数学奥林匹克指导与训练

四川省中小学数学教学研究会
四川省数学会普委会

成都科技大学出版社

数学奥林匹克指导与训练

（初中一年级）

四川省 中小学数学教学研究会 / 数学会普及委员会 编著

主　　编　罗介玲
副 主 编　刘志国
编 写 者　唐贤江　朱志嘉　张培根　李开柯
　　　　　林　云　王志仁　李诗谋　冯仲镛
　　　　　丁晓华　于汉育　张忠辉　刘惠丽
审　　校　肖光基
责任辑编　毕滕弟

成都科技大学出版社

数学奥林匹克指导与训练

四川省 中小学数学教学研究会
数学会普及委员会

成都科技大学出版社出版发行
四川省新华书店经销
成都科技大学印刷厂印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：4.5
1991年6月第1版 1991年9月第1次印刷
字数：97千字 印数：1—10000册
ISBN 7—5615—0847—0/O·62
定价：1.60元

说　明

为了配合初中数第二课堂教学活动的开展，及早培养和发展数学尖子，提高数学质量，我们编写了样本书。

本书共分四部分：数的性质，式的运算，方程和不等式，机智训练。构部分包括基础理论，例题选析，基本训练题等。

本书参照中国数学会普及委员会制定的数学竞赛大纲（草案），以初一代数为基础，并适当加深和拓广，力图通过有关基础知识的阐述，典型例题的剖析，基本题的训练等方式，将初中一年级数学第二课堂数学具体化、程式化，这对如何把握初一学生培训的要求和内容，熟练解竞赛题的技能、技巧，具有一定的指导意义。

由于水平所限，难免有疏漏之处，敬请读者批评指正。

四川省中小学数学教学研究会

四川省数学会普及委员会

一九九一年四月

目　录

一　整数的性质

1. 整除及同余

基础理论

我们知道，被除数＝除数×商＋余数，这个关系式表示了一个重要定理：

对任意两个整数a、$b(b\neq 0)$，总可以找到一对且只有一对整数q、r，使得

$$a=bq+r \quad (o\leqslant r<|b|)$$

成立．

例如，$22=4\times 5+2$．这里 $a=22$，$b=4$，$q=5$，$r=2$．

这个定理所表示的除法和结论叫做带余除法．

在上述关系中，如果$r=0$，即$a=bq$时，我们说，a能被b整除或b能整除a，并记为$b|a$．如4能整除12，可记为$4|12$；当b不能整除a时．记为$b\nmid a$．如3不能整除8，可记为$3\nmid 8$．

当$a=bq$时．b和q都叫做a的约数或因数，又称a是b、q的倍数．

下面，我们对非负整数进行研究（负整数的问题可类似解决），为简便计，以下字母均表示非负整数．

对于给定的整数$b>0$，按余数相同可以把整数分成若干类，称为同余类．若关于除数b，整数m、n有相同的余数，则称m与n关于模b同余，记作$m\equiv n(mod\ b)$．

如$63=5\times12+3$, $38=5\times7+3$, $\therefore$ $63\equiv38(mod5)$，读作63与38关于模5同余.

一般地，对于模 m 而言，应当有m个同余类存在，分别表示为：

$$mt,\ mt+1,\ mt+2,\ \cdots,\ mt+(m-1)t\ \ (t\text{为整数}).$$

任何一个整数必定属于并且也仅属于其中的一个同余类. 特别地，按模2分类，就得奇数与偶数两类；如按模3分类，可以得如下三类：$3t$，$3t+1$，$3t+2$或$3t-1$（t 为整数）；等等. 利用同余给我们解决问题提供了方便.

整数的整除性有以下一些基本性质：

(1) 若$b|a$，$a|c$，则$b|c$.

证明：$\because$ $b|a$，$\therefore$ $a=b\cdot q_1$.

又$a|c$，$\therefore$ $c=aq_2$.

于是有 $c=aq_2=bq_1q_2=b(q_1q_2)$. $\therefore$ $b|c$.

