

IVAN NIVEN 著
白苏华 向诗砚 译

n in the form $2^a k$ where
(k) = $(2^{a+1} - 1)\sigma(k)$ is
(k) is odd. However, since
order to make $\sigma(k)$ odd, the
divisors of k . Hence k must be
 n^2 . If a is even, then n , too, is

极大极小

is a square. If a is odd, then n is
either a square or twice a square ($2l^2$) we can

$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ in its prime decomposition: The
 $p_1^{2a_1}$, and $2l^2 = 2^{2b+1} \cdot p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \cdots p_r^{2a_r}$
 $= (2^{2b+1} - 1) \cdot \sigma(p_1^{2a_1}) \cdot \sigma(p_2^{2a_2}) \cdots \sigma(p_r^{2a_r})$
 $(2^{2b+2} - 1) \cdot \sigma(p_1^{2a_1}) \cdot \sigma(p_2^{2a_2}) \cdots \sigma(p_r^{2a_r})$. If

$p_1, \dots, p_r$ is an odd prime. Thus every divisor

Since the index $2a_i$ is even, then the value

$1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{2a_i}$ is also odd. But 2^{2b+1}

are odd. Thus $\sigma(n)$ is odd in all cases. Thus a

has $\sigma(n)$ odd if and only if n is a square or twice

$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ denote an odd perfect
the primes p_i are odd. Because n is perfect, we

$$\sigma(p_1^{a_1}) \cdot \sigma(p_2^{a_2}) \cdots \sigma(p_k^{a_k}) = 2 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

decomposition of the right-hand side, a single 2

occurs for the left-hand side. Thus one of the σ

of 2 in its prime decomposition, while the rest

one 2 occurs, this $\sigma(p_i^{a_i})$ is twice an odd number

suppose $\sigma(p_i^{a_i}) = 2(2q + 1) = 4q + 2$. Since

$i = 2, 3, \dots$ 四川教育出版社 either a square

is a square. Since $p_i^{a_i}$ is odd, it cannot be twice a square.

is a square, implying that

$$p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k} = Q^2, \quad \text{a square.}$$

show that $a_i = 4a + 1$ for some integer a . We have

数学小品译丛

极大极小

IVAN NIVEN 著

白苏华 向诗砚 译

四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：胡师度

封面设计：文小牛

版面设计：顾求实

极大极小

(数学小品译丛)

四川教育出版社出版

四川新华印刷厂排版

(成都盐道街三号)

西南建筑设计院印刷所印刷

四川省新华书店发行

开本 787×960毫米 1/32印张 12.25插页 4字数205千

1988年2月第一版

1988年2月第一次印刷

印数：1——950册

ISBN7-5408-0337-1/G·292

定价：2.80元

内 容 提 要

《数学小品译丛》
译自美国数学协会《多
尔恰尼介绍性著作》丛
书,全套七集,每集收数
学精品若干篇,各篇独
立成章,并配有丰富的
习题.该丛书文笔清新
优美,叙述简洁生动,内
容引人入胜,确不失为
数学小品中之佳作.

这本《极大极小》
汇集了解决极大极小问
题的主要初等方法,并
有丰富的参考文献及练
习解答,以利读者学习.

本丛书特别适宜中
学生及中学教师学习、
参考.对于大学生及一
般数学工作者也无不阅
读价值.

1973/10

数学小品译丛

数学瑰宝

(第一辑)

数学瑰宝

(第二辑)

数学瑰宝

(第三辑)

数学瑰宝

(第四辑)

极大极小

数学史菁华

序 言

本书的目的是汇集解决极大极小问题的主要初等方法，而把标准教科书中已经讲过的两种方法除外。就象线性规划和博奕论中的最优化过程一样，我们的讨论有意回避了微积分。对于供这些学科使用的许多教本而言，本书的目的只是补充它们的素材，并不求其完备无遗。因此，本书侧重于介绍在代数和几何学中讲得不多的方法，这样作是经过仔细斟酌的。读者很快就会发现，我们常常喜欢不用纯几何的方法去解几何问题，而把它变成代数问题去求解。别的作者自然可以另辟蹊径，俗话说，各人有各人的爱好。

