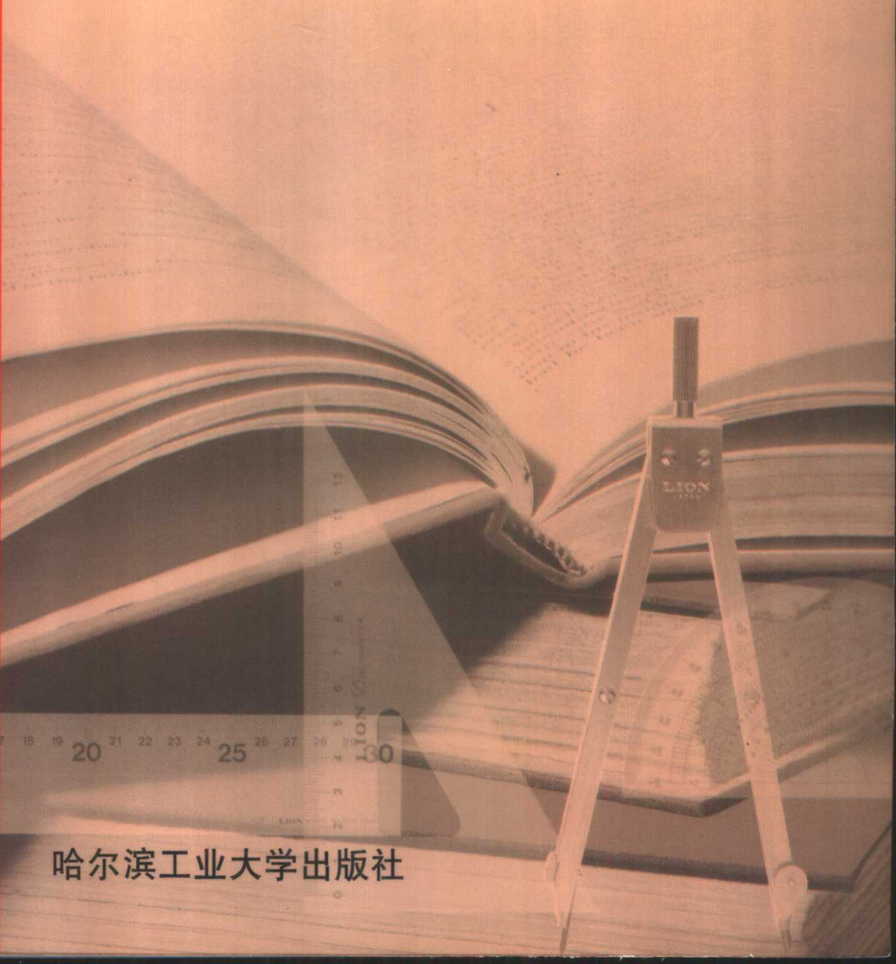
高等师范院校数学系列教材

数学建模

（下册）

么焕民　孙秀梅　孟凡友　编著



哈尔滨工业大学出版社

高等师范院校数学系列教材

数学建模

（下册）

么焕民　孙秀梅　孟凡友　编著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内 容 提 要

本书是高等师范院校数学系列教材之一《数学建模》的下册，全书共七章，内容包括：线性规划数学模型；对策模型；决策模型；社会经济管理领域中的数学模型；生物遗传领域中的数学模型；其他领域中的数学模型；数学建模竞赛介绍。每章后均配有一定数量的习题。

本书内容新颖、系统，选材深浅适度，文字通俗易懂，便于自学。本书可作为高等师范院校及成人教育本、专科学生的教材，也可供其他相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模．下册/么焕民等编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003.4

ISBN 7-5603-1852-5

Ⅰ．数…　Ⅱ．么…　Ⅲ．数学模型-高等学校-教材　Ⅳ．022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025336 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真	0451-6414749
印　　刷	黑龙江地矿部测绘印制中心
开　　本	850×1 168　1/32　印张 8.625　字数 224 千字
版　　次	2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-5603-1852-5/O·145
印　　数	1～4 000
总 定 价	30.00 元