例如，$4|12$，$12|24$，$\therefore$ $4|24$.

(2) 若$b|a$，且$c\neq0$，则$bc|ac$.

例如，$3|15$，$\therefore$ $3\times2|15\times2$，即$6|30$.

(3) 若$b|a$，$b|c$，则$b|(a+c)$，$b|(a-c)$.

例如，$5|25$，$5|10$，则$5|(25\pm10)$.

更一般地，若$b|a_1$，$b|a_2$，…，$b|a_n$，则

$$b|m_1a_1\pm m_2\pm\cdots\pm m_2a_na_n.$$

例如，$3|36$，$3|12$，$3|9$，则$3|5\times36\pm3\times12\pm3\times9$.

这里要注意，性质3反面不一定成立，特别当两数a与 b的和能被c整除时，这两数a、b不一定能被c整除. 如$17+8=25$能被5整除，但17、8不能被5整除.

(4) 两个连续整数之积能被2整除，三个连续整数之积能

被6(即$1\times2\times3$)整数，…n个连续整数之积能被$1\times2\times3\times\cdots\times n$整除．

(5) 如果a与b被c除有相同的余数，那么a与b之差能被c整除，即若$a\equiv b(\mathrm{mod}\,c)$，则$c\mid(a-b)$．

例如，$49=6\times8+1$，$37=6\times6+1$，$\therefore$ $49\equiv37(\mathrm{mod}\,6)$．故 $6\mid(49-37)$．

例题选析

例1 求证：三个连续的整数之积能被6整除．

证明：设三个连续的整数分别为$n-1$，n，$n+1$（n为自然数）．

$\because$ 两个连续的整数中必有一系数，

$\therefore$ $2\mid(n-1)n(n+1)$．

又三个连续整数中一定有一个被3整数的整数，

$\therefore$ $3\mid(n-1)n(n+1)$．

又$\because$ 2、3互质，$\therefore$ $3\times2\mid(n-1)n(n+1)$，

即 $6\mid(n-1)n(n+1)$．

例2 若2836，4582，5164，6522四个整数都被同一个正整数相除时所得的余数相同，但不为零，求除数和余数．

解：设除数为m，余数为r（m、r为正整数，且$r<m$），则

$$2836=ma+r, \tag{1}$$

$$4582=mb+r, \tag{2}$$

$$5164=mc+r, \tag{3}$$

$$6522=md+r \tag{4}$$

（a、b、c、d为正整数）．

(2)－(1)，得 $(b-a)m=1746$．

(4)－(3)，得 $(d-c)m=1358$．

因1746，1358都能被m所整除，所以m是1746与1358的公因数．而$1746=2\times3^2\times97$，$1358=2\times7\times97$，所以$m_1=2$，$m_2=97$，$m_3=194$．

当$m_1=2$时，$r=0$，∴ $m_1=2$舍去．

当$m_2=97$时，$r=23$．当$m_3=194$时，$r=120$．

故除数为97，余数为23；或除数为194，余数为120．

2．素数、合数

基础理论

我们考察正整数的正因数个数，可以发现：

1这个数只有1个因数，就是它本身．任何大于1的正整数，都至少有两个因数：1和它本身．我们可根据一个数的正因数的多少给出素数和合数的定义．

(1) 素数

一个大于1的正整数，除了1和它本身外，如果再也没有其他正因数，我们就把这样的正整数叫做素数或质数．

例如，2、3、5、7、11、13、17、19、23等都是素数．

(2) 合数

一个大于1的正整数，除了1和它本身外，如果还至少有一个因数，这样的正整数叫做合数．

例如，4、6、8、9、10、12、14、15等都是合数．

(3) 正整数的分类

按照素数和合数的定义，可以把全体正整数分成如下三类：①数1；②全体素数；③全体合数．

(4) 质数因数

如果一个正整数a，有一个因数b，而b又是素数，则b叫做a的质因数．

例如，15＝3×5，3和5都是15的因数，且都是素数，因此都是15的质因数.