微积分是一门经过系统组织的学科，它为了解决极值问题提供了一个按步就班的办法，微积分的提倡者们常常把其它的方法看成用途有限的技巧性方法。我们则持相反的看法，尽可能把这些方法统一起来。这样得到的方法就不仅仅是一种用途有限的特殊手段，而是应用更广泛的一般方法。因此，我们强调证明的思路更胜于漂亮的结果，前者适用于许多问题，而后者只是迅速地解决一个问题。

尽管微积分给出了解决某些极大和极小问题的有力而又系统的方法，但它并不是万能的。有许多问题即使可以用初等微积分求解，解起来也是不方便的。例如，考虑一个在微积分书中提出的问题：在周长一定的矩形中求面积最大者。要是问题提得广泛些，即求周长一定而面积最大的四边形，对于初等微积分就不大合适了。这类问题对我们很有启发。因此我们得出一条简单的原则：如果一个问题用微积分求解更简单，就把它留给微积分。

极值问题与不等式中的问题很接近，难怪这个话题一提出来就十分规则。但我们的兴趣不在不等式本身，而仅仅在于它们给出极值问题的解。

阅读本书需要什么预备知识呢？这本书是给相当于北美的二、三年级大学生水平的读者写的，即假定读者具有熟练的微积分入门知识。虽然微积分并不是必须的，但它的初步知识可以增加读者的理解力。

虽然我们介绍了多种几何方法，但有三种方法没有使用：正交和非正交的投影、向量分析、以及复数的几何学。这些方法可以用来简化某些解答，但介绍这些方法将会离题太远。

第一章包括一些重要的预备知识，这对于从第二章起的主要内容是必须的。虽然有的读者可以直接阅读第二章，但应当注意1·1节，因为它包含了

有关记号和数学用语的基本约定。

本书的安排是从易到难地处理问题。例如，考虑平面上的等周问题：在周长一定的简单闭曲线中，哪条曲线所围的面积最大？第四章4.3节在解存在的假定之下解答了这个问题。第十二章又回过头来解决这个问题，这时没有假定解的存在性。从逻辑上讲，这两章应当合起来，实际上第四章应当删去，因为第十二章的内容更一般。但是，后者要模仿第四章却并不容易，因为第四章很初等。

第二章至第六章应接着阅读，因为每章都与它前面的几章有关。这几章对于七、八和十二章是必须的，但七、八、十二章可以单独阅读。九、十、十一章也可以单独阅读，但需要二、三章的知识。

书中给读者备有很多问题，用一个英文字母和一个数字标出；例如，E11是第五章的第十一个问题。书末给出了全部答案和部份解答。当然，读者要尽量自己动手，设法把问题解到最后一步。书中没有练习或习题，因为本书原本是为课外阅读而编的，并不是教科书。而且，作者在书中使用的部分材料尚处于反复试验阶段。

每章末的评注不仅给出了材料的出处，还提出了进一步阅读的建议。虽然正文中列出了一些文献，但多数文献还是集中在书末的总目录中，作者按字母顺序排列。我们并不打算把它编成这个论题

的完整文献。

本书的第一稿承多氏丛书的成员们，以及Chakerian, Basil Gordon, Roy Ryden等人审阅。作者荣幸地得到了他们的建设性意见，使本书获得多方面的改进。作者还感谢许多人士提出了可能被忽略的论题、问题和文献；在这方面特别要提一下M. S. Klamkin, L. H. Lange, 以及C. D. Olds等人。

Ivan Niven于俄勒冈大学

目 录

第一章 预备知识.....	1
1.1 用语和记号	1
1.2 几何与三角	5
1.3 面积和体积	8
1.4 不等式	13
1.5 记号 Σ	15
第二章 简单的代数结果.....	18
2.1 和与积	18
2.2 任何平方数都是正数或零	19
2.3 算术——几何平均数不等式	25
2.4 交替证明法	29
2.5 柯西的证明	30
2.6 求极值的技巧	33
2.7 算术——调和平均数不等式	45
2.8 数 e	48
2.9 柯西不等式	51
第三章 初等的几何问题.....	60
3.1 序	60