序

随着科学技术的发展，数学的应用范围日益广泛，不但在自然科学的各个分支中应用，而且在社会科学的很多分支中也有应用。毋庸置疑，数学自身的发展水平深刻地影响着人们的思维方式。

众所周知，数学创新、数学应用、数学传播是数学教学工作者的三大基本任务，为了适应现代教育发展的需要，我国高等师范院校的数学教育专业改为数学与应用数学专业（师范类），由此导致课程设置必将发生根本的变化。如何开设应用数学课，如何应用计算机进行数学教学，如何改革数学教育的传统课程，都是有待进一步探讨的问题；相应的数学教材，更有待改革和完善。为此，黑龙江省高等师范院校数学教育研究会，组织哈尔滨师范大学、齐齐哈尔大学理学院、牡丹江师范学院、佳木斯大学理学院四所本科师范院校的数学教育工作者，在多年教学实践基础上，集中对应用数学、计算机数学及数学教育等课程进行研讨，编写了“高等师范院校数学系列教材”，以适应高等师范教育发展的需要。

这套教材主要包括：形成体系的教材，如《数学建模（上、下册）》、《数学实验（上、下册）》、《离散数学》；具有师范特色的教材，如《中学数学教学论》、《中学数学方法论》、《中学数学解题方法》；融入教师教学体会和教学成果的专著性的教材，如《教学过程动力学》。这套教材，力求在保持师范特色的同时，突出应用数学和计算机数学，以期成为高等师范院校本科数学教育专业一套实用的教材，这是我们的主要目的。

我们清楚地知道，我们追求的目标不易达到，不过，通过我们的努力，引起共鸣，经过同仁的一起努力，目标总会到得早些。

黑龙江省高等师范院校
数学教育研究会理事长

王玉文

2002年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　　言

近几年来,随着数学模型课程在大专院校教学中的不断普及,有不少优秀的数学模型教材问世,但这些教材大多是针对理工科学生编写的,对于高师院校的学生来讲,其中许多内容的专业性过强,学习和掌握起来比较困难,因此迫切需要一本更适合于高师院校本科学生使用的数学建模教材。为此,受黑龙江省高等师范院校数学教育研究会的委托,我们几位多年从事数学模型教学工作的教师,总结各自的教学经验,在原有讲稿的基础上编写了这本《数学建模》教材。

下册内容包括:线性规划数学模型;对策模型;决策模型;社会经济管理领域中的数学模型;生物遗传领域中的数学模型;其他领域中的数学模型;数学建模竞赛介绍。各校使用时可根据各自的特点和需要取舍其中的内容,以适应不同的教学需要。附录中详细介绍了我国有关大学生数学建模竞赛的文件,并选编了一些优秀参赛论文,供读者浏览,以便于读者了解大学生数学建模竞赛的方方面面。

学习本书所必须的数学基础是微积分、线性代数、常微分方程、运筹学和计算方法等,这是一般高等师范院校的学生都具备的。本书可作为高等师范院校本科学生的教材,亦可作为高等师范院校及成人教育本、专科学生的教材,还可供其他相关人员参考。

本书第一章1.1、1.2、1.3、1.4、1.5、1.6、第二章、第三章由孙秀梅编著，第一章1.7、第四章、第六章由么焕民编著，第五章、第七章由么焕民、孟凡友编著。全书由么焕民统编定稿。