例题选析

例1 对于任何大于1的自然数n，试证n^4+4是合数.

分析：要证明一个数是合数，就要证明该数除被1和本身整除外，还能被另一个自然数整除，这就应该将n^4+4分解因式去考虑.

略证：$\because$ $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$

$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2),$$

$$n^2-2n+2>1,\ n^2+2n+2>1,$$

$\therefore$ 原题得证.

评注：本题中必须提出$n^2-2n+2>1$及$n^2+2n+2>1$，否则n^4+4是合数的理由不充分.

例2 如果p是一个素数($p\geqslant5$)，证明对于任何p，p^2-1是24的倍数.

证明：素数$p\geqslant5$，一定可以写成$p=4m\pm1$，且当$p=4m+1$时，$m\neq3k+2$；当$p=4m-1$时，$m\neq3k+1$.

$\therefore$ $p^2-1=(4m\pm1)^2=1-16m^2\pm8m=8m(2m\pm1)$.

当$m=3k$时，$8m$是24的倍数；

当$m=3k+1$时，$2m+1$是3的倍数. $\therefore$ p^2-1是24的倍数；

当$m=3k+2$时，$2m-1$是3的倍数，$\therefore$ p^2-1是24的倍数.

因此，不论何种情况，p^2-1都是24的倍数.

例3 p为何值时，正整数p，$p+10$，$p+14$都是质数？

解：若$p>3$时，则$p=3k+1$或$3k+2$. 当$p=3k+1$时，$p+14=3k+1+14=3(k+5)$不是质数；当$p=3k+2$时，$p+10=3k+2+10=3(k+4)$也是是质数. 所以只有当$p=3$时，3，13，17均为质数.

3. 最大公约数和最小公倍数

基础理论

(1) 最大公约数

对于 n 个正整数a_1, $a_2\cdots a_n$, 如果存在某一个正整数k, 都能整除它们, 则称数 k 是这 n 个数的公约数. 如果 n 个正整数的公约数不只一个, 那么其中必有一个最大. 我们把这个最大的公约数, 叫做这 n 个正整数的最大公约数, 可表示成: $(a_1, a_2, \cdots a_n)=d$.

例如, 36和24的公约数有2、3、4、6、12. 其中12是最大公约数. 可表示成: $(36, 24)=12$.

求 n 个数的最大公约数, 一般是先把这些数分别分解成质因数, 然后取它们所公有的质因数之积(相同的质因数按公有的个数取).

容易看出, 2、2、3是这三个数所公有的, 它们的乘积 $2\times2\times3=12$就是这三个数的最大公约数. 可表示成: $(48, 60, 72)=12$.

如果 n 个数的最大公约数为1, 则称这 n 个数互质. 例如, $(36, 25)=1$.

结合整除还有如下性质:

(1) 若$b|ac$, 且$(b, a)=1$, 则$b|c$.

如$3|5\times9$, $(3, 5)=1$, 则$3|9$.

(2) 若$b|c$, $a|c$, 且$(b,a)=1$, 则$ab|c$.

如$3|12$, $4|12$, 且$(3,4)=1$, 则$3\times4|12$.

(2) 最小公倍数

如果一个正整数, 能被 n 个数整除时, 那么这个数叫做这 n 个数的公倍数. n 个数的公倍数有无限多个(任意一个

公倍数的任意整数倍都是这 n 个数的公倍数），其中必定有一个最小的．这个最小的就叫做这 n 个数的最小公倍数．n 个数a_1，a_2，…，a_n的最小公倍数m表示成：$\{a_1, a_2\cdots, a_n\}=m$．例如，$\{4,6\}=12$．

