仁华学校奥林匹克数学系列丛书

人大附中编

仁华学校奥林匹克数学

RENHUAXUEXIAOAOLINPIKESHUXUE

课本

小学五年级

中国大百科全书出版社

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

仁华学校(原华罗庚学校)
奥林匹克数学课本

小学五年级

(最新版)

人大附中编
主编:刘彭芝

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　社长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

仁华学校奥林匹克数学课本·小学五年级/刘彭芝主编. -北京:中国大百科全书出版社,2003.12
(仁华学校奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5000-6981-2

Ⅰ.仁…　Ⅱ.刘…
Ⅲ.数学课-小学-教学参考资料　Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第118205号

仁华学校奥林匹克数学课本(小学五年级·最新版)

主　　编:刘彭芝
责任编辑:简菊玲
封面设计:何　茜
责任印制:徐继康

出版发行:中国大百科全书出版社
(北京阜成门北大街17号　100037　68315606)
http://www.ecph.com.cn
排　　版:北京中文天地文化艺术有限公司
印　　刷:北京华正印刷厂
经　　销:新华书店总店北京发行所

版　　次:2004年1月第1版
印　　次:2004年1月第1次印刷
印　　张:9.625
开　　本:880×1230　1/32
字　　数:207千字
印　　数:1-20000
ISBN 7-5000-6981-2/G·663
定　　价:10.00元

顾　问	王　元	裘宗沪	
	冯克勤	陈德泉	
主　编	刘彭芝		
副主编	童　欣	杨骅飞	
编　委	童　欣	莫颂清	杨骅飞
	胡先蕙	邓健新	郭丽军
	彭建平	刘红燕	陶晓勇
	梁丽平		
编　撰	梁丽平	刘景华	杨骅飞
	顾秀文	张佐超	周沛耕
	李志红	薄云程	郭丽军
	李　玫	袁素芬	胡先蕙
	陶晓勇	田利英	

序

这套丛书是北京仁华学校的教学用书。

北京仁华学校是人大附中的超常教育实验基地。其前身为北京市华罗庚学校，2003年12月改用新名（为叙述方便起见，下文涉及“北京市华罗庚学校”或“华校”的一律改用新名）。仁华学校的办学目的是探索科学实用、简单易行的鉴别与选拔超常儿童的方法，探索具有中国特色的超常教育模式，为国家大面积早期发现与培养现代杰出人才开辟一条切实可行的途径。在这里，数百位优秀教师精心执教，一批批超常儿童茁壮成长。仁华学校全体师生决心在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族的伟大复兴甘当马前卒。

超常教育与早期教育为当今世界各国所重视。近年来，我国的众多有识之士投身超常教育事业，也取得了可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步，但同时也是一个复杂而全新的教育课题。无论在历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长的环境不佳，特别是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育。因而，必须更新教育观念和教学模式，这样才能把大批聪慧儿童培养成为知识经济时代的栋梁之材。我们认为，超常儿童是具有良好的智力和非智力个性特征的统一体，是遗传与环境共同作用下的产物。基于此种看法，北京仁华学校的超常

教育，以尊重个性和挖掘潜力为基本原则，强调选拔与培养相结合，不缩短学制而注重学生综合素质的全面提高。

仁华学校分为小学部、初中部和高中部。小学部属校外培训性质，招收小学三至六年级的学生，招生时间定在每年9月或10月，入学后每周学习一次。初中部和高中部属常规中等教育，纳入人大附中建制，每个年级设4－6个实验班。仁华学校初中部和高中部的生源分别主要来自小学部和初中部，同时面向全市招生。

仁华学校在办学过程中，逐渐形成了自己独特的课程体系。在必修课中，我们把数学作为带头学科，并以此促进物理、化学、生物、外语、计算机等其他学科的发展。这是因为，数学作为研究现实世界中数和形的一门基础科学，不仅对人类社会的进步和国家的建设发挥着关键的作用，而且对训练人们的思维能力具有重要的价值。此外，仁华学校还开设有现代少年、科学实践、社会实践、心理导向、创造发明和生物环保等特色课，以及汽车模拟驾驶、网页设计、天文观测、电子技术、几何画板、艺术体操、篆刻和摄影等选修课。华校全新的课程设置，近而言之，是希望学生能够增强学习兴趣，开阔知识视野；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下坚实而全面的科学文化基础。

仁华学校在办学过程中，还逐渐形成了一支思想新、业务精、肯吃苦、敢拼搏的教师队伍。这其中既有多年工作在教学第一线的中小学高级和特级教师，又有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，还有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们着眼于祖国的未来，甘做人梯，为超常教育事业辛勤耕耘，是仁华学校藉以成长、引以自豪的中流砥柱。

