

数学的历史、逻辑和基础资料选辑

非标准分析 (II)

中国科学院计算技术研究所九室编
新乡师范学院数学系印

一九七五年五月

前言

<一>

非标准分析座谈会纪要	2
标准分析与非标准分析 林龙威	13
在数域 *R 上描述微积分的基本概念 王有通	16
关于运用“非标准分析”讲授初等微积分的一些体会 袁荫	36
*R 的基数以及其它问题 杨安洲	45

<二>

模型论的元数学领域 L.A.斯亨	49
模型论概貌 R.L.沃特	
什么是非标准分析? W.A.J.卢森堡 陈晋钺 康宏盛 译	108
非标准分析介绍 A.坎瓦斯	151
非标准分析:一个说明 勒维瓦	168
某些非阿基米德域上的函数论 A.罗宾逊	192
非标准分析对量子力学的应用 法鲁克	223
热力学极限的“非标准”研究 M.狄里斯登等	301

<三>

A. 罗宾逊著《非标准分析》四、五、九章译文

第四章 一般拓扑学	311
第五章 实变函数论	347
第九章 选取的课题	374

前

言

中国科学院数学研究所出版的《数学的历史、逻辑和基础材料选辑——非标准分析》第一辑引起了不少同志的关心。由于份数少，不能满足有关同志的需要。新乡师院数学系，贵阳师院数学系等曾先后进行了翻印。这一辑是第一辑的续编，除 A. Robinson 书的三章外，还收集了一些通俗介绍，包括国内几位同志写的文章。此外，还收集了先在量子力学、热力学中的应用的译文。

如何把非标准分析用于教学工作，编写好的教材，这是一项重要的研究工作，也是国内许多同志关心的和正在尝试的。美国数学家 Keisler 著的《初等微积分》经过几年的试教，已正式出版，这是用元假小方法编写的第一本现代化的微积分教材，值得参攷。关于该书的书评可参阅《自然科学争鸣》杂志 1977 年第 5 期袁崇国老师的文章《非标准分析介绍（下）》。

对于有些问题具有不同意见的，我们希望展开讨论。

我们的水平很低，错误缺点，欢迎批评指正。

本册，新乡师院数学系负责印刷工作，我们十分感谢他们的支持。

张锦文

1977. 11. 25.

非标准分析座谈会纪要

编者说明：1977年八月分，中国科学院计研所在北京召开了一次数理逻辑暑期讨论会。会上，专门用一天时间座谈了非标准分析问题。我们将这次讨论的发言整理了一下，写成了这个纪要，发表出来，供对此感兴趣的同志们研究时参考。

张锦文（中国科学院计研所）：

非标准分析近十几年来发展迅速，国内外研究它，关心它的人很多。国内有一些大中城市已举办了有关非标准分析的讨论班、研究组，有的同志学习马克基《数学手稿》，考察微积分的现代发展，研究微积分的基本问题；有的在研究非标准分析有关理论问题；有的在探讨它的应用（特别是用于物理学的一些方面）；有的在试编教材。非标准分析不仅引起了数学界一些同志的注意，也有一些物理工作者，自然辩证法工作者、中学教师和知识青年在探讨它的有关问题，今天的座谈也是一个交流经验，交换意见的会。当然，国内外对于非标分析也有些不同的看法，这可以通过科学实践和百家争鸣来解决。

杨朝柱（广东师范学院）：

非标准分析是一新的数学分支，应该深入研究。我认为，非标准实数系，对于表现物理世界的反映，比标准分析深入了一些。数学和物理学要结合起来研究。非标准分析将有可能在基本粒子的研究中发挥作用。

从微积分的教学方面来讲，“ $\varepsilon-\delta$ ”方法不易被初学者理解。近年来，在美国的一些高级中学、工科技学院，应用非标准分析的方法试教微积分，并与通常的办法作了细致的对比分析。试验结果，肯定了新方法的优越性。

