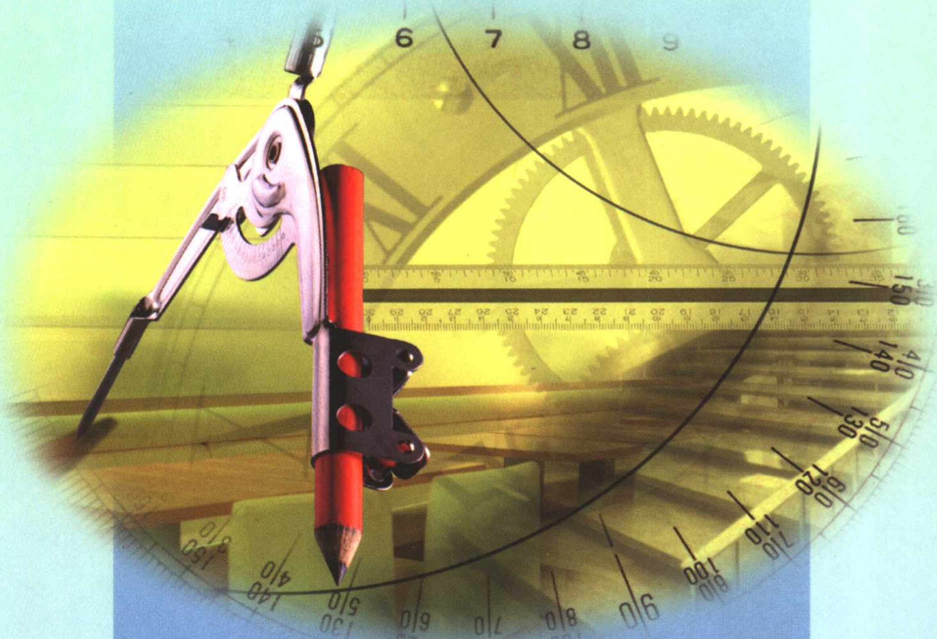
高等农林院校十五规划教材

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

高等数学

惠淑荣　吕永震　主编



中国农业出版社

全国高等农业院校教材
全国高等农业院校教学指导委员会审定

高等数学

惠淑荣　吕永震　主编

中国农业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/惠淑荣,吕永震主编 .—北京:中国农业出版社,2002.8
全国高等农业院校教材
ISBN 7-109-07769-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①惠…②吕… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 039748 号

中国农业出版社出版
(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)
(邮政编码 100026)
出版人:傅玉祥
责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2002 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月北京第 2 次印刷

开本:787mm×960mm 1/16 印张:27.25
字数:488 千字
定价:35.20 元

编者名单

主　编　惠淑荣　吕永震

副主编　鲁春铭　张　阚

　　　　冯大光　徐厚生

参　编　张淑芳　李丽峰

　　　　张冬梅　马　鸿

主　审　张国伟

内容提要

本教材是遵照农业部基础学科组关于“高等数学教学的基本要求”(讨论稿)及“高等农业院校高等数学教学大纲”，并在原高等农林牧水产院校教材《高等数学》的基础上重新组织编写的．全书内容包括函数、极限与连续，导数与微分及其应用，积分及其应用，空间解析几何，二元函数的微积分及其应用，微分方程和无穷级数．同时，本教材还引进了 Mathematica 软件在高等数学中应用的内容，以使学生利用计算机解决高等数学的一些基本问题．为了便于学生检查自己的学习情况，全面复习和巩固每一章所学的内容,在每章后都附有自测题．

本教材可作为农林牧水产院校本专科学生的学习教材，也可作为研究生、教师和科技人员的学习参考书．

目 录

第一章 函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系.极限方法则是研究变量的一种基本方法.本章在复习函数概念的基础上着重介绍极限的概念和函数的连续性,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、函数的概念

在观察自然现象或研究技术问题时,常常发现有几个变量在变化着,它们并不是孤立的,而是相互依赖、相互制约的.变量之间的确定性依赖关系,就称为**函数关系**.

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.数集 D 叫做这个函数的**定义域**,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

当 x 取值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$.当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集 $w=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,例如"φ","F",等等.这时函数就记做 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$,等等.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总只有一个,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**.定义域 D 和对应规律是函数概念的两个要素.很多函数的定义域可用区间表示,对应规律可用表格、图像或解析式表示.

