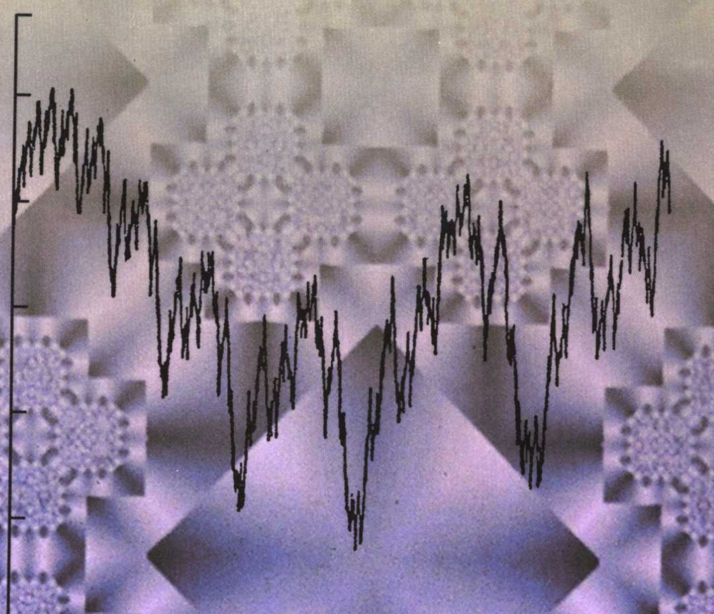
中国科学院先进制造研究与发展基金支持项目

近代实变函数论与泛函分析

聂义勇　李长军　苏丽杰　于　军　李富明　编著



NEUPRESS
东北大学出版社

中国科学院先进制造研究与发展基金支持项目

近代实变函数论与泛函分析

聂义勇　李长军　苏丽杰　于　军　李富明　编著

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

近代实变函数论与泛函分析/聂义勇等编著 .—沈阳:东北大学出版社,2002.9

ISBN 7-81054-796-8

Ⅰ.近… Ⅱ.聂… Ⅲ.①实变函数论 ②泛函分析 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 027855 号

出 版 者:东北大学出版社
(邮编:110004 地址:沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)
出 版 人:李毓兴
印 刷 者:沈阳农业大学印刷厂
发 行 者:东北大学出版社发行
开　　本:787mm×1092mm 1/16
字　　数:512 千字
印　　张:19.75
出版时间:2002 年 9 月第 1 版
印刷时间:2002 年 9 月第 1 次印刷
责任编辑:张德喜
责任出版:杨华宁
封面设计:唐敏智

定　　价:30.00 元

垂询电话:024—83680267(社务办) 024—83680265(传 真)
83687331(发行部) 83687332(出版部)
E-mail:neuph@neupress. com
http://www. neupress. com

目　录

实变函数论

泛函分析

实变函数论

第一章 集和点集

§1 集及其运算

1. 集的概念 在现代数学中，人们已经越来越广泛而深入地用到集的概念. 通常把在一定场合所考察、研究的某些对象的全体称为一个集. 例如，自然数全体、偶数全体或素数全体所形成的数集；又如 $-1,2,5$ 这三个数组成的数集；平面上第一象限里点的全体所成的点集，等等. 一般地，由具有某种特定性质的具体的或抽象的事物之全体组成**一集**(或者称做**集合**)，其中的成员称做这个集的**元素**.

例如，在代数学中，群、环、域等都是某种集，这种集的各个元素之间具有一定的代数关系；在几何学中，直线、曲线、曲面等都可以看做是由点所组成的点集；数学分析中的实数集、连续函数集、某函数的定义域等都是常用的集.

集是数学的一个基础概念. 集论①是研究集的一般性质的，属于数学基础的一个分支. 关于集和元素的严谨的定义，集论的研究范围，这里不予涉及.

以后常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集，而用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示元素.

对于一个集 A 来说，某一事物 x 或者是集 A 的元素——这时，称 x **属于** A，记为 $x\in A$；或者 x 不是集 A 的元素——即 x 不属于 A，记为 $x\overline{\in} A$；二者必居其一.

当集 A 是具有某性质 P 的元素全体时，往往用下面的形式来表示：

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，方程 $x^2-1=0$ 的解 x 的全体组成的数集是 $\{x\mid x^2-1=0\}$. 如果能够明确写出集 A 的所有元素，也可以都列举在大括号里面，例如，上面这个数集就是 $\{1,-1\}$. 有时也把集 $\{x\mid x\in E, x\text{ 有性质 }P\}$ 改写成 $E(x\text{ 有性质 }P)$. 例如，设 $f(x)$ 是 E 上的一个函数，c 是一个实数，通常把集 $\{x\mid x\in E, f(x)\leqslant c\}$ 写成 $E(f(x)\leqslant c)$.

下面研究集的关系.

如果集 A 中的元素都是集 B 的元素，那么称 A 是 B 的**子集**，记做 $A\subset B$，读做 A 包含在 B 中，或记做 $B\supset A$，读做 B 含有 A. 显然，$A\subset A$. 有时为研究问题的需要，引入不含有任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$ 或 0. 例如，$\{x\mid x\text{ 是实数且 }x^2+1=0\}$ 是一空集. 规定空集是任何

① 集论的重要文献首先是德国数学家 G. Cantor(康托尔)在 19 世纪末发表的，后来逐步发展成为数学的一个分支，集论中的某些概念和结果成为近代数学中许多分支的基础.

