高中代數
指导复习参考資料

河南人民出版社

目　　錄

第一部份　数的概念的发展……………………………… (1)
第二部份　代数式的恒等变形…………………………… (18)
第三部份　函数及其图象………………………………… (30)
第四部份　数列和极限…………………………………… (46)
第五部份　指数和对数…………………………………… (70)
第六部份　方程…………………………………………… (98)
第七部份　不等式………………………………………… (138)
第八部份　排列組合与二項式定理及数学归納法……… (153)

第一部份 数的概念的發展

一、数的概念的擴張与分种系統

（詳閱課文后参考下列各表）

1．数的概念的逐步扩張表：

数种	新数种	概括命名
自然数	分数	正数
正数	負数及零	有理数
有理数	无理数	实数
实数	虚数	复数

2．数的分种系統詳表：

- 复数→$a+bi$（a，b为任意实数）
  - 实数→无限小数
    - 有理数→分数
      - 正有理数
        - 自然数（正整数）
        - 正分数
      - 負有理数
        - 負整数
        - 負分数
      - 零
      - 分数：有限小数、无限循环小数→无限循环小数
    - 无理数→无限不循环小数
      - 負无理数
      - 正无理数
    - 正实数：自然数（正整数）、正分数、正无理数
    - 負实数：負整数、負分数、負无理数
  - 虚数→$a+bi(b\neq0)$
    - 純虚数→$bi(b\neq0)$
    - 混合虚数→$a+bi(a\neq0,\ b\neq0)$

3．数的分种系统简表：

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数
        - 負正数
        - 零
      - 分数
    - 无理数
  - 虚数

二、各数种的性質及运算

1．**自然数**（正整数）。

（1）自然数中有最小的一个“1”，而无最大的数。

（2）有順序性——即任意两个自然数都可以比較它們的大小。

（3）在自然数集合中永远可以施行加、乘两種运算。

2．**整数**（包括正負整数和零）。

（1）在整数中无最小的一个，也无最大的一个。

（2）有順序性——即任意两个整数都可以比較它們的大小。

（3）在数軸上表示整数的点，叫做整数点。整数点有孤立性。

（4）在整数集合中永远可以施行加、减、乘三種运算。

3．**有理数**（包括整数和分数）。

（1）有理数中，无最小的一个，也无最大的一个。

（2）有順序性——即任意两个有理数都可以比較它們的大小。

（3）在数軸上表示有理数的点叫做有理点，有理点有稠密性（即任意两个有理点之間仍有有理点存在）但亦有

間断性，(即所有的有理点并不能布满数軸)。

(4)在有理数集合中永远可以施行加、减、乘、除（除数不得为0）四則运算。

(5)有理数都可以用分子分母都是整数的分数表示，而分数都可以化为有限小数或无限循环小数，又有限小数都可以写成无限循环小数的形式(如：2.35＝2.34999……）故有理都可以用无限循环小数表示。

4．实数（包括有理数及无理数）。

(1)在实数中无最小的一个也无最大的一个。

(2)有順序性——即任意两个实数都可以比較它們的大小。

(3)在数軸上表示实数的点叫做实数点，实数点有連續性，即实数与数軸上的点成一一对应关系。

(4)在实数集合中永远可以施行加、减、乘、除四種运算（除数不得为0）正实数永远可以开方，負实数永远可以开奇次方而不能开偶次方。

〔注意〕实数的平方一定是正实数或者是0，这概念在实数范围內的运算中很有用，例如：已知 $x^2+y^2=0$；x，y 均为实数則可証明 x，y 均为0。

(5)无理数是无限不循环小数，有理数均可写为无限循环小数，故实数均能写成无限小数。

(6)实数的絕对值——以 $|a|$ 表示实数 a 的絕对值。

1）若 $a>0$，則 $|a|=a$。

2）若 $a<0$，則 $|a|=-a$。

3）若$a=0$，则$|a|=0$.