实践证明，仁华学校对超常儿童的培养方略是可取的。十余年来，仁华学校为高等学校输送了大量全面发展、学有特长并具备创新精神和高尚品德的优异人才。已毕业的16届实验班学生全部考取重点大学，其中进入北京大学和清华大学的人数约占总数的68%，保送生约占25%。不仅如此，还有近3000人次学生在区、市、国家乃至世界级的学科竞赛中获奖夺魁，数量位居北京市重点中学之首。仁华学校的学生在全国雷达表青少年科学英才竞赛中获一、二、三等奖各一次，在全俄罗斯数学竞赛中获两枚金牌、一枚银牌，在国际物理邀请赛中获一枚银牌，在国际信息学奥林匹克竞赛（IOI）中获一枚铜牌，在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获满分金牌2枚和银牌1枚。近200人在各种发明比赛中获奖，其中几十人获全国及世界创造发明比赛的金奖、银奖，并取得五项国家专利。还有33人次在全国科学论文评比中获一、二、三等奖。此外，实验班的同学在艺术体育等方面也成绩斐然。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实践，使得一批又一批英才脱颖而出，这足以显示仁华学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

仁华学校超常教育的实践和成果已引起全国和国际教育界的关注。华校现在是中国人才研究会超常人才专业委员会副理事长单位，其超常教育研究课题曾荣获北京市“八五”普教科研优秀成果二等奖。仁华学校先后有数十位师生参加了国际超常儿童教育学术会议，在各种国际会议上宣读论文三十余篇，并同五十多个国家和地区从事超常教育的学校及研究机构建立了友好往来或合作研究关系。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验基础之上的。我们组织编写的这套“北京市

华罗庚学校奥林匹克系列丛书”的作者大部分都是原华校的骨干教师，开创了荟萃专家编书的格局。另外还有数位曾经在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获得金牌和银牌的大学生和研究生参加撰写。这支由学生组成的特别劲旅将他们学习的真切感受和新鲜经验表达出来，使得本丛书独具一格。综合而言，展现在读者面前的这套丛书集实用、新颖、通俗、严谨等特点于一身，我们将其奉献给中小学教师、学生及家长，希望能博得广大读者的喜爱。此套丛书涉及数学、英语、物理和计算机等学科，目前已经出版和即将出版的有四十余册。

俗云：“一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。”仁华学校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。“合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。”遥望未来，让我们同呼志士之言：为中国在21世纪成为科技强国而献身。

作为本系列丛书的主编，借这套丛书再次出版的机会，我再次以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意，恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

写于2001年1月

修改于2003年12月

目录

上册

目　录

下　册

上册

第1讲　数的整除问题

数的整除问题，内容丰富，思维技巧性强．它是小学数学中的重要课题，也是小学数学竞赛命题的内容之一．

一、基本概念和知识

1．整除——约数和倍数

例如：$15\div3=5$，$63\div7=9$

一般地，如 a、b、c 为整数，$b\neq0$，且 $a\div b=c$，即整数 a 除以整除 b（b 不等于 0），除得的商 c 正好是整数而没有余数（或者说余数是 0），我们就说，a 能被 b 整除（或者说 b 能整除 a）．记作 $b|a$．否则，称为 a 不能被 b 整除，（或 b 不能整除 a），记作 $b\nmid a$．

如果整数 a 能被整数 b 整除，a 就叫做 b 的倍数，b 就叫做 a 的约数．

例如：在上面算式中，15 是 3 的倍数，3 是 15 的约数；63 是 7 的倍数，7 是 63 的约数．

2．数的整除性质

性质 1：如果 a、b 都能被 c 整除，那么它们的和与差也能被 c 整除．

即：如果 $c|a$，$c|b$，那么 $c|(a\pm b)$．

例如：如果 $2|10$，$2|6$，那么 $2|(10+6)$，

并且 $2|(10-6)$.

性质2：如果 b 与 c 的积能整除 a，那么 b 与 c 都能整除 a. 即：如果 $bc|a$，那么 $b|a$，$c|a$.

性质3：如果 b、c 都能整除 a，且 b 和 c 互质，那么 b 与 c 的积能整除 a.

即：如果 $b|a$，$c|a$，且 $(b, c)=1$，那么 $bc|a$.

例如：如果 $2|28$，$7|28$，且 $(2, 7)=1$，

那么 $(2\times7)|28$.

性质4：如果 c 能整除 b，b 能整除 a，那么 c 能整除 a.

即：如果 $c|b$，$b|a$，那么 $c|a$.

例如：如果 $3|9$，$9|27$，那么 $3|27$.