集的子集.如果 $A \subset B$,而 B 中确有元素 b 不属于 A,称 A 是 B 的**真子集**.例如,A 是平面上以正有理数做半径的圆的全体,B 是平面上所有圆的全体,那么 A 是 B 的一个真子集.

如果 $A \subset B$,而且又有 $B \subset A$,这时 A, B 由相同的元素组成,就是同一集,称 A 等于 B(或 B 等于 A),记做 $A = B$(或 $B = A$).例如,$\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{1, -1\}$.

2. 集的运算　设 A, B 是两个集,由集 A 同集 B 的一切元素所组成的集称做 A 同 B 的**和集**,简称为"和",记做 $A \cup B$(见图 1.1);所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集,称为 A 和 B 的**通集**,也简称为"通"或"交",记做 $A \cap B$(见图 1.1).

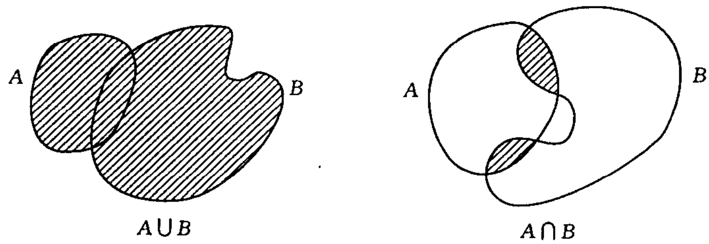


图 1.1

完全类似地可以定义任意个集的和集及通集.设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in N\}$ 是任意一组集,其中 α 是集的指标,它在某个固定的指标集 N 中变化,由一切 $A_\alpha (\alpha \in N)$ 的所有元素所组成的集称做这组集的和集,记做 $\bigcup_{\alpha \in N} A_\alpha$,也记为 $\sum_{\alpha \in N} A_\alpha$;同时属于每个集 $A_\alpha (\alpha \in N)$ 的一切元素所组成的集,称做这组集的通集,记做 $\bigcap_{\alpha \in N} A_\alpha$ 或 $\prod_{\alpha \in N} A_\alpha$.

应该注意,在组成若干个集的和集时,同时是两个或两个以上的集所公有的元素在和集中只算做一个.另外,当 $A \cap B = \varnothing$ 时,又简称为 A 与 B 不交.当 $A \cap B \neq \varnothing$ 时,简称为 A 与 B 相交.

不难证明"和"、"通"运算具有下面一些性质。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A$(和、通的幂等性);
2. $A \cup \varnothing = A$(空集是加法的零元);
3. $A \cup B = B \cup A$(和的交换律);
   $A \cap B = B \cap A$(通的交换律);
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$(和的结合律);
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$(通的结合律);
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$(分配律);
6. 如果 $A \subset B$,那么对任意的集 C 成立着
   $A \cup C \subset B \cup C, A \cap C \subset B \cap C$(和、通的单调性).

在集合之间,除了上面的"加法"和"乘法"以外,下面再引入减法:设 A, B 为两个集,由集 A 中不属于 B 的那些元素全体所组成的集,称做集 A 减集 B 的**差集**,记做 $A - B$.(注意,这里并不要求 $A \supset B$,$A - B$ 也可以记做 $A \setminus B$).当 $B \subset A$ 时,称差集 $A - B$ 为 B 关于 A 的**余集**,记做 $C_A B$.当只讨论某个固定集 A 的一些子集 B 时,就把 $A - B$ 简单地记为 B^C 或 $C(B)$,或 $C_A B$,并称它是 B 的余集.

"减法"运算(或称求余运算)显然有下面的性质 .

7. 如果 $A \subset B$,那么 $A - B = \varnothing$;

8. $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$("减法"分配律);

9. $(C-A)-B=C-(A\cup B)$;

10. 如果 $A\subset C, B\subset C$,那么 $A-B=A\cap C_C B$.

我们称集$(A-B)\cup(B-A)$为集 A 和集 B 的**对称差**,记做 $A\triangle B$.

11. $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$.

以上这些性质都可以从集的"包含"、"相等"、"和"、"通"以及"差"的定义推导出来,其中有些还可以推广到任意个集的一般情况,这里不一一证明.图形有助于较直观地理解和记忆一些概念,或者启发人们思考问题,是学习中的一种有效工具,以后将经常采用.但是必须指出,决不能把图形的示意看成定义或者定理的证明.因为定义必须要用确切的文字叙述,定理的证明又必须经过严密的逻辑论证.

下面介绍两个有用的公式——**和通关系式**:

设 S 是任意一个集,$\{A_\alpha|\alpha\in N\}$是 S 中的一组子集,那么有

12. $S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$; (1.1.1)

13. $S-\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$. (1.1.2)

用文字叙述,就是:和集的余集等于每个集的余集的通集,而通集的余集等于每个集的余集的和集.(见图 1.2)

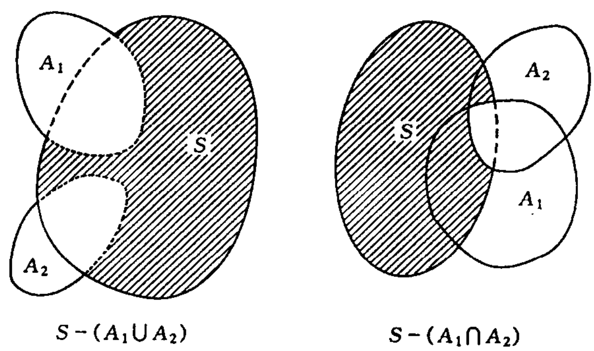


图 1.2

现在来证明和通关系式(1.1.1)和式(1.1.2).