在用解析式表示的函数中,有时会遇到一个函数要用几个式子表示的情形.

例如,函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,其定义域是$(-\infty,+\infty)$,其图形如图 1-1 所示.

又如符号函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$.当 x 取$(-\infty,0)$内的数值时,函数值均为 -1,而当 x 取$(0,+\infty)$内的数值时,函数值均为 1,而 $f(0)=0$.故值域 $w=\{-1,0,1\}$是个离散的数集,该函数的图形如图 1-2 所示,也可记做 $y=\operatorname{sgn} x$.

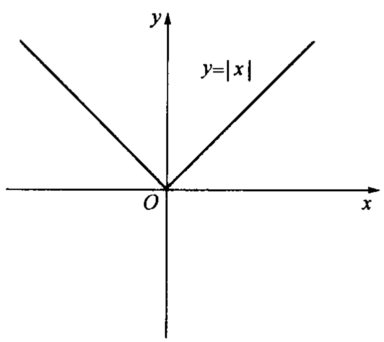


图 1-1

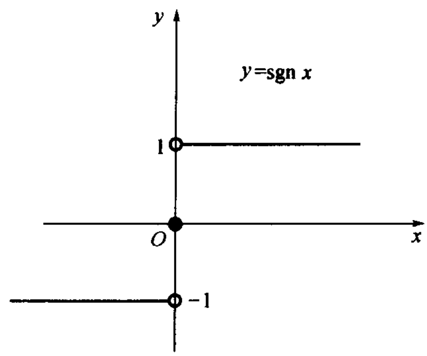


图 1-2

这种在定义域内的不同范围用不同的式子表示的一个函数,称为**分段函数**.

例 1 已知分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

试求(1)函数的定义域,值域;(2)$f(\frac{1}{2})$,$f(1)$,$f(3)$;(3)画出函数的图形.

解 (1)函数的定义域 $D=[0,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$;

(2)因为$\frac{1}{2}\in[0,1]$,所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$;

因为 $1\in[0,1]$,所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$;

因为 $3\in(1,+\infty)$,所以 $f(3)=1+3=4$.

(3)根据函数定义,在$[0,1]$上,函数的图形为曲线 $y=2\sqrt{x}$,在$(1,+\infty)$上,函数的图形为直线 $y=1+x$,该函数图形如图 1-3 所示.

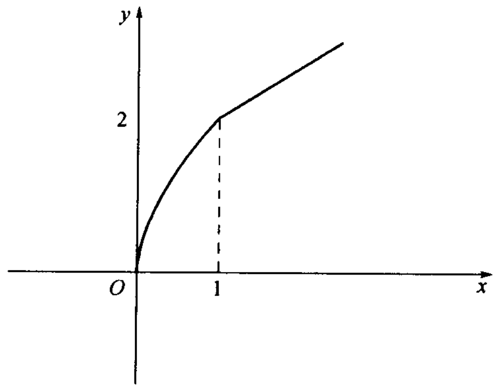


图 1-3

例 2 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记做 $[x]$,例如

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4$$

把 x 看成变量,则函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $w=z$,图形为阶梯形曲线,如图 1-4 所示,在 x 为整数值处发生跳跃,跃度为 1,这函数称为取整函数(图 1-4).

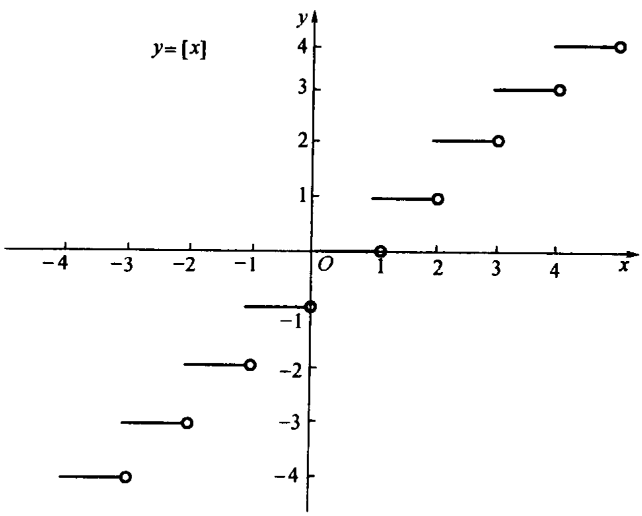


图 1-4

二、函数的几种特性

1.函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A \subset D$. 如果存在正数 M，使得对于一切 $x \in A$，有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 上**无界**；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in A$，使 $|f(x_1)| > M$，那么函数 $f(x)$ 在 A 上无界.