3. 数的整除特征

① 能被2整除的数的特征：个位数字是0、2、4、6、8的整数．“特征”包含两方面的意义：一方面，个位数字是偶数（包括0）的整数，必能被2整除；另一方面，能被2整除的数，其个位数字只能是偶数（包括0）．下面“特征”含义相似．

② 能被5整除的数的特征：个位是0或5.

③ 能被3（或9）整除的数的特征：各个数位数字之和能被3（或9）整除.

④ 能被4（或25）整除的数的特征：末两位数能被4（或25）整除.

例如：$1864=1800+64$，因为100是4与25的倍数，所以1800是4与25的倍数．又因为 $4|64$，所以1864能被4整除．但因为 $25\nmid64$，所以1864不能被25整除.

⑤ 能被 8（或 125）整除的数的特征：末三位数能被 8（或 125）整除.

例如：29375 = 29000 + 375，因为 1000 是 8 与 125 的倍数，所以 29000 是 8 与 125 的倍数. 又因为 $125 \mid 375$，所以 29375 能被 125 整除. 但因为 $8 \nmid 375$，所以 $8 \nmid 29375$.

⑥ 能被 11 整除的数的特征：这个整数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差（大减小）是 11 的倍数.

例如：判断 123456789 这九位数能否被 11 整除？

解：这个数奇数位上的数字之和是 $9+7+5+3+1=25$，偶数位上的数字之和是 $8+6+4+2=20$. 因为 $25-20=5$，又因为 $11 \nmid 5$，所以 $11 \nmid 123456789$.

再例如：判断 13574 是否是 11 的倍数？

解：这个数的奇数位上数字之和与偶数位上数字和的差是：$(4+5+1)-(7+3)=0$. 因为 0 是任何整数的倍数，所以 $11 \mid 0$. 因此 13574 是 11 的倍数.

⑦ 能被 7（11 或 13）整除的数的特征：一个整数的末三位数与末三位以前的数字所组成的数之差（以大减小）能被 7（11 或 13）整除.

例如：判断 1059282 是否是 7 的倍数？

解：把 1059282 分为 1059 和 282 两个数. 因为 $1059-282=777$，又 $7 \mid 777$，所以 $7 \mid 1059282$. 因此 1059282 是 7 的倍数.

再例如：判断 3546725 能否被 13 整除？

解：把 3546725 分为 3546 和 725 两个数. 因为 $3546-725=2821$. 再把 2821 分为 2 和 821 两个数，因为

$821-2=819$，又 $13|819$，所以 $13|2821$，进而 $13|3546725$.

二、例　题

【例 1】　已知 $45|\overline{x1993y}$. 求所有满足条件的六位数 $\overline{x1993y}$.

解：∵　$45=5\times9$，

∴　根据整除“性质 2”可知

$5|\overline{x1993y}$，$9|\overline{x1993y}$.

∴　y 可取 0 或 5.

当　$y=0$ 时，根据 $9|\overline{x1993y}$ 及数的整除特征③可知 $x=5$，

当　$y=5$ 时，根据 $9|\overline{x1993y}$ 及数的整除特征③可知 $x=9$.

∴　满足条件的六位数是 519930 或 919935.

【例 2】　李老师为学校一共买了 28 支价格相同的钢笔，共付人民币 9□.2□元. 已知□处数字相同，请问每支钢笔多少元？

解：∵　9□.2□元 = 9□2□分

$28=4\times7$，

∴　根据整除“性质 2”可知

4 和 7 均能整除 9□2□.

4|2□，可知□处只能填 0 或 4 或 8.

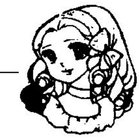
因为　$7\nmid9020$，$7\nmid9424$，所以□处不能填 0 和 4；

因为　$7|9828$，所以□处应该填 8.

又∵　9828 分 = 98.28 元

$98.28\div28=3.51$（元）

答：每支钢笔 3.51 元.



【例 3】　已知整数$\overline{1a2a3a4a5a}$能被 11 整除. 求所有满足这个条件的整数.

解: ∵　$11 \mid \overline{1a2a3a4a5a}$,

∴　根据能被 11 整除的数的特征可知:

$1+2+3+4+5$ 的和与 $5a$ 之差应是 11 的倍数,

即 $11 \mid (15-5a)$. 或 $11 \mid (5a-15)$.

但是　$15-5a=5(3-a)$, $5a-15=5(a-3)$, 又 $(5, 11)=1$, 因此 $11 \mid (3-a)$或 $11 \mid (a-3)$.

又∵　a 是数位上的数字.

∴　a 只能取 0～9.

所以只有 $a=3$ 才能满足 $11 \mid (3-a)$或 $11 \mid (a-3)$,

即当 $a=3$ 时, $11 \mid 15-5a$.