4）若$|a|<m$（m为正数）则$-m<a<m$·

5）若$|a|>m$（m为正数）则$a>m$或$a<-m$·

6）$|a|+|b|\geqq|a+b|$

7）$|a|-|b|\leqq|a+b|$

8）$|a|-|b|\leqq|a-b|$

9）$|a|\times|b|=|a\times b|$

10）$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$

11）若$a^2>b^2$，则$|a|>|b|$。

反之若$|a|>|b|$，则$a^2>b^2$。

例如：代数第三册复习题十中第6题之（1）已知

$|a|<1$，$|b|<1$。

求証：$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$。

証：$\because$ $(a+b)^2-(1+ab)^2=(a^2-1)(1-b^2)$

又 $|a|<1$，$|b|<1$

$\therefore$ $a^2-1<0$，$1-b^2>0$

$\therefore$ $(a+b)^2-(1+ab)^2<0$，

$$\therefore\ (a+b)^2<(1+ab)^2$$

$$\therefore\ \left|a+b\right|<\left|1+ab\right|$$

$$\therefore\ \left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1\quad 即\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1。$$

5．复数（包括实数和虚数）。

㈠形为 $a+bi$（a、b 为任意实数，i 表 $\sqrt{-1}$ 即 $i^2=-1$）的数叫复数。

当 $b=0$ 时则 $a+bi=a$ 是实数。当 $b\neq0$ 时，则 $a+bi$ 是虚数（当 $a\neq0$，$b\neq0$ 时叫混合虚数，当 $a=0$，$b\neq0$ 时叫做純虚数）。

純虚数“i”称为虚数的單位。

㈡在笛卡儿平面內我們規定以坐标为（a，b）的点表示复数 $a+bi$ 則所有复数与平面上的点成一一对应关系，顯然 x 軸上的点均表实数，故称 x 軸为实軸。x 軸以外的点均表虛数，而 y 軸上的点（坐标原点除外）均表純虛数，故称 y 軸为虛軸。四个象限的点均表混合虛数，且当 $a>0$，$b>0$ 时表示 $a+bi$ 的点在第一象限，当 $a<0$，$b>0$ 时表示 $a+bi$ 的点在第二象限，当 $a<0$，$b<0$ 时表示 $a+bi$ 的点在第三象限当 $a>0$，$b<0$ 时，表示 $a+bi$ 的点在第四象限。

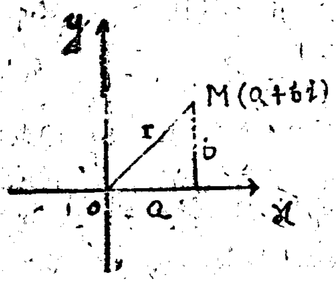
㈢复数无順序性——即任意两个复数只要有一个是虛数，对它們沒有大小的規定。

㈣复数相等的条件——当 $a=c$，$b=d$ 时，二复数 $a+bi$ 及 $c+di$ 才能相等。（其逆命題也眞）

㈣复数等于零的条件——当 $a=0$，$b=0$时复数 $a+bi$ 等于零

㈤共轭虚数及相反复数——虚数 $a+bi$及 $a-bi(b\neq 0)$ 称为共轭二虚数，复数 $a+bi$及 $-a-bi$称为相反二复数。

㈥如图設M点对应复数 $a+bi$ 綫段 oM的长 r 即为复数 $a+bi$的模数，也叫絕对值。复数 $a+bi$的絕对值以 $\left|a+bi\right|$表示，顯然 $\left|a+bi\right|=r=\sqrt{a^2+b^2}$。



oM与 x 轴的正方向所夾的角 θ 叫做复数 $a+bi$的幅角。

$a+bi$的幅角 θ 是多值的，适合于 $0\leqq\theta<2\pi$的幅角 θ 叫做幅角的主值。

顯然其幅角的一般值为：$\theta+2k\pi$（k为任意整数）其主值可由 $\sin\theta=\frac{b}{r}$ 及 $\cos\theta=\frac{a}{r}$ 两式决定。

$\because\ a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta$

$\therefore\ a+bi=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$a+bi$ 叫做复数的代数式，$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数 $a+bi$的三角函数式，一切复数均可写为三角函数式。