作者特别感谢哈尔滨师范大学数学与计算机科学学院院长王玉文教授及佳木斯大学理学院院长陈永祺教授在本书编写过程中给予的热情帮助与支持。

由于作者水平有限，书中疏漏或不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

2003年1月

目　录

第一章　线性规划数学模型 ………………………………… (1)
1.1　线性规划问题 ………………………………… (1)
1.2　线性规划问题的基本概念 ………………………………… (6)
1.3　两个变量的线性规划问题的图解法 ………………………………… (10)
1.4　单纯形法 ………………………………… (14)
1.5　整数线性规划 ………………………………… (20)
1.6　线性规划的对偶问题 ………………………………… (24)
1.7　动态规划模型 ………………………………… (40)
习题一 ………………………………… (58)
第二章　对策模型 ………………………………… (65)
2.1　对策的基本概念 ………………………………… (65)
2.2　矩阵对策模型 ………………………………… (67)
2.3　混合策略对策模型 ………………………………… (71)
习题二 ………………………………… (73)
第三章　决策模型 ………………………………… (75)
3.1　决策的基本概念及分类 ………………………………… (75)
3.2　风险型决策模型 ………………………………… (76)
3.3　不确定型决策模型 ………………………………… (81)
3.4　层次分析法 ………………………………… (86)
习题三 ………………………………… (94)
第四章　社会经济管理领域中的数学模型 ………………………………… (99)
4.1　统计指数模型 ………………………………… (100)
4.2　新产品推广模型 ………………………………… (107)

4.3 价格调整模型 …………………………………… (109)
4.4 经济增长与稳定发展模型 ………………………… (110)
4.5 物流管理领域中的数学模型 ……………………… (117)
4.6 生产管理领域中的优选法模型 …………………… (125)
4.7 投资、产值与需求关系数学模型 ………………… (128)
习题四 ……………………………………………… (133)
第五章 生物遗传领域中的数学模型 ………………… (135)
5.1 概论 ……………………………………………… (135)
5.2 生物基因遗传理论 ……………………………… (137)
5.3 生物基因进化的群体遗传模型 …………………… (140)
5.4 马尔柯夫链数学模型 …………………………… (145)
5.5 电神经生理脉冲传导数学模型
——Hodgkin - Huxley 方程(H - H 模型)……………… (152)
习题五 ……………………………………………… (156)
第六章 其他领域中的数学模型 ……………………… (157)
6.1 开放性思维智巧建模 …………………………… (157)
6.2 恶狼捕食兔子问题 ……………………………… (163)
6.3 传染病流行的控制模型 ………………………… (165)
6.4 湖泊污染减退模型 ……………………………… (168)
6.5 图论方法在数学模型中的运用 …………………… (171)
6.6 自由落体的速度与位移模型 ……………………… (180)
6.7 椅子在不平坦地面上的稳定问题 ………………… (183)
6.8 战争模型 ………………………………………… (186)
习题六 ……………………………………………… (200)
第七章 数学建模竞赛介绍 …………………………… (202)
7.1 美国大学生数学模型竞赛 ………………………… (203)
7.2 我国大学生数学建模竞赛 ………………………… (205)
7.3 我国大学生数学建模竞赛优秀论文选评 ………… (208)

附 录 …………………………………………………………… (251)
附录 1 关于进行“电子设计”等四项竞赛筹备工作的通知 …
…………………………………………………………… (251)
附录 2 关于组织数学建模、机械设计、电子设计竞赛的通知
…………………………………………………………… (253)
附录 3 关于组织数学建模竞赛的通知 ………………… (254)
附录 4 关于举办数学建模研讨班的通知 ……………… (255)
附录 5 关于成立第二届全国大学生数学建模竞赛组委会
的通知 …………………………………………………… (256)
附录 6 全国大学生数学建模竞赛章程(一九九四年) … … …
…………………………………………………………… (257)
附录 7 全国大学生数学建模竞赛章程(一九九七年) … … …
…………………………………………………………… (260)
附录 8 全国大学生数学建模竞赛异议期制度的若干规定 …
…………………………………………………………… (263)
附录 9 第一届全国大学生数学建模竞赛组委会成员名单 …
…………………………………………………………… (264)
附录 10 第二届全国大学生数学建模竞赛组委会成员名单 …
…………………………………………………………… (265)
参考文献 ………………………………………………………… (266)