首先,式(1.1.1)左边是属于 S 而不属于任何一个 $A_\alpha(\alpha\in N)$的元素所成的集,因而它属于每一个集 $S-A_\alpha(\alpha\in N)$,所以左边是右边的子集;完全类似地可以说明右边也是左边的子集.这样,式(1.1.1)两边的集相同.类似地可以证明式(1.1.2),希望读者自己进行分析和论证.但为帮助读者熟悉论证和表达的方法,下面把证明过程详细写出来.这是用集论方法论证时常用的方法.读者可以仿此证明上面各条性质 1.~11..

现证式(1.1.1).记 $S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$ 为P,记 $\bigcap\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$为 Q.这样,只需证明 $P=Q$.

设 $x\in P$,按定义有 $x\in S$ 而且$x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$.因此,对每个 $\alpha\in N$, $x\overline{\in}A_\alpha$,因而 $x\in S-A_\alpha$ $(\alpha\in N)$.即 $x\in Q$.这就是说,凡 P 中的元素都属于Q,所以 $P\subset Q$.

反过来,设 $x\in Q$,那么对任何 $\alpha\in N$ 有$x\in S-A_\alpha$,即 $x\in S$,而且 $x\overline{\in}A_\alpha(\alpha\in N)$,因此 $x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$,所以 $x\in S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha=P$.这就是说,凡 Q 中的元素必属于P,所以 $Q\subset P$.综合起来就得到

$$P = Q.$$ 证毕

式(1.1.2)的证明是类似的,略去.

3. 上限集与下限集 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集. 由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一列集的**上限集**,记做 $\overline{\lim\limits_n} A_n$ 或 $\limsup\limits_n A_n$;而由属于集列中从某个指标 $n_0(x)$(这个指标不是固定的,与元素 x 有关)以后所有集 A_n 的那种元素 x 全体(即除去有限多个集外的所有集 A_n 都含有的那种元素)组成的集称为这一列集的**下限集**,记做 $\underline{\lim\limits_n} A_n$ 或 $\liminf\limits_n A_n$. 显然,

$$\underline{\lim_n} A_n \subset \overline{\lim_n} A_n.$$

例 1 设 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 是如下一列点集:

$$A_{2n+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2n+1}\right], n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$A_{2n} = \left[0, 1 + \frac{1}{2n}\right], n = 1, 2, \cdots$$

试确定 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

因为闭区间 $[0,1]$ 中的点属于每个 $A_n, n=1,2,\cdots$,而对于开区间 $(1,2)$ 中每个点 x,必存在自然数 $n_0(x)$,使得当 $n > n_0(x)$ 时,

$$1 + \frac{1}{2n} < x \leqslant 2 - \frac{1}{2n+1}.$$

即当 $n \geqslant n_0(x)$ 时,$x \overline{\in} A_{2n}$,但 $x \in A_{2n+1}$. 换句话说,对于开区间 $(1,2)$ 中的 x,具有充分大奇数指标的集都含有 x,即 $\{A_n\}$ 中有无限多个集含有 x,而充分大的偶数指标的集都不含有 x,即 $\{A_n\}$ 中不含有 x 的集不是有限多个. 又区间 $[0,2)$ 以外的点都不属于任何 A_n,因此

$$\overline{\lim_n} A_n = [0,2), \quad \underline{\lim_n} A_n = [0,1].$$

例 2 设 $A_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right], n = 1, 2, \cdots$. 类似于例 1 中的讨论,立即得到

$$\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n = [0,1].$$

集列 $\{A_n\}$ 的上限集与下限集都可以用集列 $\{A_n\}$ 的"和"、"通"运算表示出来. 它们的表达式是:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{1.1.3}$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{1.1.4}$$

现在证明式(1.1.3). 记 $P = \limsup A_n$, $Q = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$. 对于 P 中的任何元素 x,由上限集的定义,x 属于 $\{A_n\}$ 中无限个集,不妨设 x 同时属于集 $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots, n_k < n_{k+1}(k=1,2,\cdots)$. 因此,对任何自然数 n,当 $n_k > n$ 时,$x \in A_{n_k} \subset \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$,所以 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$,从而得到 $P \subset Q$. 反过来,在 Q 中任意取一个元素 y,今证明在 $\{A_n\}$ 中必有无限个集同时含有 y. 事实上,取 $n=1$,因为 $y \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$,所以必存在自然数 n_1 使得 $y \in A_{n_1}$;其次,又因为 $y \in \bigcup\limits_{m=n_1+1}^{\infty} A_m$,所以必存在自然数 $n_2 > n_1$,使得 $y \in A_{n_2}$;这样一直进行下去,得到一列自然数 $\{n_k\}$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$,而集 $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots$ 都含有元素 y. 因此,$y \in P$. 于是又有

$Q \subset P$. 总起来得到 $P=Q$.