求n个数的最小公倍数，仍然先将各个数分别分解质因数，然后将所有不同的质因数及个数最多的相同质因数相乘即得．

例题选析

例1 求48、60和72的最大公约数．

解 $\because$ $48=2\times2\times2\times2\times3=2^4\times3$,

$60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$,

$72=2\times2\times2\times3\times3=2^3\times3^2$,

$\therefore$ 48，60，72的最大公约数是$2^2\times3$，即12．

例2 求108、28和42的最小公倍数．

解：$\because$ $108=2^2\times3^3$，$28=2^2\times7$，$42=2\times3\times7$．

$\therefore$ $\{108, 28, 42\}=2^2\times3^3\times7=756$．

易容看出，求两个数的最小公倍数也可利用两个数之积除以它们的最大公约数．如

$$\{108,28\}=\frac{108\times28}{(108,28)}=\frac{108\times28}{4}=756.$$

对一些实际问题，可利用最大公约数和最小公倍数来解．

例3 一块钢板，长135cm，宽105cm．现要把它截成同样大小的正方形，正方形要最大的，并且不许剩下钢板．试求正方形的边长．

分析：因为不准剩下钢板，这就表示正长方形的边要既

能整除原钢板的长，又要能整除钢板的宽，实际上就是求长和宽的公约数．正方形要求最大，就是要求最大公约数．

解：∵ $135=3^3\times5$，$105=3\times5\times7$，

∴ $(135, 105)=15$，

即正方形的边长是15cm．

例4 甲乙两个齿轮，互相衔接．甲轮有360个齿，乙轮有240个齿，甲轮的某一个齿和乙轮的某一个齿相接触后到再次接触，最少各要转多少周？

分析：要求最少各转多少周，必须先求出甲乙二轮各要转过多少齿．这就要求出甲轮的齿数(360)和乙轮的齿数(240)的最小公倍数．

解：∵ $360=2^3\times3^2\times5$，$240=2^4\times3\times5$，

∴ $\{360, 240\}=2^4\times3^2\times5=720$，

所以甲轮转 $720\div360=2$(周)，乙轮要轮 $720\div240=3$(周)．

4．十进制整数的表示法

基础理论

我们现在学习的整数，是属于“十进制”．它是由0、1、2，…，9中的数码组成．同一个数码，放在不同的位置，就表示不同的数．如数码2，把它放在个位上，它表示2；把它放在十位上，它则表示20；放在千位上，则表示2000；等等．这就是“十进制”．数的进退位法则是“逢十进一、退一当十”．除“十进制”数外，还有“二进制”、“六进制”、“八进制”等数．我们常见的时钟便是“六十进

制”．进位制中所用数码的个数，称为这种进位制的基数．如十进制的基数为十，因为它是由十个数码组成；二进制的基数为2，它仅由两个数码0和1组成；等等．

任何一个十进制整数，均可表示成10的方幂的形成．如
$327=3\times10^2+2\times10^1+7\times10^0$ （规定$10^0=1$）．

一般地，对于一个$n+1$位正整数$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$，其中，$a_n$，$a_{n-1}$，…，$a_2$，$a_1$，$a_0$表示0，1，2，…，9中的某一个数码，$a_n\neq0$，可表示成：

$$N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0.$$

实际上，任何一种进位制数，都可表示成它的“基数”的方幂的形成．

例题选析

例1 找出所有以6为首位，而具有下述性质的正整数：若将原数的首位去掉，那么形成的新数是原数的$\frac{1}{25}$．

解：已知首位数字为6的整数可以设为$6\times10^n+y$，其中y是n位的整数，那么去掉首位后的新数就是y．根据题意，得

$$6\times10^n+y=25y,$$

即
$$y=\frac{6\times10^n}{24}=\frac{1}{4}\times10^n.$$

当$n\geqslant2$时，y为整数．故原整数为 $6\times10^n+\frac{1}{4}\times10^n$（$n\geqslant2$的整数），具有题设性质的最小正整数为625．

例2 有一个四位数，已知其十倍数字减去2等于其个位数字，其个位数字加上了等于其百位数字，把这个四位数的四个数字反着次序排列成的数与原数之和等于8877．试求这个四位数．

解：可设所求的四位数为$a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$，根据题意，得

$$(a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d)+(d\times10^3+c\times10^2+b\times10+a)=8877.$$