第一章　线性规划数学模型

- 线性规划问题
- 线性规划问题的基本概念
- 两个变量的线性规划问题的图解法
- 单纯形法
- 整数线性规划
- 线性规划的对偶问题
- 动态规划模型

线性规划是科学及工程领域广泛应用的数学模型，是研究在一组线性约束条件下，把一个线性函数极小化或极大化的问题，而对解决这类条件极值问题，一般的极值理论是无能为力的。线性规划数学模型及相应的理论给出了求解此类问题的有效算法——单纯形法。随着电子计算机的普及，线性规划模型的应用更加广泛，而它的理论和方法在应用过程中日臻完善。

在本章中，我们通过几个典型的实例引出线性规划问题，给出其数学模型及解决此类模型的一般理论和方法。

1.1　线性规划问题

首先考察几个实例。

【例 1.1】（生产安排问题）

某工厂利用 A_1、A_2、A_3 三台设备生产 B_1、B_2、B_3 三种不同的产品。在各台设备上每生产一件产品所需要的加工时间(单位:min)、

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

各台设备每天的生产能力(每天的工作时间)以及每件产品的单位利润如表 1.1 所示。问怎样安排生产才能使每天获得的利润最大?

表 1.1

设备	每件产品的加工时间 /min			设备的生产能力 / $(\mathrm{min} \cdot \mathrm{d}^{-1})$
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	1	1	420
A_2	3	0	2	450
A_3	2	1	2	430
利润 /(元 · 件$^{-1}$)	2	1	1.5	

【分析】 假设每天生产 B_1、B_2、B_3 三种产品分别为 x_1、x_2、x_3 件,那么每天的利润应为

$$S = 2x_1 + x_2 + 1.5x_3$$

又由于每台设备都不能超过它的生产能力,所以,应满足条件

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 420 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 \leqslant 450 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 430 \end{cases}$$

再考虑到每种产品的件数都不可能是负值,即 $x_j \geqslant 0 (j = 1,2,3)$。

综上所述,这个生产安排问题可归结为

$$求 \quad x_j \quad (j = 1,2,3)$$

满足

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 420 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 \leqslant 450 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 430 \\ x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,2,3 \end{cases}$$

使目标函数

$$S = 2x_1 + x_2 + 1.5x_3$$

的值最大。

【例 1.2】（运输问题）

设有两个砖厂 A_1、A_2，其产量分别为 23 万块与 27 万块；它们生产的砖供应 B_1、B_2、B_3 三个工地，其需要量分别为 17 万块、18 万块和 15 万块；而自各生产地到各工地的运价如表 1.2 所示。

表 1.2

运价 砖厂＼工地	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问应如何调运，才能使总运费最省？

【解】 设 x_{ij} 表示由砖厂 A_i 运往工地 B_j 砖的数量（单位：万块）（$i = 1,2; j = 1,2,3$），例如 x_{11} 表示由砖厂 A_1 运往工地 B_1 砖的数量等，依次类推，如表 1.3 所示。

表 1.3

砖厂＼工地	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量	17	18	15	50

由题意知，A_1、A_2 运往三工地的总数分别为 23、27，即得

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27$$

由于三工地 B_1、B_2、B_3 的需求量分别是 17、18、15，即得

$$x_{11}+x_{21}=17$$
$$x_{12}+x_{22}=18$$
$$x_{13}+x_{23}=15$$

因此,调运必须满足下列条件

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=23\\x_{21}+x_{22}+x_{23}=27\\x_{11}+x_{21}=17\\x_{12}+x_{22}=18\\x_{13}+x_{23}=15\\x_{ij}\geqslant 0\qquad i=1,2;j=1,2,3\end{cases}$$