对于马克思的《数学手稿》，一定要认真学习，绝不在抱怀疑态度。马克思在一百多年前就已科学地预见到点是不可分的，微分三角形“比点还小”。我觉得非标准分析完全证实了马克思的这一科学预见。如何通俗地引入 $\ast R$ ，搞一点公理化的处理方法，结合《数学手稿》的精神讲授微积分，是一件很有意义的工作。

胡虫华（中国科学院计所西）：

非标准分析的创立是数学发展史上的一件大事。它是在微分逻辑（主要是模型论）的直接影响下发展起来的。微分逻辑是以微分方法为研究对象的一门数学。它对于微分的发展有深远影响是理所当然的，非标准分析不过是这种影响的一例。

我们认为，在非标准分析这一数学方法得到充分的发展之后，将会给人们提供一种更强有力的分析数学工具。

微分逻辑的研究应当促进整个数学的发展。微分逻辑（主要是：集合论、递归论、模型论、证明论）所提供的研究方法（如形式化方法）在数学研究中是可以普遍使用的。正是这些研究方法是无根据的。数学基础研究中的许多重大问题，其中就有不少问题借助于形式化方法才得到彻底解决的。

最后，还想说明一点：不能认为非标准分析是对标准分析的否定。

沈有鼎 (中国社会科学院哲学研究所逻辑组):

构造性分析的创始人比绍浦 (E. Bishop) 从构造主义立场出发, 全盘否定非构造性的数学。这未免极端。最近, 他又在美国数学会报上写文章激烈反对非标准分析方法。这样发展下去, 如何评价非标准分析的问题将会成为一个带有世界性的数学界的争论问题。

目前, 我们国内对于非标准分析很注意。我认为, 运用唯物辩证法的观点, 阐明非标准分析的本质和意义, 在国内广泛宣传这一新的数学分支, 发展下去同然会有世界性的意义。我希望, 我国对于非标准分析的研究工作将赶上世界上的先进水平, 进一步促进数学的发展。

蒲保明 (四川大学):

非标准分析在六十年代兴起以来, 逐渐引起了许多数学工作者极大的兴趣和注意。愈来愈多的人投入了这方面的研究。这一新学科的基础理论和方法逐步得到了改进和完善。同时, 也把这种新的研究方法应用到数学的许多分支和物理等方面, 取得了不少成果。这是主流。另一方面, 在国内外也有一部分数学家作者对非标准分析的基础和它的意义抱怀疑, 怀疑态度, 甚至有人对它进行责难和批判。

我们由于从事一般拓扑学的研究, 发现近年来出现了非标准拓扑这一新分支, 促使我们从事非标准分析的研究。对于这一新学科, 我们有以下两点体会:

一、在做数学创建的初期, 曾广泛地应用了无限小方法。莱布尼茨提出了包含着“无限小的数”的扩大实数系的问题。这一问题提出近三百仍没有得到彻底解决。直到一九六〇年, 在做逻辑 (模型论) 的蓬勃发展推动下, 非标准分析经过

了长时期的厚积后终于出了。这是数学发展史上的一件大事。

二、非标准分析是一种重要的新方法。例如，“量子”的概念，就是一个新的数学概念，在拓扑空间的研究中是一个重要的工具，目前，这种研究方法已经取得了不少的研究成果。

我认为，非标准分析给数学研究提供了新的研究方法。今后，我们应当把标准分析和非标准分析这两种方法很好地结合起来应用，把研究工作搞上去。

王统鈞（北京大学）

在微分理论中，无穷小推理曾有一种以 ϵ 以微分统变易，此后就导致了对于无穷小的定义，这是微分统变易的不足之处。但是，在微分统变易的发展史上，微分统变易有极大贡献的。本世纪六十年代通过模型论的方法，即非统变易又非有限微分的无穷小量才又作为科学的微分重新得到肯定，并在此基础上建立了非标准分析。