读者可以完全类似地证明式(1.1.4).　证毕.

由和通关系容易得到:

14. 设 $\{A_n\}$ 是任意一列集, S 是任意一个集, 那么

$$S-\varliminf_n A_n=\varlimsup_n(S-A_n). \tag{1.1.5}$$

$$S-\varlimsup_n A_n=\varliminf_n(S-A_n). \tag{1.1.6}$$

如果集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集相等, 即

$$\varlimsup_n A_n=\varliminf_n A_n,$$

那么就说集列 $\{A_n\}$ **收敛**, 这时, 称 $A=\varliminf_n A_n=\varlimsup_n A_n$ 是集列 $\{A_n\}$ 的**极限**(或**极限集**), 记为 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

如例 2 中的集列 $\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right]$, $n=1,2,\cdots$ 就是收敛于极限 $[0,1]$.

单调集列　如果集列 $\{A_n\}$ 满足

$$A_n\subset A_{n+1}\ (A_n\supset A_{n+1}),\ n=1,2,\cdots$$

那么称 $\{A_n\}$ 是单调增加(减少)集列. 单调增加与单调减少的集列统称为**单调集列**. 容易证明: 单调集列是收敛的.

如果 $\{A_n\}$ 是单调增加的, 那么

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

如果 $\{A_n\}$ 是单调减少的, 那么

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

4. 函数与集　设 X 是一个不空的集, 如果 f 把 X 中的每个元素 x 都对应于一个实数(或复数) $f(x)$, 则称 f 是定义在 X 上的**实**(或**复**)**函数**, 有时也记为 $f(\cdot)$. 与数学分析中完全类似, 可以定义一般集上的两个函数 f,g 的和 $f+g$、差 $f-g$、积 $f\cdot g$, 以及绝对值函数 $|f|$ 等, 同样还可以定义函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛, 等等. 与过去惟一不同的只是现在的自变量 x 是在一般的集合 X 上变化, 而不一定是在实数集或复数集中变化.

在实函数论中, 利用集来分析函数性质时, 常要用到下面类型的集. 当集 E 上的一个实函数 f 给定以后, 对于任意给定的实数 c, 按 § 1.1 中所说的记号, 记

$$E(f\geqslant c)=\{x\mid x\in E, f(x)\geqslant c\},$$

$$E(f>c)=\{x\mid x\in E, f(x)>c\},$$

等等, 它们都是由 f 决定的, 而且是与 f 有密切联系的集. 为了后面第三章的需要, 现在先让读者对这些集的性质、运算作一些了解和准备. 例如, 它们有如下关系式:

1. $E(f\geqslant c)\cup E(f<c)=E$;
2. $E(f>c)\cap E(f\leqslant d)=E(c<f\leqslant d)$;
3. $E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c}),\ (c\geqslant 0)$;

读者无须记住这些性质, 只要逐步熟悉这种处理方法即可.

4. $$E(f>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right). \tag{1.1.7}$$

证　只证明等式(1.1.7). 当 $x\in E(f>c)$ 时, $f(x)>c$, 所以必有自然数 n, 使得 $f(x)\geqslant$

$c+\frac{1}{n}$,因此 $x\in E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right)$,即等式(1.1.7)的左边的集包含在右边集中.

另一方面,如果 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right)$,必然存在某个 n,使 $x\in E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right)$,这时自然有 $f(x)>c$,所以 $x\in E(f>c)$.也就是说,式(1.1.7)右边的集也包含在左边集中.因此式(1.1.7)成立. 证毕.

5. 设函数列 $\{f_n\}$ 有极限函数 f,那么

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right). \tag{1.1.8}$$

证 如果 $x\in E(f\leqslant c)$,那么对任何自然数 k,$f(x)<c+\frac{1}{k}$.因为 $f(x)$ 是 $f_n(x)$ 的极限,所以必有自然数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,$f_n(x)<c+\frac{1}{k}$.这就是说,当 $n\geqslant N$ 时,$x\in E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$.即

$$x\in\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right).$$

因此,式(1.1.8)左边的集包含在右边的集中.

反过来,如果 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$,那么对一切 k,$x\in\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$,这时必有自然数 N_k,使得当 $n\geqslant N_k$ 时,$x\in E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$,即 $f_n(x)\leqslant c+\frac{1}{k}$.令 $n\to\infty$,因而对一切自然数 k,$f(x)\leqslant c+\frac{1}{k}$.令 $k\to\infty$,就得到 $f(x)\leqslant c$.这就是 $x\in E(f\leqslant c)$.因此式(1.1.8)的右边含在左边集中.所以式(1.1.8)成立. 证毕.

像这样由函数所产生的集的关系可以举出很多,读者自己也可以列举并加以证明.用点集分析的方法来研究函数时,离不开这些重要的集以及它们的关系式.反过来,有时也常会遇到要用函数来研究集的性质.下面的特征函数便是这方面的一个重要例子.

5. 集的特征函数 设 X 是一个固定的非空集,又设 A 是 X 的一个子集.作 X 上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} A\end{cases}$$

称 $\chi_A(x)$ 为集 A 的**特征函数**.显然子集 A 完全由它的特征函数所确定,就是说,当 $\chi_A(x)\equiv\chi_B(x)$ 时,$A=B$.