例如，函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为存在正数 $M=1$，对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，有 $|\sin x| \leqslant 1$. 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界，因为对于 $(0,1)$ 内的一切 x，能使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 成立的 M 是不存在的. $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内是有界的，因为可取正数 $M=1$，对于一切 $x \in (1,2)$，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$.

有界函数的图形介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

2.函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $\mathrm{I} \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调增区间；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

例如，函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调减少，但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

3.函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称(即若 $x \in D$，则必有 $-x \in D$). 如果对于任何 $x \in D$，恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任何 $x \in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

又如，$f(x)=\sin x$ 是奇函数，函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数，函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的数 T，使得对于任何 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$ 且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $f(x)=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

以 T 为周期的周期函数，在定义域内每个长度为 T 的区间上，其图形有相同的形状.

三、反函数

对于函数 $y=f(x)$，如果把 y 看做自变量，x 看做因变量，且由 $y=f(x)$ 能够确定一个新的函数 $x=\varphi(y)$，则称这个新的函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，可记做 $x=f^{-1}(y)$；相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，$y=f(x)$ 称为直接函数.

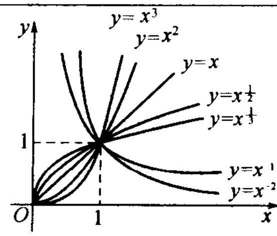
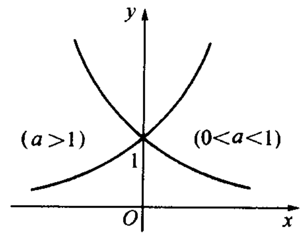
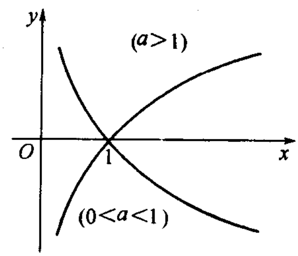
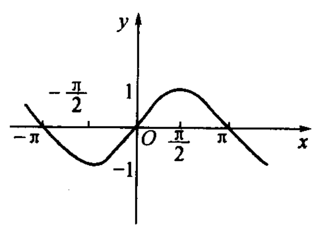
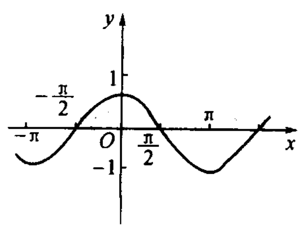
函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的. 但是，习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $x=f^{-1}(y)$ 按习惯表示为 $y=f^{-1}(x)$，因此，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标平面上，关于直线 $y=x$ 对称.

单值函数 $y=f(x)$ 的反函数不一定是单值的，单调函数的反函数一定存在，且亦为单调函数.

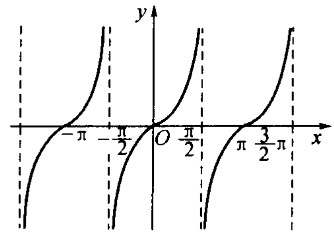
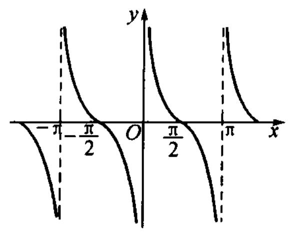
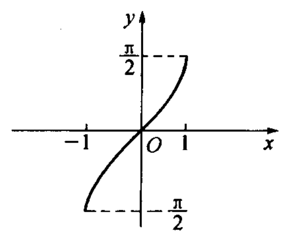
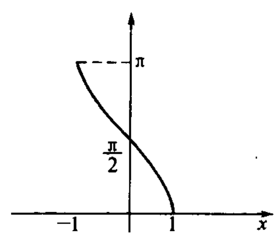
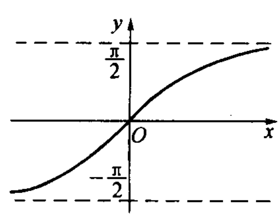
四、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**. 对这些函数的定义和性质，在中学数学里已有较详细的介绍，此处不再赘述. 为便于查阅，择其要点列于表 1-1 中.