目前，微分理论与非标准分析中的无穷小量方法是两种并行的数学分析方法，这两种方法是相互补充，相互促进，是对立的统一。

当代著名数理逻辑学者哥德尔是一位很成熟的数学家。他认为，非标准分析时常可以使数学证明得到简化，而证明的简化有助于发现新的数学事实。他说，有理由相信，未来的分析将是这样或那样的非标准分析。这些话值得我们认真考虑。

非标准分析扩大了数学的论域，这是一个很大的进步。我认为，要从历史发展的角度来看待非标准分析，不应忽视这种新的数学研究方法。

袁荫（北京电力建设公司工人大学）

开斯勒尔写的《初等微分》(1926年出版)是一本运用非标准分析观点写成的教科书。该书作者在模型论的研究中有一系列很重要的贡献,他花费了七、八年的时间才写出了这本书。该书初稿经过多次教学实践,反复修改,在理论上才逐渐完善起来的。我认为,这是一本具有较高科学水平的近代微积分的教科书。在这本书中,作者揭示了一个很重要的问题:在现实的物理空间中,直线究竟是个什么样子?像 R 呢?还是更像 $*R$?

构造性分析的创始人比绍甫最近写文章激烈反对开斯勒尔的书,将会引起人们的关注。我认为,应该在更长时间的数学实践中来检验这本书的科学价值,而不应该过早地做出最后的判决。我认为,这本书将在广泛地影响着人们对数学的认识。

黄顺基 (北京师范大学):

非标准分析是一门年青的,富有强大生命力的数学科学。

它不同于标准分析的一个根本点在于引入了实无穷小量。这个量的引入是数学发展史上又一次飞跃。其深远意义必将为数学、物理学未来的发展所证实。

从数学方面来说,实无穷小量的数学是认识史合乎逻辑的发展。自然数(N),整数(Z),有理数(Q),实数(R)。这是人类认识数学的历史,也是全部标准数学赖以建立起来的对象域。模型论,一门综合抽象代数数和数理逻辑的数学,从实数系 R 出发,用超积方法构造了一个扩大的数系——超实数系 $*R$,证明了实无穷小量是 $*R$ 的合法成员,这就在数学认识史上迈出了极其重要的一步。因为 R 中的点没有内部结构,而 $*R$ 中的点则有内部结构,完全证实了一百年前马歇尔的数学

予言：微分三角形中的 dx 和 dy “比点还小”。

从物理学方面来说，物理学中的时间、空间是通过坐标系来确定的，经典力学用欧几里得系尺来刻划坐标系，由此形成了经典力学的数学工具——标准分析，经典力学的数学模型——点模型，经典力学规律的数学表现——决定论的因果律。量子力学深入到基本粒子这个层次，随着对物质结构的认识的深化，物质存在的基本形式，时间与空间必然有新的内容，从而刻划时间与空间的数学概念也必须进一步发展。量子力学的模型——波模型，量子力学规律的数学表现——概率论的因果律，基本粒子的二重性——波与粒，对于这些本质特征，以 ϵ 尺为对象域的非标准分析将被证明是一个非常重要的数学工具。

从哲学方面来说，非标准分析是唯物辩证法的又一范例。它是唯物论的，因为自然界为实无穷小提供了原型。自从一八九七年发现第一中基本粒子以来，基本粒子的直径大约在 10^{-12} ~ 10^{-14} 厘米之间，同宏观的物体相比，它们是实无穷小。因此，这些数学并不象某些人所说的“自相矛盾的”，是“神秘的”，恰恰相反，自然界对这一切想象的数学都提供了原型。非标准分析是辩证的，因为基本粒子是不可穷尽的，反映基本粒子的数学——实无穷小也是“不可度量的，不可物化认识的，不可穷尽的”，非标准分析对象域 ϵ 尺的基本性质（非阿基米德有序域，每一串子有极其真实的结构）基本上反映了微观世界在数学方面的本质特征。这就为非标准分析的发展开辟出一系列无限广阔的前途。