又如 $\theta<\pi$ 或 $180°$ 时，复数往往写成 $r(\cos\Phi-i\sin\Phi)$的形式，其中 $\Phi=360°-\theta$，$r(\cos\Phi-i\sin\Phi)$ 与

$r(\cos\Phi + i\sin\Phi)$ 是共軛复数在复数运算中要注意 $0 \leqq \theta \leqq \pi$，

例如：$\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$，

$-1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$= 2(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4})$，

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos 330° + i\sin 330° = \cos 30° - i\sin 30°$

$5 = 5(\cos 0° + i\sin 0°)$

$-5 = 5(\cos 180° + i\sin 180°)$

$3i = 3(\cos 90° + i\sin 90°)$

$-5i = 5(\cos 270° + i\sin 270°) = 5(\cos 90° - i\sin 90°)$

$0 = 0(\cos\theta + i\sin\theta)$，（$\theta$ 为任意值）

④在复数范围内永远可以施行加、减、乘、除、乘方、开方等六種代数运算。

（1）加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

（2）减法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

（3）乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-db)+(bc+ad)i$

$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

由此可知：$|a+bi|\cdot|c+di| = |(a+bi)\cdot(c+di)|$

(4)除法：$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

由此可知：$\frac{|a+bi|}{|c+di|}=\left|\frac{a+bi}{c+di}\right|$

(5)乘方：$(a+bi)^n=a^n+c_n^1a^{n-1}bi$

$$+c_n^2a^{n-2}(bi)^2+\cdots\cdots+(bi)^n$$

$$=(a^n-c_n^2a^{n-2}b_2+c_n^4a^{n-4}b^4-c_n^6a^{n-6}b^6$$

$$+\cdots\cdots)$$

$$+(c_n^1a^{n-1}b-c_n^3a^{n-3}b^3+c_n^5a^{n-5}b^5$$

$$-c_n^7a^{n-7}b7+\cdots\cdots)i$$

$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)$
$+i\sin(n\theta)]$（此日棣美弗定理）

(6)开平方：若$b\neq o$，以$\sqrt{a+bi}$表复数$a+bi$的平方根

Ⅰ．当$b>o$时$\sqrt{a+bi}=\pm(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

$$+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}i)$$

Ⅱ、当 $b<0$ 时 $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right)$

若 $b=0$，$a>0$ 则复数 $a+bi$（实际上是正数 a）的平方根为 $\pm\sqrt{a}$（$\sqrt{a}$ 表算术根）。若 $b=0$，$a<0$ 則复数 $a+bi$（实际上就是負数 a）的平方根为 $\pm\sqrt{a}=\pm\sqrt{-a}\,i$。

（7）开 n 次方（包括开平方）

以 $\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ 表复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次根。

則 $\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\dfrac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2n\pi}{n}\right]$（$\sqrt[n]{r}$ 为算术根），令 $k=0$，1，2，……，$(n-1)$ 时 $\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ 可得到且仅可得到 n 个不同的値，这就是說在复数范围内任一复数开n次方可以得到 n 个根。

由此可知：二項方程　$ax^n=b$　（a 为不等于零的复数。b 为任意复数）而且仅有n个根：$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$（用复数开方法則可求出 n 个値）

（8）在复数范围内 $\sqrt[n]{a}$ 不是专表示 a 的 n 次算术根，$\sqrt[n]{\quad}$ 是运算符号 $\sqrt[n]{a}$ 有 n 个不同的値因此我們应注意以下三点：

Ⅰ、$\sqrt[n]{a}$ 中 a 为正实数，如果 $\sqrt[n]{a}$ 专表示 a

的n次算术根，必须特别声明。

Ⅱ. $\sqrt{-1}$应等于$\pm i$，$\sqrt{-a}$应等于$\pm\sqrt{a}i$，$\sqrt{-1}=i$及$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$是一種規定。