特征函数与集之间有下面一些常见的重要关系.

1. $A=X$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv1$;$A=\varnothing$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv0$.
2. $A\subset B$ 等价于 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$;
   $A=B$ 等价于 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$.
3. $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$,$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$.
4. 设 $\{A_n\}$ 是一列集,那么[①]

---

① 设 $\{a_n\}$ 是一个实数列,则 $\{a_n\}$ 中收敛子数列的极限值(包括 $a_n\to\infty$ 或 $a_n\to-\infty$ 的情况)的最大值称为 $\{a_n\}$ 的上限或上极限,记作 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n$.

同样,收敛子数列的极限值的最小值称做下限或下极限,记为 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$.详见本章§5.

$$\chi_{\overline{\lim\limits_{n}} A_n}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x). \tag{1.1.9}$$

$$\chi_{\underline{\lim\limits_{n}} A_n}(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x). \tag{1.1.10}$$

证　性质1,2,3的证明留给读者完成.下面只证明性质4的第一式(1.1.9).(式(1.1.10)可类似地证明).

如果 $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)=1$,那么 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.这就是说序列$\{A_n\}$中必有无限个集包含 x,从而数列$\{\chi_{A_n}(x)\}$中必有无限个是1.因此,$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)=1$.把上述推导的顺序反过来也就证明了:如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)=1$,那么 $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)=1$,所以在 X 中使函数$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$取值为1的元素与使$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)$取值为1的元素一致.但函数 $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)$,$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$的值不取1便取0,因此 X 中使这两个函数分别取值为0的元素也一致.所以这两个函数完全相等.　证毕.

5. 设$\{A_n\}$是一列集,那么极限$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在,而且当极限存在时

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x).$$

习　题

1. 证明:(i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

   (ii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2. 证明:(i) $A-B=A-A\cap B=(A\cup B)-B$.

   (ii) $A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$.

   (iii) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

   (iv) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

   (v) $(A-B)\cap(C-D)=A\cap C-(B\cup D)$.

   (vi) $(A-B)\cup(C-D)=(A\cup C)-(B\cup D)$.

   (vii) $A-(A-B)=A\cap B$.

3. (i) 等式$(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充要条件是什么?

   (ii) 证明:$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

   $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

4. 证明:(i) $(\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha)-B=\bigcup\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$.

   (ii) $(\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha)-B=\bigcap\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$.

5. 设$\{A_n\}$是一列集,

(i) 作 $B_1=A_1,B_n=A_n-\left(\bigcup\limits_{v=1}^{n-1}A_v\right)$,$(n>1)$.证明$\{B_n\}$是一列互不相交的集,而且

$$\bigcup_{v=1}^{n}A_v=\bigcup_{v=1}^{n}B_v,\ n=1,2,\cdots.$$

(ii) 如果$\{A_n\}$是单调减少的集列,那么

$$A_1=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcup_{v=1}^{\infty}A_v\right),$$

并且其中各项互不相交.

6. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\frac{1}{n}\right)$,$A_{2n}=(0,n)$,$n=1,2,\cdots$,求出集列$\{A_v\}$的上限集和下限集.

7. 设$\{f_n(x)\}$是区间 $E=[a,b]$上的实函数列

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots,$$

又设 $f_n(x)$ 具有极限函数 $f(x)$. 证明对任何实数 c, 有

$$E(f(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c).$$

8. 证明: (i) $A\triangle B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$.

(ii) $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$.

(iii) $\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$.

(iv) $A\triangle B=\{x\mid\chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$.

9. 设 $f(x)$ 是 E 上的一个函数, c 是任何实数, 证明

(i) $E(f\geqslant c)\cup E(f<c)=E$, $E(f\geqslant c)=E(f>c)\cup E(f=c)$.

(ii) $E(f>c)\cap E(f=c)=\varnothing$.

(iii) 当 $c<d$ 时, $E(f>c)\cap E(f\leqslant d)=E(c<f\leqslant d)$.

(iv) 当 $c\geqslant 0$ 时, $E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})$.

(v) 当 $f\geqslant g$ 时, $E(f>c)\supset E(g>c)$.

10. 设集 E 上的函数列 $\{f_n\}$ 具有性质 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 证明:

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)=\lim_{n\to\infty}E(f_n\leqslant c).$$

11. 设 f 是定义在集 E 上的函数, c 是任何实数, 证明:

(i) $E(c\leqslant f(x))=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f(x)<c+n)$.

(ii) $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(-n\leqslant f(x))=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f(x)<n)$.

(iii) $E(f<c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\dfrac{1}{n}\right)$.

12. 设 X 是固定的集, $A\subset X$, $\chi_A(x)$ 是集 A 的特征函数, 证明:

(i) $A=X$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 1$, $A=\varnothing$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 0$;

(ii) $A\subset B(\subset X)$ 等价于 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$;

$A=B$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv\chi_B(x)$;

(iii) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha}\chi_{A_\alpha}(x)$;

$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha}\chi_{A_\alpha}(x)$;

(iv) 设 $\{A_n\}$ 是一列集, 那么极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$ 存在, 而且当极限存在时有

$$\chi_{\lim\limits_n A_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x).$$

13. 证明和通关系式

$$S-\bigcap_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in N}(S-A_\alpha).$$

14. 设 F,E_1 及 E_2 是任意三个集, 记 $F_1=F\cap(E_1\cap E_2^c)^c$, 证明:

(i) $F_1\cap E_1\cap E_2^c=F\cap E_1\cap E_2$.