林永襄（中国社会科学院哲学研究所自然辩证法组）：

非标准分析理论的产生是数学发展史上的一件大事，引起了国内外数学工作者的热烈讨论。对这一理论的科学价值提出

不同的意见，这是不可避免的，可以通过百家争鸣和科学实践得到解决。对于围绕非标准分析问题而展开的不同哲学观点的斗争，我们必须用马克思主义的观点进行分析，批判其中的唯心论和形而上学。但是，在目前的讨论中，有的同志在批判鲁溪用形式主义的观念去解释其数学成果的时候，也有把非标准分析本身和哲学观点区别开来，违背了毛主席关于自然科学本身没有阶级性的教导。说什么“非标准分析是形式主义的数学体系，是‘唯心主义思潮的产物’”，把小孩和洗澡水一起扔掉。还有的同志对马克思主义的观点没有全面理解，完全倒立用，在看到无限小量与有限量具有相对立的一面时，却否认相对立中有绝对，把具有辩证法思想的无限小量说成是“形而上学的”，用以否定非标准分析。这些做法和观点都是错误的，对我国科学的发展是有害的。

黄绍敏（南京大学）：

从目前的情况来看，非标准分析是用不同的方法求得标准分析的结果。这种分析方法发展下去，能成为一种新的非欧基米德分析，以及这种分析能否用于物理学，这要由实验来决定。对于非标准分析，由于它从数学上严格定义了无限小的数，发展下去将来一定会会有新的结果。我们寄希望于它的将来，但是，关于应用非标准分析的方法来讲授微积分学，这种做法是否方便，对此，我有些怀疑。我赞成把初等微积分下放到中学去教。我认为，只要把现有的微积分教材加以适当改进，就可以使得初等微积分的难度程度和中学的代数差不多。这里讲的“适当改进”，简单说来是指“应用单调控制函数来处理极限过程”的新方法。这种方法我在一九五八年南京大学学极上曾提出来过。近年来又进一步完善了这种方法。

杨应洲 (北京工业大学):

非标准分析是用微理逻辑的方法(微理论)来处理分析数学的一种办法。由于 $\ast R$ 是没有完全固定的,所以能否对具体的、固定的 $\ast R$ 以及它的应用进行深入具体的研究,作为一个研究课题。

王克强 (北京师范大学):

非标准分析作为一门数学是无可非议的。非标准分析的论证,涉及到形式语言,这也是很自然的。在其某种意义上讲,特别是在数学研究中,形式语言要比自然语言更精确一些。非标准分析与标准分析是一致的,可以相互配合使用。非标准分析丰富和发展了原有的数学分析方法。方法多了,更好些。数学工作者可以用这个方法去做一些工作。至于用非标准分析推出的结论以及非标准模型能否用于物理的预测,这要进一步研究,最终要由实践来检验。

关于在大学低年级运用非标准分析的办法来讲授微积分学,我认为这是可以试验的,也是一件有意义的工作,但是,这并不意味着可以完全不要“ $\varepsilon-\delta$ ”方法。

在适当的时候,还是要讲一下“ $\varepsilon-\delta$ ”方法。我认为,对于各种非标准模型的深入研究,把它们搞得更清楚一些,是一件重要的工作。

程汉生 (北京师范大学附属中学教师):

同意王克强老师的意见,愿开展非标准模型本身结构的研究。

李邦顺 (中国科学院数学研究所):

