数 学 小 品 译 丛

IVAN NIVEN 著

白苏华 向诗砚 译

极大极小

四川教育出版社

SHU XUE XIAO PIN YI CONG

丛

数学小品译丛

极大极小

IVAN NIVEN 著

白苏华 向诗砚 译

四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：胡师度
封面设计：文小牛
版面设计：顾求实

极大极小 （数学小品译丛）

四川教育出版社出版 四川新华印刷厂排版
（成都盐道街三号） 西南建筑设计院印刷所印刷
四川省新华书店发行

开本 787×960毫米 1/32印张 12.25插页4字数205千
1988年2月第一版 1988年2月第一次印刷
印数：1——950册

ISBN7-5408-0337-1/G·292 定价：2.80元

内容提要

《数学小品译丛》译自美国数学协会《多尔恰尼介绍性著作》丛书，全套七集，每集收数学精品若干篇，各篇独立成章，并配有丰富的习题。该丛书文笔清新优美，叙述简洁生动，内容引人入胜，确不失为数学小品中之佳作。

这本《极大极小》汇集了解决极大极小问题的主要初等方法，并有丰富的参考文献及练习解答，以利读者学习。

本丛书特别适宜中学生及中学教师学习、参考，对于大学生及一般数学工作者也无不阅读价值。

数学小品译丛

数学瑰宝

（第一辑）

数学瑰宝

（第二辑）

数学瑰宝

（第三辑）

数学瑰宝

（第四辑）

极大极小

数学史菁华

序 言

本书的目的是汇集解决极大极小问题的主要初等方法，而把标准教科书中已经讲过的两种方法除外。就象线性规划和博奕论中的最优化过程一样，我们的讨论有意回避了微积分。对于供这些学科使用的许多教本而言，本书的目的只是补充它们的素材，并不求其完备无遗。因此，本书侧重于介绍在代数和几何学中讲得不多的方法，这样作是经过仔细斟酌的。读者很快就会发现，我们常常喜欢不用纯几何的方法去解几何问题，而把它变成代数问题去求解。别的作者自然可以另辟蹊径，俗话说，各人有各人的爱好。

微积分是一门经过系统组织的学科，它为解决极值问题提供了一个按步就班的办法，微积分的提倡者们常常把其它的方法看成用途有限的技巧性方法。我们则持相反的看法，尽可能把这些方法统一起来。这样得到的方法就不仅仅是一种用途有限的特殊手段，而是应用更广泛的一般方法。因此，我们强调证明的思路更胜于漂亮的结果，前者适用于许多问题，而后者只是迅速地解决一个问题。

尽管微积分给出了解决某些极大和极小问题的有力而又系统的方法，但它并不是万能的。有许多问题即使可以用初等微积分求解，解起来也是不方便的。例如，考虑一个在微积分书中提出的问题：在周长一定的矩形中求面积最大者。要是问题提得广泛些，即求周长一定而面积最大的四边形，对于初等微积分就不大合适了。这类问题对我们很有启发。因此我们得出一条简单的原则：如果一个问题用微积分求解更简单，就把它留给微积分。

极值问题与不等式中的问题很接近，难怪这个话题一提出来就十分规则。但我们的兴趣不在不等式本身，而仅仅在于它们给出极值问题的解。

阅读本书需要什么预备知识呢？这本书是给相当于北美的二、三年级大学生水平的读者写的，即假定读者具有熟练的微积分入门知识。虽然微积分并不是必须的，但它的初步知识可以增加读者的理解力。

虽然我们介绍了多种几何方法，但有三种方法没有使用：正交和非正交的投影、向量分析、以及复数的几何学，这些方法可以用来简化某些解答，但介绍这些方法将会离题太远。

第一章包括一些重要的预备知识，这对于从第二章起的主要内容是必须的。虽然有的读者可以直接阅读第二章，但应当注意1·1节，因为它包含了

有关记号和数学用语的基本约定。

本书的安排是从易到难地处理问题。例如，考虑平面上的等周问题：在周长一定的简单闭曲线中，哪条曲线所围的面积最大？第四章4·3节在解存在的假定之下解答了这个问题。第十二章又回过头来解决这个问题，这时没有假定解的存在性。从逻辑上讲，这两章应当合起来，实际上第四章应当删去，因为第十二章的内容更一般。但是，后者要摸仿第四章却并不容易，因为第四章很初等。

第二章至第六章应接着阅读，因为每章都与它前面的几章有关。这几章对于七、八和十二章是必须的，但七、八、十二章可以单独阅读。九、十、十一章也可以单独阅读，但需要二、三章的知识。

书中给读者备有很多问题，用一个英文字母和一个数字标出；例如，$E11$是第五章的第十一个问题。书末给出了全部答案和部份解答。当然，读者要尽量自己动手，设法把问题解到最后一步。书中没有练习或习题，因为本书原本是为课外阅读而编的，并不是教科书。而且，作者在书中使用的部分材料尚处于反复试验阶段。

每章末的评注不仅给出了材料的出处，还提出了进一步阅读的建议。虽然正文中列出了一些文献，但多数文献还是集中在书末的总目录中，作者按字母顺序排列。我们并不打算把它编成这个论题

的完整文献。

本书的第一稿承多氏丛书的成员们，以及Chakerian, Basil Gordon, Roy Ryden等人审阅。作者荣幸地得到了他们的建设性意见，使本书获得多方面的改进。作者还感谢许多人士提出了可能被忽略的论题、问题和文献；在这方面特别要提一下M. S. Klamkin, L. H. Lange, 以及C. D. Olds等人。