满足这个约束条件的调运方案很多,我们希望在这些方案中找到一个运费最少的方案,即

求一组变量 x_{11}、x_{12}、x_{13}、x_{21}、x_{22}、x_{23} 的值,使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=23\\x_{21}+x_{22}+x_{23}=27\\x_{11}+x_{21}=17\\x_{12}+x_{22}=18\\x_{13}+x_{23}=15\\x_{ij}\geqslant 0\qquad i=1,2;j=1,2,3\end{cases}$$

并使目标函数 $S=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$ 的值最小(即总运费最少)。

【例 1.3】 (下料问题)

某工厂有一批长度为 300 cm 的钢管(数量充分多),要把它们截成长度为 45 cm、80 cm 和 95 cm 的管料,并要求其根数按 5 : 3 : 2 的比例来配套生产某种零件。问采用怎样的方案进行锯割,才能使得到的三种管料既能配套,又能使残料最少。

【解】　首先,我们用表 1.4 列出可能的各种截法。

表 1.4

截　法		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
长度	45 cm	6	4	4	3	2	2	1	1	0	0
	80 cm	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
	95 cm	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
残　料		30	40	25	5	35	20	15	0	30	15

设 $x_j(j = 1,2,\cdots,10)$ 表示按照第 j 种截法锯割的钢管的根数,那么截出的长 45 cm 管料的根数为

$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + x_8$$

截出的长 80 cm 管料的根数为

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_8 + x_9$$

截出的长 95 cm 管料的根数为

$$x_3 + x_5 + 2x_6 + x_8 + 2x_9 + 3x_{10}$$

此时,残料的长度为

$$30x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 5x_4 + 35x_5 + 20x_6 + 15x_7 + 30x_9 + 15x_{10}$$

于是,我们要解决的问题归结为下列数学形式。

求满足条件

$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + x_8 = 5a$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 = 3a$$

$$x_3 + x_5 + 2x_6 + x_8 + 2x_9 + 3x_{10} = 2a$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,2,\cdots,10$$

的 x_j,使得

$$f = 30x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 5x_4 + 35x_5 + 20x_6 + 15x_7 + 30x_9 + 15x_{10}$$

取最小值。(这里不妨设 $a = 1$,如果 x_j 不是整数,只要取这些分数分母的最小公倍数即可)

上面我们建立了生产问题、运输问题、下料问题的数学模型，在实际中，还有诸如布局问题、分派问题等，这些问题虽然各式各样，但它们的数学模型却有相同的数学形式，即求一个线性函数的最大值(或最小值)，而这个线性函数的变量是非负的，且满足一组线性等式或不等式。我们把具有这种模型的问题，称为线性规划问题。

线性规划问题的数学模型的一般形式为

$$\max(\text{或}\ \min) S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

它的变量满足

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_j \quad (\text{或} \geqslant b_i\ \text{或} = b_i) \qquad i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

1.2 线性规划问题的基本概念

线性规划问题的数学模型有许多种。目标函数有求最小值的，有求最大值的；约束条件有的是“$\leqslant$”形式的，也有“$\geqslant$”或“$=$”形式的。我们希望能把各种不同形式的线性规划问题的数学模型化为一种统一的标准形式，这样只要对标准形式找出一种解法，就可以解决其余不同形式的线性规划问题了。

一、线性规划问题的标准形式

我们规定下列形式的线性规划问题化为标准形式

$$\max S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中 c_j、a_{ij}、b_i 均为常数，且 $b_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$。

此标准形式可以写成矩阵的形式

$$\max S = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

二、怎样把线性规划问题的非标准形式化为标准形式

(1) 如果目标函数是求 $\min S = \boldsymbol{CX}$，则只需要令 $S' = -S$，则 $\max S' = -\boldsymbol{CX}$，对求得的 S' 值取反号，便可得到原问题的最小值。

(2) 如果第 r 个约束条件为

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n \leqslant b_r$$

则引入松弛变量 $x_{n+r} \geqslant 0(r = 1,2,\cdots,m)$，便可将上式化为

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n + x_{n+r} = b_r$$

(3) 如果第 k 个约束条件为

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geqslant b_k$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com