Ⅲ. 两数相等其同次幂也相等的逆定理不成立，就是两数相等其同次根不一定相等。

例如：$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$

但$\sqrt{\frac{-1}{1}}$与$\sqrt{\frac{1}{-1}}$不一定相等。

三、例　　題

1．已知：$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i$，求x，y的实数值。

解：两端乘以$5+3i$消去分母得：

$$x+1+(y-3)i=2+8i$$

根据复数相等条件可得$\begin{cases}x+1=2\\y-3=8\end{cases}$　　由此求出，

$x=1$，$y=11$

2．求$\left|\frac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})(\sqrt{3}-i)\sqrt{5}i}\right|+2i$的模数。

解：　$\because$ $\left|\frac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})(\sqrt{3}-i)\sqrt{5}i}\right|$

$$+2i=\frac{|3+4i|\times|\sqrt{2}-\sqrt{2}i|}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right|\times|\sqrt{3}-i|\times|\sqrt{5}i|}$$

$$+2i=\frac{5\times 2}{1\times 2\times\sqrt{5}}+2i=\sqrt{5}+2i$$

$$\therefore\quad |\sqrt{5}+2i|=\sqrt{5+4}=3$$

3．已知x，y互为共轭虚数，且$(x+y)^2-3xyi=4-6i$，求x，y。

解：令 $x=a+bi$（a，b为实数）

$y=a-bi$

则：原式化为 $(2a)^2-3(a^2+b^2)i=4-6i$

根据复数相等条件可知 $\begin{cases}a^2+b^2=2\\4a^2=4\end{cases}$

由此得 $\begin{cases}a^2=1\\b^2=1\end{cases}$ $\quad\therefore\quad\begin{cases}a=\pm 1\\b=\pm 1\end{cases}$

$\therefore$ a $\begin{cases}X=1+i\\y=1-i\end{cases}$ $\begin{cases}X=1-i\\y=1+i\end{cases}$ $\begin{cases}X=-1+i\\y=-1-i\end{cases}$ 及 $\begin{cases}X=-1-i\\y=-1+i\end{cases}$

4．解方程：$x^2-(3-2i)x+5-5i=0$

解：由二次方程求根公式得：

$$x=\frac{(3-2i)\pm\sqrt{(3-2i^2)-4(5-5i)}}{2}$$

$$=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15+8i}}{2}=\frac{3-2i\pm(1+4i)}{2}$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3-2i+(1+4i)}{2}=2+i$$

$$x_2=\frac{3-2i-(1+4i)}{2}=1-3i$$

5．解方程：$(x-1)^3=1$

解：由方程定义知：

$$X-1=\sqrt[3]{\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ}=\cos\frac{360^\circ\cdot k}{3}+i\sin\frac{360^\circ\cdot k}{3}$$
$$=\cos 120^\circ\cdot k+i\sin 120^\circ\cdot k$$
$$\therefore\quad x=(\cos 120^\circ\cdot k+i\sin 12^\circ\cdot k)+1$$

令$k=0$ 得$x_1=1$

令 $K=1$ 得 $x_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)+1$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

令 $K=2$ 得 $x_3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)+1=\frac{1}{2}$

$$-\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

6．化簡 $\left\{\left[1-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5\right]^2+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{20}\right\}(1\times 2i)$

解： 原式$=\{[1-(-i)^5]^2+i^{10}\}(1+2i)$
$=\{[1+i]^2-1\}(1+2i)$
$=\{2i-1\}(1+2i)$
$=-(1-2i)(1+2i)=-(1^2+2^2)=-5$

7．若$m>n$．m．n为实数

試証：$m^2+n^2,m^2-n^2,2mn$为直角三角形的三边长。

証： $(m^2+n^2)^2=(m+ni)^2(m-ni)^2$
$=(m^2-n^2+2m.n.i)$
$(m^2-n^2-2m.n.i)=(m^2-n^2)^2+(2m.n)^2$
根据商高定理的逆定理可知$m^2+n^2,m^2-n^2,2mn$
为直角三角形的三边。