Ivan Niven于俄勒岗大学

目 录

第一章　预备知识

本章的内容包括定义、记号、规定和本书要用到的一些结论。多数读者只需要浏览一遍即可，但第一节较重要，因为这节中介绍了使用数学用语和记号的若干约定。极大值和极小值的正式讨论是从第二章开始的，所以读者可以尽快的读完本章。

1·1　用语和记号

a、b是任意二实数，我们说a比b大，是指$a-b$为正数，它可以表示成如下几种等价形式：

$$a>b,\ a-b>0,\ b<a,\ b-a<0.$$

与此类似，a大于或等于b的意思是$a-b$或为正数或为零，可以表为

$$a\geqslant b,\ a-b\geqslant 0,\ b\leqslant a,\ b-a\leqslant 0.$$

记号$\max(a, b, c)$表示实数a，b，c中的**最大者**或**极大者**。例如

$$\max(2, 3, 5)=5,\ \mathrm{mxa}(2, 3, -5)=3,$$

$$\max(3, 3, -5) = 3.$$

一般，设a_1，a_2，…，a_n是有限个任意的实数，允许其中有相同的，等式

$$\max(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_j$$

（其中j是整数1，2，3，…，n中的某一个）的意思是指下列诸不等式成立：

$$a_j \geqslant a_1, \ a_j \geqslant a_2, \ a_j \geqslant a_3, \ \cdots, \ a_j \geqslant a_n.$$

与此类似，有限个实数的**最小值**记为

$$\min(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_k$$

它的意思是指下列诸不等式成立

$$a_k \leqslant a_1, \ a_k \leqslant a_2, \ a_k \leqslant a_3, \ \cdots, \ a_k \leqslant a_n.$$

实数的无限集不一定存在最大值和最小值。简单的例子是正实数没有最小值，因为对于任意实数r，$r/2$就比它小。又如，若a、b（$a<b$）是任意二实数，则满足关系式

$$a<x<b$$

的数x既无最大值也无最小值。不过x有**最小上界**b和**最大下界**a。一个实数集的上界是这样一种数，它大于或等于这个集内的每一个数。同样，一个实数集的下界是这样一种数，它小于或等于该集内的每一个数。

我们称一个实数集合是**有界的**，如果存在两个常数c和k，使该集内每个数x都满足不等式$c \leqslant x \leqslant k$。如果集内每个数$x$满足$x \leqslant k$，则说此集是**有上界**的。

如果满足条件$c\leqslant x$，则说此集是**有下界**的。任何一个有界的实数集合都有唯一最小上界和最大下界。但这里不给出证明，因为我们只用到很特殊的实数集合，即实数轴上的区间（在解析几何中，我们知道x轴即是实数轴）。例如满足条件$a<x<b$的实数x的集合构成一个**开区间**，记为(a,b)。

满足条件$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合构成一个**闭区间**，记为$[a,b]$。这个实数集有最大值b，它也是最小上界。同时该数集也有最小值a，它也是最大下界。

记号$[a,b)$表示由一切满足条件$a\leqslant x<b$的实数x构成的一个半闭半开区间。此集有最小值a，但无最大值。它有最小上界b和最大下界a。同样，满足条件$a<x\leqslant b$的实数x构成一个半开半闭区间，记为$(a,b]$，它有最大值b，但无最小值。

在数学文献中，名词"最大"和"最小"通常用来代替"最小上界"和"最大下界"，但我们不使用这些术语。

有时，为了求得函数$f(x)$的最大值或最小值，更方便的是代之以求$-f(x)$的最小值或最大值。例如，如果我们已知$9+x^2-2x$（x取遍全体实数）的最小值是8，则$2x-9-x^2$的最大值是-8（因为$9+x^2-2x=8+(x-1)^2$，由此可知8是最小值）。同理，因为$90+x^2-2x$的最小值

是89，所以$900+10x^2-20x$的最小值是890。

这个方法可以用于倒数的情形。继续上面的例子，则对于所有实数x，$1/(9+x^2-2x)$的最大值是$1/8$。

下面我们介绍某些几何的惯例，设P，Q是任意二点，PQ有三种意义：两端可以无限延长的直线PQ；以P，Q为端点的线段PQ；P，Q两点间的距离。不同的两点间的距离是一个正数，仅当两点重合时才有$PQ=0$，又$PQ=QP$。这些意义不难从上下文判断，不会引起混淆。比如，等式$PQ=RS$显然表示两个距离相等。

半直线或射线PQ是指以P点作为一个端点，而从P到Q无限延伸的直线。

不共线的三点，如A、B、C加上三条线段AB，BC，CA组成一个**三角形**，它的面积是一个不为零的正数。三角形中任何两边之和大于第三边，这个结论叫**三角不等式**，例如，$AB+BC>AC$。一般，任意的不同三点P、Q、R均满足$PQ+QR\geqslant PR$，当且仅当Q点是线段PR的内点时等号成立，所谓Q点是线段PR的内点，意指Q严格地位于以P、R为端点的线段上。

对任意整数$n\geqslant3$，一个n**边形**由平面上n个不同的点（称为顶点）P_1，P_2，…，P_n和n条线段（称为边）P_1P_2，P_2P_3，P_3P_4，…，$P_{n-1}P_n$所