(ii) $F_1\cap E_1\cap E_2^c=\varnothing$.

(iii) $F_1\cap E_1^c\cap E_2=F\cap E_1^c\cap E_2$.

(iv) $F_1\cap E_1^c\cap E_2^c=F\cap E_1^c\cap E_2^c$.

§2　映照与势

1. 映照　前面已叙述过一般集上的函数概念. 现在研究比函数概念更一般的集之间的另一种关系——对应关系, 也就是一般的函数关系.

定义　设 A,B 是两个非空集，如果存在一个规则 φ，使得对于 A 中任何一个元素 x，按照规则 φ，在 B 中有一个确定的元素 y 与 x 对应，记为

$$\varphi: x \mapsto y.$$

那么称这个规则 φ 是从 A 到 B(**中**)的**映照**(也可称为映射)，元素 y 称做元素 x(在映照 φ 下)的**像**，记做 $y=\varphi(x)$，或 $y=\varphi x$.对于任一个固定的 y 称适合关系 $y=\varphi(x)$ 的 x 全体为 y(在映照 φ 之下)的**原像**.集 A 称做映照 φ 的**定义域**，记为 $\mathscr{D}(\varphi)$ 或 $\mathscr{D}_\varphi$.设 C 是 A 的子集，C 中所有元素 x 的像 y 的全体记为 φC 或 $\varphi(C)$.称它为集 C 的像，称 $\varphi(A)$ 为映照 φ 的**值域**，也记为 $\mathscr{R}(\varphi)$.有时为了简便起见，常把 $\mathscr{D}(\varphi)=A$ 到 $\mathscr{R}(\varphi)\subset B$ 的映照写成

$$\varphi: A \rightarrow B.$$

如果 $\varphi(A)=B$，就称 φ 是 A 到 B **上**的映照.显然，如果 φ 是 A 到 B 上的映照，那么 φ 是 A 到 B 中的映照，但其逆一般不真.

特别地，如果值域 B 是一数集(实数或复数集)，这时映照 φ 就是前面说的定义在集 A 上的函数.如果 A,B 都是数集，它们之间的映照就是数学分析中所研究的函数了.由此可见，映照概念实在就是函数概念的推广.

除了普通的函数是一种映照而外，其他的，如定积分可以看做可积函数到数集中的映照，求导函数的运算(微分)可看做可微分函数集到函数集中的映照，而线性变换就是 n 维向量空间到 n 维向量空间的映照；又如代数学中的同态映照、同构映照等，从更广泛的意义上说，任何一种运算也可以看做是映照.再看几个映照的具体例子.

例 1　设 $A=(-\infty,\infty)$，$B=(-\infty,\infty)$，符号函数

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

是 A 到 B 中的映照.

例 2　设 A 是平面上所有圆组成的集合，B 是平面上所有点的全体，令 φ 表示圆与其圆心之间的对应，φ 就是 A 到 B 上的映照.

例 3　设 D^2 是直线上的二次可微函数全体，B 是直线上的函数全体，a,b,c 是常数，定义 D^2 到 B 中的一个映照 φ 如下：

$$\varphi: f(x) \mapsto a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)+cf(x),\ f\in D^2.$$

当 $a\neq 0$ 时称 φ 为二阶微分算子，简记 $\varphi=a\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+b\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c$.

例 4　设 E^n 是 n 维欧几里得空间，(k_{ij}) 是给定的 n 阶方阵，作 E^n 到 E^n 中的映照 φ 如下：

$$\varphi: x \mapsto Kx,\ x\in E^n.$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，又

$$y=\varphi(x)=Kx=\left(\sum_{j=1}^n k_{1j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^n k_{nj}x_j\right).$$

例 5　设 $C[0,1]$ 是区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上所有连续函数全体，R^1 是直线 $-\infty<x<\infty$，x_0 是 $[0,1]$ 中的一个定点，作映照

$$\varphi: f(x) \mapsto f(x_0),\ f\in C[0,1],$$

则 φ 就是 $C[0,1]$ 到 R^1 上的映照.

2. 映照的延拓 映照和它的定义域有关.在小范围有意义的映照,在较大范围内未必有意义.一般地

定义 设 φ,ψ 分别是定义域 $\mathscr{D}_\varphi,\mathscr{D}_\psi$ 到 B 中的映照,如果 $\mathscr{D}_\varphi\subset\mathscr{D}_\psi$,而且对于 $\mathscr{D}_\varphi$ 中的每个元素 x 成立着

$$\psi(x)=\varphi(x).$$

即 ψ 与 φ 在 $\mathscr{D}_\varphi$ 上一致,就称映照 ψ 是映照 φ 在 $\mathscr{D}_\psi$ 上的**延拓**,记成 $\varphi\subset\psi$,这时称 φ 是 ψ 在 $\mathscr{D}_\varphi$ 上的**部分**或**限制**,记为 $\varphi=\psi|_{\mathscr{D}_\varphi}$.

例 6 设 $f(x)=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$;又设 $g(x)=|\sin x|,-\infty<x<\infty$,那么 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的延拓.或 $g=f|_{[0,\pi]}$.