比较等式两边首、末两位数字，得 $a+d=7$．

于是 $b+c=17$．

又∵ $c-2=d$，$d+3=b$，∴ $b-c=1$．

从而解得 $a=1$，$b=9$，$c=8$，$d=6$．

故所求的四位数为1986．

5．能被一些特殊数整除的数的判别法

基础理论

(1) 能被2或5整除的数

法则：凡末位数字能被2或5整除的数，能被2或5整除．

证明：对于数$N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a\times10+a$，

因为数N右边前n项均能被2或5整除，如果a_0被2或5整除，那么根据整除的性质3知，数N能被2或5整除。

(2) 能被4或25整除的数

法则：如果一个数的末两位数码组成的两位数（原顺序不变）能被4或25整除，那么这个数就能被4或25整除．

证明方法同(1). 请同学们自己证明。

(3) 能被8或125整除的数

法则：如果一个数的末三位数码组成的三位数（原顺序不变）能被8或125整除，那么这个数能被8或125整除。

一般地，凡末 n 位数码组成的 n 位数（原顺序不变）能被 2^n 或 5^n 整除的数，一定能被 2^n 或 5^n 整除。

(4) 能被3或9整除的数

法则：如果一个数，各位数码之和能被3或9整除，那么这个数能被3或9整除。

证明：对于数 $N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2$
$$+a_1\times10+a_0,$$

将它变形为

$$\begin{aligned}N&=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\cdots+a_2(10^2-1)\\&\quad+a_1(10-1)+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)\\&=a_n\times\underbrace{99\cdots99}_{n个}+a_{n-1}\times\underbrace{99\cdots99}_{(n-1)个}+\cdots+a_2\times99\\&\quad+a_1\times9+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0).\end{aligned}$$

容易看出，N的右端前 n 项中每一项均能被3或 9 整除. 如果后$n+1$项(即各位数码之和)能被3或9整除，那么，根据整数的整除性质3知，数N能被3或9整除。

(5) 能被7、11、13整除的数

法则：一个多于三位数码的数N，截去它的千位以下的数后（不必添0），所得的新数为N_1. 如果N_1与被截下的三位数之差能被7、11、13整除，则数N能被7、11、13整除.

此法则的证明较繁，这里不作证明.

一个整数能否被11整除，还可用下面的方法判别：奇数

位数码和与偶数位数码和之差能被11整除的整数一定能被11整除．如380237，因为 $(8+2+7)-(3+0+3)=11$，所以 $11 \mid 380237$．

如果一个数位较多的数，求得的差不易判断时，可重复使用上法．

例题选析

例1 判断2580能否被4或25整除．

解：$\because$ $4 \mid 80$，$25 \nmid 80$，

$\therefore$ $4 \mid 2580$，$25 \nmid 2580$．

例2 判断347250能否被8或125整除．

解 $\because$ $8 \nmid 250$，$125 \mid 250$，

$\therefore$ $125 \mid 347250$，$8 \nmid 347250$．

例3 判断数12456能否被3或9整除．

解：$\because$ $1+2+4+5+6=18$，$3 \mid 18$，$9 \mid 18$，

$\therefore$ $3 \mid 12456$，$9 \mid 12456$．

事实上，$12456=3\times 3\times 1384$．

例4 判断380237能否被7、11、13整除．

解：由判断法则，$380-237=143=11\times 13$，

$\therefore$ $11 \mid 380237$，$13 \mid 380237$，$7 \nmid 380237$．

例5 判断143645432能否被7、11、13整除．

解：设 $N=14364532$，则 $N_1=143645$，$N_1-432=143218$．这个数不易判断，再使用判别法则，有

$$218-143=70.$$

$\because$ $7 \mid 70$，$\therefore$ $7 \mid 143645432$，11或$13 \nmid 143645432$．

值得指出的是，①上述每一判别法则的逆命题也是成立的，其证明方法大同小异；②在以后解题时不仅可以直接应