3.2	三角形	61
3.3	四边形	64
3.4	几何杂题	69
3.5	镜像原理	80
3.6	等价结果	84
3.7	辅助圆	88
第四章	等周问题的结论	98
4.1	若干定义	98
4.2	多边形	101
4.3	等周定理	103
4.4	等周商	107
4.5	存在与唯一性	110
第五章	基本的三角不等式	117
5.1	一个新方向	117
5.2	若干三角不等式	118
5.3	琴生不等式	123
5.4	其它的三角函数	127
5.5	$a\sin\theta + b\cos\theta$ 的极值	131
5.6	顶风行船	135
第六章	内接多边形和外切多边形	140
6.1	引言	140
6.2	正多边形	143
6.3	内接和外切多边形	145
6.4	π 的定义	150

6.5	圆与正多边形的比较	154
第七章	椭圆	158
7.1	基本变换	158
7.2	参数方程	162
7.3	内接于椭圆的多边形	163
7.4	外切多边形	165
7.5	切线和极值	166
7.6	点到曲线的最短距离	172
7.7	椭圆上的极值点	176
第八章	蜜蜂和六边形	180
8.1	两个问题	180
8.2	用正多边形镶嵌平面	183
8.3	非凸多边形	184
8.4	用凸多边形镶嵌平面	185
8.5	总结	191
第九章	进一步的几何问题	194
9.1	引言	194
9.2	费马问题	194
9.3	内接三角形	202
9.4	厄尔多斯—摩德尔定理	209
9.5	分割线	212
9.6	把凸区域嵌入矩形	216
第十章	应用问题与杂题	223
10.1	最佳直线	223

10.2	一般的最小二乘线.....	225
10.3	最可能的出现次数.....	228
10.4	极小问题的实验解.....	235
10.5	托勒密定理.....	240
10.6	光的折射.....	243
10.7	时间和距离的问题.....	245
10.8	极小极大问题.....	251
10.9	穿越沙漠的吉普车.....	253
第十一章	欧几里德三维空间.....	261
11.1	初步结论.....	261
11.2	四面体的等周定理.....	264
11.3	四面体的内切球和外接球.....	269
11.4	球面上的最短路程.....	271
第十二章	不假定存在性的等周问题.....	280
12.1	需要严格推敲.....	280
12.2	内平行多边形.....	281
12.3	等周定理.....	286
12.4	多边形的等周定理.....	289
12.5	具有指定边长的多边形.....	292
	关于微积分的附录.....	295
	解答.....	302
	参考文献.....	363

第一章 预备知识

本章的内容包括定义、记号、规定和本书要用到的一些结论。多数读者只需要浏览一遍即可，但第一节较重要，因为这节中介绍了使用数学用语和记号的若干约定。极大值和极小值的正式讨论是从第二章开始的，所以读者可以尽快的读完本章。

1.1 用语和记号

a, b 是任意二实数，我们说 a 比 b 大，是指 $a - b$ 为正数，它可以表示成如下几种等价形式：

$$a > b, a - b > 0, b < a, b - a < 0.$$

与此类似， a 大于或等于 b 的意思是 $a - b$ 或为正数或为零，可以表为

$$a \geq b, a - b \geq 0, b \leq a, b - a \leq 0.$$

记号 $\max(a, b, c)$ 表示实数 a, b, c 中的最大者或极大者。例如

$$\max(2, 3, 5) = 5, \max(2, 3, -5) = 3,$$

$$\max(3, 3, -5) = 3.$$

一般, 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是有限个任意的实数, 允许其中有相同的, 等式

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_j$$

(其中 j 是整数 $1, 2, 3, \dots, n$ 中的某一个) 的意思是指下列诸不等式成立:

$$a_j \geq a_1, a_j \geq a_2, a_j \geq a_3, \dots, a_j \geq a_n.$$

与此类似, 有限个实数的最小值记为

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_k$$

它的意思是指下列诸不等式成立

$$a_k \leq a_1, a_k \leq a_2, a_k \leq a_3, \dots, a_k \leq a_n.$$

实数的无限集不一定存在最大值和最小值. 简单的例子是正实数没有最小值, 因为对于任意实数 r , $r/2$ 就比它小. 又如, 若 a, b ($a < b$) 是任意二实数, 则满足关系式

$$a < x < b$$

的数 x 既无最大值也无最小值. 不过 x 有最小上界 b 和最大下界 a . 一个实数集的上界是这样一种数, 它大于或等于这个集内的每一个数. 同样, 一个实数集的下界是这样一种数, 它小于或等于该集内的每一个数.

我们称一个实数集合是有界的, 如果存在两个常数 c 和 k , 使该集内每个数 x 都满足不等式 $c \leq x \leq k$. 如果集内每个数 x 满足 $x \leq k$, 则说此集是有上界的.

如果满足条件 $c \leq x$ ，则说此集是有下界的。任何一个有界的实数集合都有唯一最小上界和最大下界。但这里不给出证明，因为我们只用到很特殊的实数集合，即实数轴上的区间（在解析几何中，我们知道 x 轴即是实数轴）。例如满足条件 $a < x < b$ 的实数 x 的集合构成一个开区间，记为 (a, b) 。

满足条件 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合构成一个闭区间，记为 $[a, b]$ 。这个实数集有最大值 b ，它也是最小上界。同时该数集也有最小值 a ，它也是最大下界。

记号 $[a, b)$ 表示由一切满足条件 $a \leq x < b$ 的实数 x 构成的一个半闭半开区间。此集有最小值 a ，但无最大值。它有最小上界 b 和最大下界 a 。同样，满足条件 $a < x \leq b$ 的实数 x 构成一个半开半闭区间，记为 $(a, b]$ ，它有最大值 b ，但无最小值。

在数学文献中，名词“最大”和“最小”通常用来代替“最小上界”和“最大下界”，但我们不使用这些术语。

有时，为了求得函数 $f(x)$ 的最大值或最小值，更方便的是代之以求 $-f(x)$ 的最小值或最大值。例如，如果我们已知 $9 + x^2 - 2x$ （ x 取遍全体实数）的最小值是8，则 $2x - 9 - x^2$ 的最大值是-8（因为 $9 + x^2 - 2x = 8 + (x - 1)^2$ ，由此可知8是最小值）。同理，因为 $90 + x^2 - 2x$ 的最小值

是89，所以 $900 + 10x^2 - 20x$ 的最小值是890。

这个方法可以用于倒数的情形。继续上面的例子，则对于所有实数 x ， $1/(9 + x^2 - 2x)$ 的最大值是 $1/8$ 。

下面我们介绍某些几何的惯例，设 P, Q 是任意二点， PQ 有三种意义：两端可以无限延长的直线 PQ ；以 P, Q 为端点的线段 PQ ； P, Q 两点间的距离。不同的两点间的距离是一个正数，仅当两点重合时才有 $PQ = 0$ ，又 $PQ = QP$ 。这些意义不难从上下文判断，不会引起混淆。比如，等式 $PQ = RS$ 显然表示两个距离相等。

半直线或射线 PQ 是指以 P 点作为一个端点，而从 P 到 Q 无限延伸的直线。

不共线的三点，如 A, B, C 加上三条线段 AB, BC, CA 组成一个三角形，它的面积是一个不为零的正数。三角形中任何两边之和大于第三边，这个结论叫**三角不等式**，例如， $AB + BC > AC$ 。一般，任意的不同三点 P, Q, R 均满足 $PQ + QR \geq PR$ ，当且仅当 Q 点是线段 PR 的内点时等号成立，所谓 Q 点是线段 PR 的内点，意指 Q 严格地位于以 P, R 为端点的线段上。

对任意整数 $n \geq 3$ ，一个 **n 边形**由平面上 n 个不同的点（称为顶点） $P_1, P_2, \dots, P_n$ 和 n 条线段（称为边） $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{n-1}P_n$ 所