注意：令　$m=2, n=1$

则：　$m^2+n^2=5.\ m^2-n^2=3.\ 2mn=4.$

故知三边之比为 3：4：5 之三角形必为直角△。

令　$m=3.\ n=2.$

则：　$m^2+n^2=13.\ m^2-n=5.\ 2mn=12.$

故知三边之比为 5：12：13 之△必为直角△。

同法可推出很多各边均为整数的直角三角形来。

例 8．求証　$K^{n+2}+(K+1)^{2n+1}$可被K^2+K+1整除

（其中K．n均为任意自然数）

証：　$\because$　K^2+K+1的二根为$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$和

$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$　K^2+K+1

$$=\left(K-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(K-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

以　$K=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$代入被除式得。

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^{2+n}+\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}+1\right)^{2n+1}$$

$$=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+2}+\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^{2n+1}$$

$$=(\cos120^\circ\pm i\sin120^\circ)^{n+2}$$
$$+(\cos60^\circ\pm i\sin60^\circ)^{2n+1}$$

$$=\cos(n\cdot120^\circ+240^\circ)\pm i\sin(n\cdot120^\circ$$
$$+240^\circ)+\cos(n\cdot120^\circ+60^\circ)$$

$\pm i\sin(n\cdot120^\circ+60^\circ)$

$=2\cos(n\cdot120^\circ+150^\circ)\cos90^\circ\pm2i\cdot$

$\sin(n\cdot120^\circ+150^\circ)\cos90^\circ=0.$

由裴蜀定理可知 $K^{n+2}+(K+1)^{2n+1}$

可被 $\left(K-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$ 整除。

也可被 $\left(K-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ 整除。

故 $K^{n+2}+(K+1)^{2n+1}$ 可被 K^2+K+1 整除。

四、复習思考題

1．是不是所有的无理数都是无限小数？为什么？是不是所有的无限小数都是无理数？为什么？

2．若 a、b、c 均为正整数，指出下列各方程在哪種数之范圍内一定有解，在其它数種之范圍内不一定有解。

(1) $x-a=b$　(2) $x+a=b$　(3) $\dfrac{x}{a}=b$

(4) $ax^2=b$.　(5) $\dfrac{x}{a}=b+c$　(6) $ax=b+c$

(7) $ax=b-c$　(8) $ax^2=b-c$

3．若 a、b、c 均为实数，指出在什么条件下，下列方程有实根。

(1) $ax^2+c=0$　(2) $ax^2+bx=0$　(3) $ax^2+bx+c=0$

4．若 a、b、c 为有理数（$a\neq0$）指出在什么条件下方程 $ax^2+bx+c=0$ 才有有理根？

5．怎样証明两个有理数的和、差、积、商、仍为有理数？

6．怎样証明一个有理数与一个无理数之和、差、必为无理数？怎样証明一个有理数（零除外）与一个无理数的积、商必为无理数？

7．两个无理数的和、差、积、商不一定是无理数，各举例說明？

8．已知：$(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0$．求 x，y 的实数值？

9．化簡：$\dfrac{(1+i)^5}{1-i}+\dfrac{(1+i)^5}{1+i}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=?$

10．在复数范围内解方程：$x+|x|=9-3i$

11．求以下方程之实数根，$|2x-10|=2$

12．一复数与其相反复数的积为 $5-12i$，求此复数？

13．一数与其倒数之和等于零，求此数。

14．如果 $|x|=1$，则 x 和 $\dfrac{1}{x}$ 是共軛复数。

15．比較大小：

（1）$-3\dfrac{3}{5}$ 与 $-\sqrt{11}$　　（2）$\sqrt{10}$ 与 π

（3）$2\sqrt{2}$ 与 3．　　（4）$2\sqrt{3}$ 与 $-3\sqrt{2}$

（5）$5i$ 与 $3i$　　（6）2 与 $-2i$

（7）$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 与 $2+\sqrt{3}$．

16．在实数集合内求下列各式之值：

（1）$\sqrt{(-3)^2}$　　（2）$-\sqrt[3]{(-2)^2}$

（3）$\sqrt{(x-3)^2}$　　（4）$-\sqrt[5]{(x-1)^5}$

（5）$\sqrt{-4}$　　（6）$\sqrt{-a^2}\ (a>o)$

（7）$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$　　（8）$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1-x}\quad(x>1)$