非标准分析和标准分析是一致的，它继承和发展了标准分析。这两种分析方法是统一的，都是有效的微积分研究方法。

在许多情况下，非标准分析的处理方法是十分方便的。例如，应用这种方法来证明柯尔乐拉引理就是一例。解一阶微分方程的欧拉折线法，用非标准分析来处理，是非常自然的。

非阿基米德分析，国外很少有人注意。这种分析，扩大了数学研究的领域，值得引起注意。

朱盛道（北京市机械学校）

在学习马克恩《数学手稿》的过程中，我们开始接触到非标准分析这种新的数学分析方法，我们觉得，新方法可能更接近于《数学手稿》的精神。

我们目前正在编写北京机械工业系统“七、二一”工人大学用的微积分学教材，在编写过程中，我们打算采用一些非标准分析的基本思想和方法。由于教材都具有一些通用性的，因此，这种做法也会带来一些新问题，但是，我们勇于实践一下，在教学实践中逐步摸索经验。我们希望得到其他兄弟院校的帮助和指导。

杨守唐（北京师范大学）：

我们认为，应用非标准分析的无限小来讲授微积分学的基本概念，较之“ $\varepsilon-\delta$ ”方法，可能更接近于马克恩《数学手稿》的精神。另一方面，微积分学在工程技术上的实际应用都采用无限小的说法。基于这两点认识，我们打算编写一本新的非标准的微积分教材。我们的基本想法是，使这本教材较好地符合《数学手稿》的精神，同时又易于被学生理解，方法也简单方便，具有一些科学性。

为了避免许多难懂的模态论的概念，我们打算从实做做到入手，引入几条公理，采用公理化的方法，把实做做，*R建立起来，用实义各个微积分学的基本概念。

袁锦文：

今天的座谈会，可算生功，活跃。在会上发言的有不满三十岁的青年，有从事数学研究和教学一、四、五十年的老科学家，老教授。蒲保明教授来京王晨，也参加了我们的这个座谈会，并作了很好的发言，对在座的数理逻辑工作者是一个很大的鼓舞，很大的支持。我们在当前所研究数学中的逻辑问题，方法问题，王宪钧教授从数学史上从数学研究无限对数学的广大发展的角度，论述了非标准分析的意义。胡世华教授从数理逻辑的性质，对象，从形式化方法的科学意义的角度论述了非标准分析所提供的数学方法是在有力的分析数学工具。此外，沈有鼎教授，姜伯毅教授，王世强教授等也都从不同的角度发表了自己的看法。对于非标准分析作为数学的一个新分支，应当重视它、研究它，我们的座谈会对这些意见是一致的；同时，对于数学上的问题的意见是不一致的，这要通过进一步的讨论和教学试验来解决。

标准分析与非标准分析

学习《数学手稿》和《自然辩证法》的体会

林 龙 威

非标准分析与标准分析的根本区别在于把论域从局限于单层次的实数域扩充到多层次的非标准数域。相应的，标准分析使用极限方法，而非标准分析使用无限小推理方法。

极限方法和无限小推理方法是研究微分分析的两种基本方法，它们虽相辅相成的，论域和方法要相互适应。目前标准分析与非标准分析的对立只是暂时现象，对立斗争的结果必然把分析推进到一个新的阶段。

在如何评价这两种分析的理论中，我们认为需要把某些数学家的错误观念与学科本身的科学论断区别开。恩格斯指出：
“在任何一门科学中，不正确的观念，如果抛开现象若假不讲，归根到底都是对于正确事实的不正确的观念，事实终究是事实，尽管关于它的现有观念是错误的。”（《自然辩证法》，第139页）。我们对错误观念进行批判与对学科进行评价具有联系又有区别的两项任务，本文的任务主要是属于后一项。

(一) 标准分析

如何评价极限方法是标准分析中一个带根本性的问题。有些同志对极限方法持否定态度，他们虽然误解了马克思这一段话：“为了得到‘导数’就必须设 $x_1 = x$ ，因而只严格数学意义上的 $x_1 - x = 0$ ，无论任何只是无限接近于零的糊塗话。”（《数学手稿》，第5页）他们认为，所谓“导数导数的极限