例 7 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n,|z|<1,g(z)=\dfrac{1}{1-z},z\neq1$.解析函数 $g(z)$ 就是 $f(z)$ 的延拓.

完全类似地可将复合函数的概念拓广,而定义复合映照概念.这里不拟多说.

3. 一一对应 在各种映照之中,下面要着重讨论一下一对一的映照.

可逆映照 设 φ 是 A 到 B 中的映照,若对每一个 $y\in\mathscr{R}(\varphi)$,A 中只有一个元素 x 适合 $\varphi(x)=y$,就说 φ 是**可逆映照**.换言之,对 A 中任意两个元素 x_1,x_2,当 $x_1\neq x_2$ 时,必有 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$,那么 φ 就是可逆映照.关于“可逆”的名称,下面将作解释.

例如,$(-\infty,\infty)$ 上的函数 $\varphi(x)=\sin x,\psi(x)=x^2$ 都不是 $(-\infty,\infty)$ 到 $(-\infty,\infty)$ 中的可逆映照.显然任何一个严格单调函数都可以看成它的定义域到值域中的可逆映照.又如 $(0,1]$ 上的函数(见图 1.3)

$$g(x)=\begin{cases}x,0<x<1\\0,x=1\end{cases}$$

是 $(0,1]$ 到 $[0,1]$ 中的可逆映照.

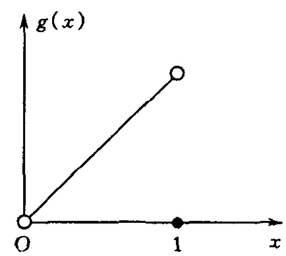


图 1.3

定义 设 φ 是集 A 到集 B 上的可逆映照,则称 φ 为 A 到 B(上)的**一一对应(或一对一的映照)**.

换句话说,φ 是 A 到 B 的一一对应意味着对于 A 中任何一个元素 a,有惟一的 $b=\varphi(a)\in B$,而且对 B 中每个元素 b,必在 A 中有惟一的元素 a,适合 $\varphi(a)=b$.

例如,上面的函数 $g(x)$ 就只是 $(0,1]$ 到 $[0,1]$ 中的可逆映照,而不是 $(0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的一一对应.这是因为 $[0,1]$ 上的点 1 找不到原象.但 $g(x)$ 却是 $(0,1]$ 到 $[0,1)$ 上的一一对应.其实,任何可逆映照 φ 一定是 $\mathscr{D}(\varphi)$ 到 $\mathscr{R}(\varphi)$ 的一一对应.

逆映照 设 φ 为 A 到 B 中的可逆映照:

$$\varphi:A=\mathscr{D}(\varphi)\to\mathscr{R}(\varphi)\subset B.$$

作 $\mathscr{R}(\varphi)$ 到 $\mathscr{D}(\varphi)$ 的映照 ψ 如下:如果

$$\varphi:x\mapsto y,\ x\in\mathscr{D}(\varphi),y\in\mathscr{R}(\varphi).$$

则令

$$\psi:y\mapsto x.$$

由于 φ 是可逆的,根据可逆映照的定义,对于每一个 y,与它相应的 x 是惟一的,因此 ψ 是定义好了的.ψ 实现了从 $\mathscr{R}(\varphi)$ 到 $\mathscr{D}(\varphi)$ 上的映照,称 ψ 为 φ 的**逆映照**,记 ψ 为 φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}:\mathscr{R}(\varphi)\to\mathscr{D}(\varphi).$$

显然，$\mathscr{D}(\varphi^{-1})=\mathscr{R}(\varphi)$，$\mathscr{R}(\varphi^{-1})=\mathscr{D}(\varphi)$. 因此可逆映照必有逆映照，这也是取“可逆”这个术语的原由.

逆映照是反函数概念的拓广.

例如，任何一个严格单调函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 可以看成映照 $f(x)$ 的逆映照. 又如 A 是 $[0,1]$ 上具有连续导函数而且在 0 点其函数值为 0 的函数全体，φ 是求导函数这个映照，即

$$\varphi: f(x)\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),\ f(x)\in A.$$

显然 φ 是 A 到 $C[0,1]$（见例 5）上的一一映照，而其逆映照就是求不定积分

$$\varphi^{-1}: g(x)\mapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

设 X 是一固定集，$\mathscr{M}$ 是 X 的子集的全体，$\mathscr{N}$ 是相应的特征函数的全体，作映照

$$\varphi: A\mapsto \chi_A,\ A\subset X.$$

它就是 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{N}$ 之间的一一对应.

