.8=7.28349-10$$
$$=\bar{3}.28349.$$

把上兩個例的計算法反過來，若已經知道一個小於 $3°$ 的角的正弦或正切的對數，或已經知道一個近於 $90°$ 的角的餘弦或餘切的對數，也就可以求出這個角.

[例 1] 已知 $\log\tan x=\bar{2}.41500$ 求 x.

在第三表中（41 頁）正切的對數和 $\bar{2}.41500+10$ 即 8.41500 相近的是 $1°\,29'$ 的 8.41321. 但在第一表的附表中（28 頁）和 $1°\,29'$ 相近的角是 $1°\,28'\,20''$. 並且
$$\log\tan 5300''=\log\tan 1°\,28'\,20''=4.68567-10.$$
$$\therefore \qquad \log x=8.41500-4.68567$$
$$=3.72933.$$
$$\therefore \qquad x=5362''=1°\,29'\,22''.$$

[例 2] 已知 $\log\cos x=\bar{3}.84579$ 求 x.

設 $y=90°-x$ 則 $\log\sin y=\log\cos x=\bar{3}.84579.$

在第三表中（40 頁）正弦的對數和 $\bar{3}.84579+10$（即 7.84579）相近的是 $0°24'$ 的 7.84393. 但在第一表的附表中（20 頁）和 $0°\,24'$ 相近的角是 $23'\,20''$. 並且
$$\log\sin 23'\,20''=4.68557-10$$
$$\therefore \qquad \log x=7.84579-4.68557$$
$$=3.16022$$
$$\therefore \qquad x=1446''=24'\,6''.$$

（注意） 若 $\sin x$ 近於 1，也可以用公式
$$\sin\left(45°-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(90°-x)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}$$
求 x. 若 $\cos x$ 近於 0，則可以用公式
$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
求 x.

[例] 已知 $\sin x=0.99986$ 求 x.
$$\because \qquad \sin\left(45°-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-0.99986}{2}}=\sqrt{0.00007}.$$
和 $$\log\sin\left(45°-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\log 0.00007=\bar{3}.92255.$$

在第三表中(40 頁)正弦的對數和 $3.92255+10$ (即 7.92255)相近的是 $0°\,28'$ 的 7.91088. 但在第一表的附表中和 $0°\,28'$ 相近的角是 $28'\,20''$. 並且

$$\log\sin 28'\,20''=4.68557-10$$

$$\therefore\qquad \log\left(45°-\frac{x}{2}\right)=7.92255-4.68557$$

$$=3.23698.$$

$$\therefore\qquad 45°-\frac{x}{2}=1726''=28'\,46''.$$

$$\therefore\qquad x=89°\,2'\,28''.$$

這種計算也可以用下面的近似公式:

$$\sin x=x(\cos x)^{\frac{1}{3}}\quad 和\quad \tan x=x(\cos x)^{-\frac{2}{3}}.$$

第 四 表

三角函數表 (85–87 頁)

這個表包含從 $0°$ 到 $90°$ 中間每相差 $30'$ 的各個角的三角函數. 它的構造是這樣:

(1) 左右兩邊的第一行都是角的度數,第二行都是角的分數;左邊由上而下從 $0°$ 到 $45°$, 右邊由下而上從 $45°$ 到 $90°$.

(2) 頂上和底下的一排,六個函數依正弦、餘割、正切、餘切、正割和餘弦的順序排列,頂上由左而右,底下由右而左.

(3) 表中間的數就是各個角的三角函數,頂上記有 d 的各行的數是每相鄰兩個三角函數的差.

現在我們舉例說明這個表的用法.

[例 1] $\tan 25°\,30'=0.477,$

$\cos 79°\,30'=0.182,$

$\sec 41°\,30'=1.335.$

這些都是由表中可以查出來的.

[例 2] 求 $\sin 37°\,47'$ 的值.

在表中 (87 頁) $\sin 37°\,30'=0.609$, 表差是 7, 角度的差是 $30'$.

但 $\qquad 37°\,47'-37°\,30'=17'.$

由比例 $\qquad 30:17=7:x,$

$$x=3.96.$$

$$\therefore\qquad \sin 37°\,47'=0.609+0.00396=0.613.$$

[例 3] 求 $\cot 78°\,15'\,38''$ 的值.

在表中 (85 頁) $\cot 78°=0.213$, 表差是 10, 角度的差是 $30'$.