是导数，就是“导数导数无限趋近于导数”，这和马克思所说的“必须设 $x_1 = x$ ”相抵触，是马克思所批判的“无限趋近的胡说”。“其实，这是从字面看问题，没有全面领会马克思所说的精神实质。

关于求导数的全过程，马克思是这样说的：“……我们称这个表达式为 x 的导函数，它通过取差而得到的最初变形称为 x 的导数，导函数经过微分过程最终得到的形式称为 x 的‘导’函数。”（《数学手稿》，第4页）。如果以求切线斜率为例，这就是通过取差而得到割线斜率。当 x_1 无限趋近 x 时，割线斜率无限趋近切线斜率，直至 x_1 到达 x 时，割线转化为切线，割线斜率最终得到的形式就是切线斜率。这个 x_1 变到 x 的过程就是微分过程。在变化的过程中，当然必须 $x_1 \neq x$ ，否则它就不是已知的，割线的斜率。只有到变化终止时， x_1 到达 x ，已知的割线斜率才转化为待求的切线斜率，所以“为了得到导数，必须设 $x_1 = x$ ，因而其严格数学是 $x_1 - x = 0$ 。”

为了求得切线斜率，首先通过取差而得到割线斜率。当 x_1 又变到 x 时，割线斜率转化为切线斜率，这种方法就是极限方法。这个过程是一个否定之否定的过程，其中 x_1 变到 x ，割线斜率变成切线斜率的过程是微分过程，也就是极限过程，切线斜率就是割线斜率所趋向的极限，所谓取极限是取变化过程的终了值，而不是取它的中间值，是取所求的精确值而不是近似值。

上述说明的根据是马克思的《关于切线问题》一文。这篇文章是马克思应恩格斯的要求为说明微分学问题的实质而写的。在这篇基本文献中，马克思明确指出：“设横坐标为长 h （即 PP' ）；通过点 M ， M' 作割线 $M'S$ ； h 减小得越多，即 PP'

或大得越多， PS 就趋向于跟次切线 PT 重合，直至 $PP' = r$ 变成 0，因此 PT 就是 PS 所趋向的极限。”（《数学手稿》，第 22 页）。由此可见，认为马克恩否定极限方法的说法是错误的。

值得注意的是，通常的极限定义不是谈如何求极限，不是谈如何得到导数，得到切线斜率，而是阐明变量和它的极限的关系，是说明“切线斜率是割线斜率的极限”，这句话是什么意思，既然变化过程最后一个值是确定的，切线斜率，那么作为变化过程中间值的，已知的，割线斜率就没有最后一个值，作为变化过程中间值的，已知的，割线斜率，当然必须又，又，极限定义中强调 $x, \neq x$ 以及变化过程没有最后一个值即是对变量（它是已知的）加以限制，和马克恩强调的“为了得到导数，必须设 $x_1 = x$ ”（并元抵触。正因为当 x_1 无限趋近于 x 时，导数无限趋近于导数，于是当 x_1 到达 x 时，导数就转化为导数，而且只有“到达”，才能“转化”，从已知转化为需求，这正好是相辅相成的。

那么马克恩所批评的“无限趋近之类的糊塗话”是指什么呢？与此有关的，还有马克恩这一段话：“一些进行理性推断的数学家所坚持的即以自慰的说法是， $\frac{dy}{dx}$ 在量上其实只是无限小（的比），仅仅接近于 $\frac{0}{0}$ ，这真奇怪，……”（《数学手稿》，第 3 页），有些同志看到有“趋近”、“无限趋近”等字眼就以为是肯定极限方法，这同样误解。

马克恩在评论极限方法的先驱者达朗贝尔的微分学时，明确指出：“在这里数学上是正确的。”（《数学手稿》，第 125 页）。又说：“达朗贝尔脱不了微分学的神秘外衣，取得了很大的进步。”（《数学手稿》，第 91 页）。他提到达朗贝尔的错误都是属于观念上的错误。达朗贝尔不用无限小，“无限小