∴　符合题意的整数只有 1323334353.

试一试: 如果将例 3 中的整数改为$\overline{1a_1 2a_2 3a_3 4a_4 5a_5}$(其中 a_1, a_2, …, a_5 互不相同), 且它能被 11 整除, 你能找到一个符合条件的整数吗?

【例 4】　把三位数$\overline{3ab}$接连重复地写下去, 共写 1993 个$\overline{3ab}$, 所得的数$\underbrace{\overline{3ab3ab\cdots 3ab}}_{1993个3ab}$恰是 91 的倍数. 试求$\overline{ab}$=?

解: ∵　$91=7\times 13$, 且 $(7, 13)=1$.

∴　$7 \mid \underbrace{\overline{3ab3ab\cdots 3ab}}_{1993个3ab}$, $13 \mid \underbrace{\overline{3ab3ab\cdots 3ab}}_{1993个3ab}$.

根据一个数能被 7 或 13 整除的特征可知:

原数　$\underbrace{\overline{3ab\cdots 3ab}}_{1993组}$能被 7 以及 13 整除

当且仅当　$\underbrace{\overline{3ab\cdots 3ab}}_{1992组}-\overline{3ab}$能被 7 以及 13 整除,

也就是 $\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}\overline{000}$能被 7 以及 13 整除.

因为$(7,10)=1$，$(13,10)=1$，所以 $7\mid\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}000$，$13\mid\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}000$也就是 $7\mid\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}$，$13\mid\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}$，因此，用一次性质（特征），就去掉了两组$\overline{3ab}$；反复使用性质 996 次，最后转化成：原数能被 7 以及 13 整除，当且仅当$\overline{3ab}$能被 7 以及 13 整除

又$\because$ 91 的倍数中小于 1000 的只有 $91\times4=364$ 的百位数字是 3，$\therefore$ $\overline{3ab}=364$

$\therefore$ $\overline{ab}=64$.

【例 5】 在 865 后面补上三个数字，组成一个六位数，使它能分别被 3、4、5 整除，且使这个数值尽可能的小.

分析 设补上数字后的六位数是$\overline{865abc}$. 因为这个六位数能分别被 3、4、5 整除，所以它应满足以下三个条件：

第一，数字和（$8+6+5+a+b+c$）是 3 的倍数.

第二，末两位数字组成的两位数$\overline{bc}$是 4 的倍数.

第三，末位数字 c 是 0 或 5.

解： 设要求的六位数为$\overline{865abc}$. 根据题意可知：

$4\mid\overline{bc}$，且 c 只能取 0 或 5.

又$\because$ 能被 4 整除的数的个位数不可能是 5.

$\therefore$ c 只能取 0. 因而 b 只能取自 0，2，4，6，8 中之一.

又$\because$ $3\mid\overline{865ab0}$，且（$8+6+5$）除以 3 余 1，

$\therefore$ $a+b$ 除以 3 余 2.

为满足题意“数值尽可能小”，只需取 $a=0$，$b=2$.

∴　要求的六位数是 865020.

【例 6】　求能被 26 整除的六位数$\overline{x1991y}$.

分析　∵　$26=2\times13$,

∴　$\overline{x1991y}$能分别被 2 和 13 整除.

∴　解此题可以从$2|\overline{x1991y}$入手考虑.

解：∵　$2|\overline{x1991y}$

∴　y 可能取 0、2、4、5、6、8.

又∵　$13|\overline{x1991y}$.

∴　13 能整除$\overline{x19}$与$\overline{91y}$的差.

当　$y=0$ 时,

由于 $13|910$，而 13 又要整除$\overline{x19}$与 910 之差,

∴　$13|\overline{x19}$.

又∵　$\overline{x19}=100x+19=(7\times13+9)x+19$

$=7\times13x+9x+13+6$

∴　根据整除“性质 1”，有 $13|9x+6$,

经试验可知只有当 $x=8$ 时，$13|9x+6$,

∴　当 $y=0$ 时，符合题意的六位数是 819910.

当 $y=2$ 时，因为 $13|\overline{x19912}$，所以 13 整除$\overline{x19}$与 $(910+2)$ 之差，也即 13 整除$\overline{x19}$与 2 之差；与前相仿，$\overline{x19}=7\times13x+13+9x+6$，所以 13 整除 $9x+6-2$,

即　$13|9x+4$.

经试验可知只有当 $x=1$ 时，$13|9x+4$.

∴　当 $y=2$ 时，符合题意的六位数是 119912.

同理，当 $y=4$ 时，$13|9x+6-4$,

即　$13|9x+2$,

经试验可知当 $x=7$ 时，$13|9x+2$.

∴　当 $y=4$ 时，符合题意的六位数是 719914.