但 $\qquad 78°\,15'\,38''-78°=15'\,38''=15'.63.$

由比例　　$30:15.63=10:x$,

$$x=5.21.$$

$\therefore$　　$\cot 78^\circ\,15'\,38''=0.213-0.005=0.208.$

第　五　表

和差對數表（88—98 頁）

這個表分 A（88—92 頁）和 B（93—98 頁）兩部分.

（1）表 A. 這個表是計算兩個數的和的對數用的. 頂上記有 A 的一行是一些數的常用對數的前三位，頂上和底下的一排是它們的第四位. 設某個對數的真數是 x，則記有 B 的各行中相應的數就是 $1+\frac{1}{x}$的對數. 這個表是根據下面的計算原理構成的.

設　　$\log x=1.201$，則 $x=15.8856$.

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)&=\log(x+1)-\log x\\&=\log 16.8856-\log 15.8856\\&=1.22751-1.201\\&=0.02651.\end{aligned}$$

在表 A 中，由記有 A 的一行查得 1.20，橫着查到頂上記有 1 的一行，所得的就是 0.02651.

若我們已經知道兩個數 a 和 b 的對數，要求 $a+b$ 的對數，就可以用這個表.

$\because$　　$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$.

$\therefore$　　$\log(a+b)=\log a+\log\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$.

設　　$x=\frac{a}{b}$ 則 $\log x=\log a-\log b$.

因為 $\log a$ 和 $\log b$ 都是已經知道的，所以 $\log x$ 可以求得. 而由表 A 就可以查得 $\log\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$，再加上 $\log a$ 就是 $\log(a+b)$.

［例］　已知 $\log a=2.71456$ 和 $\log b=1.86943$，求 $\log(a+b)$.

$$\begin{aligned}\log\frac{a}{b}&=\log a-\log b=2.71456-1.86943\\&=0.84513.\end{aligned}$$

在表 A（89 頁）的 A 中只有 0.845，而 B 中和它對應的是 0.05800. 在這裏表差是 12，而 $0.84513-0.845=0.00013$. 比例部分表差 12 的一行和 1 對應的是 1.2，和 3 對應的是 3.6.

$\because$ $$0.000012+0.0000036=0.00002.$$

和 $$0.05800-0.00002=0.05798.$$

$\therefore$ $$\log(a+b)=\log a+\log\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$$
$$=2.71456+0.05798$$
$$=2.77254.$$

這個題若用第一個表，須先由已知的對數查出 a 和 b 把它們相加，再查所得的和的對數，手續就比較繁些.

(2) 表 B. 這個表是計算兩個數的差的對數用的. 頂上記有 B 的一行是一些數的常用對數的前四位，頂上和底下的一排是它們的第五位. 設某個對數的眞數是 x，則記有 C 的各行中相應的數就是 $\log\frac{x}{x-1}$. 這個表是根據下面的計算原理構成的.

設 $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=1,$$

則 $$x'=\frac{x}{x-1}.$$

$\therefore$ $$\log x'=\log x-\log(x-1).$$

例如已知 $\log x=0.72436$ 則 $x=5.301$.

$\therefore$ $$\log x'=\log x-\log(x-1)$$
$$=\log 5.301-\log 4.301$$
$$=0.72436-0.63357$$
$$=0.09079.$$

在表 B 中由記有 B 的一行查得 0.724……，記有 C 的各行中和它相應的數就是 0.090…….

若我們已經知道兩個數 a 和 b 的對數，要求 $a-b$ 的對數，就可以用這個表.

這很明白的，因 $\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a}=1$，若取 $\frac{b}{a}$ 作爲 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x'}$ 中的一個，則 $\frac{a-b}{a}$ 就是其中的另一個.

設 $$\frac{b}{a}=\frac{1}{x} \quad 則 \quad \frac{a-b}{a}=\frac{1}{x'},$$

因而 $$\log(a-b)=\log\frac{a}{x'}=\log a-\log x';$$

其中 $\log a$ 是已知的，$\log x'$ 是可以由表 B 中查出的.

[**例 1**] 已知 $\log a=0.72345$ 和 $\log b=\bar{1}.67618$，求 $\log(a-b)$.

$\because$ $$\log a>\log b \qquad \therefore \quad a>b,$$

而 $$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$$
$$=0.72345-\bar{1}.67618$$
$$=1.04727.$$