4. 势　事物的多或少的概念，是通过比较形成的. 如果两个集的元素都能完全罗列出来，往往很容易比较出哪一个集的元素多，哪一个集的元素少. 例如，教室里的桌子都摆整齐了，学生一个人坐一个位置. 如果所有的学生全都坐下之后还有座位空着，那么桌子比学生多，如果坐满后至少还有一个学生没有位置坐，那就表示学生多于桌子. 如果既没有空桌子，也没有学生站着，那就表示学生与桌子数目相等. 对于在教室坐位置这个问题上，就得利用学生和座位的对应来研究“学生集”和“座位集”中元素的多少. 这里并不需要知道学生的数目或座位的数目. 但是，如果要弄清一间教室的座位的数目，就是要把这教室里的座位与自然数集

$$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

依次进行比较，每个位置都给一个编号，最后一个位置的编号就是这间教室内座位的数目. 但有些集并不能这样地赋予一个数目. 例如，全体偶数所成的数集，虽然不能赋予一个有限的数目，但是可以把偶数集中的元素编号，每个偶数都有一个且只有一个编号，不同的偶数编号不同，例如，偶数 $2n$ 的编号为自然数 n. 打个比方说，有像全体自然数那么多的位置，把偶数依次放在各个位置上，就会恰好一个位置放一个偶数，而没有任何一个偶数找不到位置，只要把 $2n$ 放在第 n 个位置上，$n=1,2,\cdots$ 依次放下去就一定是这样. 可以说偶数和自然数“一样多”. 虽然如此，但是偶数却只是自然数的一部分. 奇数全体所成的集也与自然数“一样多”. 如果考察实数全体所成之集 R^1，那么，后面会看到，不能只用自然数“编号”的办法来建立“数目多少”的概念. 还得进一步抽象，用别的集中的元素来编号，这就要引进“势”的概念. 这样的“编号”是一种一一对应，“势”是用来反映“数目多少”的. 在适当定义的“势”的概念之下，势相等的两个集可以把它们的元素看做“一样多”. 做出势的定义的最适当的工具是两集之间的一一对应.

定义　设 A,B 是两个集，若存在 A 到 B 上的一个一一对应 φ，则称 A 与 B 是**对等**的（或相似的），记为

$$A\overset{\varphi}{\sim}B,$$

或简记为 $(A\sim B)$. 我们规定空集和自身对等.

例如　奇数集　$\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$

　　　偶数集　$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$

　　　自然数集　$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

是彼此对等的.

显然,对等关系“$\sim$”具有下面三个基本性质:

1. $A\sim A$(自反性);

2. 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$(对称性);

3. 若 $A\sim B$,$B\sim C$,则 $A\sim C$(传递性).

此外还有下面的一个性质,虽非基本,但很重要.

4. 设$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$,$\{B_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$为两族集,$\Lambda$ 是它们的指标集,设对每一个 $\lambda\in\Lambda$,$A_\lambda\sim B_\lambda$,而且集族$\{A_\lambda\}$中任何两个集不相交:$A_\lambda\cap A_\mu=\varnothing(\lambda\neq\mu,\lambda,\mu\in\Lambda)$,$\{B_\lambda\}$中任何两个集也不相交,那么

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda.$$

此性质读者不难自行证明.

前面已经说过,若 φ 是 A 到 B 中的可逆映照,在 A 与 B 之间虽未必是一对一的,但 φ 实现 A 到 $\mathscr{R}(\varphi)$上的一一对应.因此 A 与 B 的子集 $R(\varphi)$对等.

欲判断两集对等,常用下面的定理.

贝恩斯坦(F. Bernstein, 1898)定理　设 A,B 是两个集,如果 A 对等于 B 的一个子集,B 又对等于 A 的一个子集,那么 A 与 B 对等.(见图 1.4)

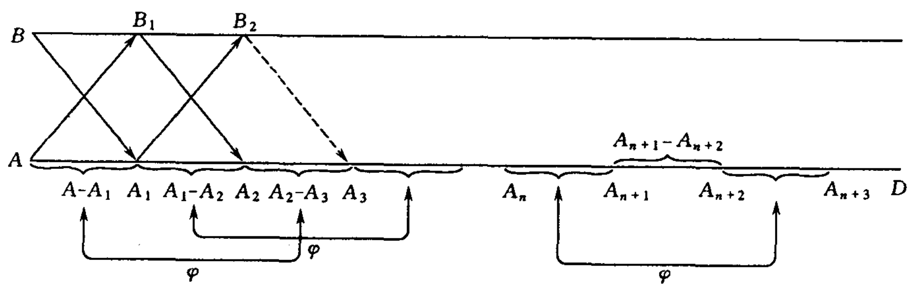


图 1.4　Bernstein 定理证明示意图

证　由假设,存在 A 到 B 的某子集 B_1 上的一一映照 φ_1,又存在 B 到 A 的子集 A_1 上的一一映照 φ_2,因为 $B_1\subset B$,记 $A_2=\varphi_2(B_1)$.显然 φ_2 是 B_1 到 A_2 上的一一映照,即

$$A\overset{\varphi_1}{\sim}B_1\overset{\varphi_2}{\sim}A_2\quad(A_2\subset A_1).$$

作映照 φ_1 和 φ_2 的复合映照 φ 如下:当 $x\in A$ 时,$\varphi(x)=\varphi_2(\varphi_1(x))$.那么 φ 实现了 A 到 A_2 上的一一对应.因为 A_1 是 A 的子集,$A_3=\varphi(A_1)$是 A_2 的子集:

$$A_1\overset{\varphi}{\sim}A_3\quad(A_3\subset A_2),$$

照这样逐步进行下去,就得到一列的子集:

$$A\supset A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$$

而在同一个映照 φ 之下,有

$$A\sim A_2\sim A_4\sim\cdots,$$

$$A_1\sim A_3\sim A_5\sim\cdots.$$

这样就可以将 A 分解为一系列互不相交的子集之和:

$$A=(A-A_1)\cup A_1=(A-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup A_2$$