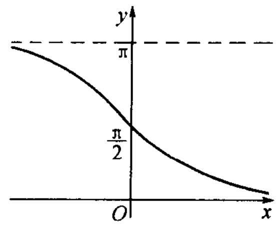
表 1-1　基本初等函数的定义和性质

名称	解析式	定义域	特　性	图　形
幂函数	$y=x^{\mu}$ (μ 为实常数)	随 μ 而定，但不论 μ 为何值在 $(0,+\infty)$ 内总有意义	在 $(0,+\infty)$ 内单调；奇偶性与 μ 有关，图形过点(1,1)	
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	单调，图形在 x 轴上方，过点(0,1)	
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	单调，图形在 y 轴右方，过点(1,0)	
三角函数　正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	有界（$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$），以 2π 为周期的奇函数	
三角函数　余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	有界（$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$），以 2π 为周期的偶函数	

（续）

名称		解析式	定义域	特性	图形
三角函数	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$	以 π 为周期的奇函数；在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调增加	
三角函数	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	以 π 为周期的奇函数；在 $(0,\pi)$ 内单调减少	
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	有界（$\vert\arcsin x\vert\leqslant\frac{\pi}{2}$），单调增加的奇函数	
反三角函数	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	有界（$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$），单调减函数	
反三角函数	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	有界（$\vert\arctan x\vert<\frac{\pi}{2}$），单调增加的奇函数	

（续）

名称		解析式	定义域	特性	图形
反三角函数	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	有界($0<\operatorname{arccot} x<\pi$)单调减函数	

五、复合函数、初等函数

1.复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 u，y 就是 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，并称它为前两个函数的**复合函数**，u 称为**中间变量**.

例如，函数 $y=\arctan u$ 与 $u=x^2$ 可以复合成函数 $y=\arctan(x^2)$，这里 $u=x^2$ 的值域在 $y=\arctan u$ 的定义域内. 又例如 $y=\ln u$ 与 $u=\sin x$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin x$，这里 $u=\sin x$ 的值域的一部分在 $y=\ln u$ 的定义域内.

必须注意，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+\sqrt{x}$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为 u 的值域完全不在 $y=\arcsin u$ 的定义域内.

复合函数也可由两个以上的函数经过复合构成. 复合过程中的每个函数都是基本初等函数，或者是由常数及基本初等函数经过有限次四则运算（加、减、乘、除）得到的表达式.

例 3　指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\tan^2 x$；　(2) $y=e^{(x-1)^2}$；　(3) $y=\ln\{\ln[\ln(x^4+1)]\}$.

解　(1) $y=u^2$，$u=\tan x$，u 为中间变量；

(2) $y=e^u$，$u=v^2$，$v=x-1$，u、v 为中间变量；

(3) $y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=\ln w$，$w=x^4+1$，u、v、w 为中间变量.

2.初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sin x+\cos^3 x$，$y=x^2+\sqrt{1+x^2}$ 都是初等函数.

再如,有理整式函数(或称多项式函数)

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_0,a_1,\cdots,a_n\text{ 为常数})$$

有理分式函数

$$R(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}\ (a_n\neq0,b_m\neq0,m,n\text{ 为非负整数})$$

也都是初等函数.

第二节 数列的极限

高等数学的研究对象是变量.为了很好地掌握变量的变化规律,不仅要考察变量的变化过程,更重要的是要从它的变化过程来判断它的变化趋势,而变量的确定的变化趋势就是变量的极限.本节介绍数列极限的概念.

一、数列的概念

按照一定的规则,依次由自然数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 编号排成的一列数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

叫做**数列**,记为 $\{x_n\}$ 或数列 x_n.数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n 叫做数列的**一般项**或**通项**.

例如

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots \tag{1}$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \tag{2}$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots \tag{3}$$

$$3,9,27,\cdots,3^n,\cdots \tag{4}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n+1}}{n},\cdots \tag{5}$$

都是数列的例子,它们的一般项依次为 $\frac{n}{n+1},\frac{1}{2^n},(-1)^{n+1},3^n,\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}$.

在几何上,数列 x_n 可看做数轴上的一个动点,它依次取数轴上的点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$(图 1-5).

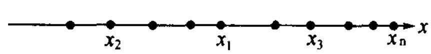


图 1-5

数列 $\{x_n\}$ 可看做自变量为正整数 n 的函数:$x_n=f(n)$,它的定义域